LES OPÉRATEURS PRÉCOMPACTS SUR LES TREILLIS VECTORIELS LOCALEMENT CONVEXE-SOLIDES

BELMESNAOUI AQZZOUZ AND REDOUANE NOUIRA

Received June 13, 2001; revised May 27, 2002

Résumé. *Dans cet article on donne une généralisation aux treillis localement convexe-solides des résultas de C.D. Aliprantis-O. Burkinshaw* [2]*, de P.G. Dodds-D.H. Fremlin* [4] *et de A.W. Wickstead* [6].

1. Introduction et rappels

Soient E, F deux treillis de Banach et S, T deux opérateurs linéaires de E dans F tels que $0 \leq S \leq T$ avec T compact. Dans [4], P. Dodds et D. Fremlin ont montré que si la norme de $E^{'}$ et celle de F sont o-continues alors S est compact. Ensuite, C. Aliprantis et O. Burkinshaw [2], ont montré que S^3 est toujours compact et que si la norme de $E^{'}$ ou celle de F est o-continue alors S^2 est compact. Enfin, dans [6], A. Wickstead a montré la réciproque de [4].

Dans ce papier on va étendre ces résultats aux treillis vectoriels localement convexe-solides en montrant que si $S, T : (E, \tau) \to (F, \Im)$ sont deux opérateurs linéaires continus entre deux treillis vectoriels localement convexe-solides tels que $0 \leq S \leq T$ et si T transforme les o-intervalles en des précompacts, alors, T transforme les quasi-o-précompacts en des précompacts, S transforme les quasi-o-précompacts en des quasi-o-précompacts et, si $E = F$, l'application S^2 transforme les quasi-o-précompacts en des précompacts. On déduit alors que si T est précompact, on a S^3 est précompact et si la topologie de E ou la topologie $\beta(E', E)$ est pré-Lebesgue, alors S^2 est précompact, et enfin, si les topologies $\Im$ et $\beta(E', E)$ sont pré-Lebesgue et T est précompact, alors S est précompact.
Réciproquement, on montre que si (E, τ) et $(F, \Im)$ sont deux treillis vectoriels localement convexe-solides séparés complets, alors on a l'une des conditions suivantes:
a) les topologies $\beta(E', E)$ et $\Im$ sont de Lebesgue ou
b) l'espace F est discret et la topologie $\Im$ est de Lebesgue ou
c) l'espace E' est discret et la topologie $\beta(E', E)$ est de Lebesgue
si et seulement si lorsque $S, T : E \to F$ sont deux opérateurs continus tels que $0 \leq S \leq T$ avec T précompact, alors S est précompact.

Pour établir ces résultats, nous aurons besoin des rappels suivants:
Une partie A d'un espace vectoriel ordonné E admet un supremum $v \in E$, si $\forall u \in A$, $u \leqslant v$ et si $w \in E$ tel que $\forall u \in A$, $u \leqslant w$ on a $v \leqslant w$. Un treillis vectoriel est un espace vectoriel ordonné E tel que $\sup(x, y)$ existe pour tous $x, y \in E$. A chaque élément $x \in E$, on associe sa valeur absolue $|x| = \sup(x, -x)$, sa partie positive $x^+ = \sup(x, 0)$ et sa partie négative $x^- = (-x)^+$. Une partie A d'un treillis vectoriel E est dite solide si $x \in A$, $y \in E$ et $|y| \leq |x|$ impliquent $y \in A$. Une bande dans E est un sous-espace vectoriel solide B de E tel que $\sup A \in B$ pour toute partie non vide A de B, admettant un supermum dans E. Un

2000 *Mathematics Subject Classification.* 46A40, 46B40, 46B42.
Key words and phrases. opérateur précompact, topologies pré-Lebesgue, partie quasi-ordre-précompacte.

treillis vectoriel E est complet pour l'ordre si toute partie non vide majorée de E admet un supremum.
Un élément u non nul du treillis vectoriel E est dit discret si l'idéal engendré par u coïncide avec le sous-espace vectoriel engendré par u. Le treillis vectoriel E est dit discret, s'il admet un système disjoint complet d'éléments discrets $(e_i)_{i\in I}$ (i.e. pour tout $i,j\in I$, $e_i\wedge e_j=0$, et si pour un $u\in E$, on a $u\wedge e_i=0$ $\forall i\in I$, alors $u=0$).

Soit E un treillis vectoriel. Pour tout $x,y\in E$ tel que $x\leq y$ on note $[x,y]=\{z\in E\ :\ x\leq z\leq y\}$, l'ensemble $[x,y]$ est appelé un intervalle pour l'ordre (i.e. o-intervalle). Une partie de E est bornée pour l'ordre si elle est contenue dans un intervalle pour l'ordre.

Si E et F sont deux treillis vectoriels, une application linéaire $T:E\longrightarrow F$ est bornée pour l'ordre si pour toute partie A bornée pour l'ordre dans E, $T(A)$ est bornée pour l'ordre dans F. On note par $\mathcal{L}_b(E,F)$ l'espace de toutes les applications linéaires bornées pour l'ordre de E vers F. $\mathcal{L}_b(E,F)$ sera muni de l'ordre usuel (i.e. $S\leq T$ si et seulement si $S(x)\leq T(x)$ pour tout $x\in E^+$). C'est un espace vectoriel ordonné qui n'est pas nécessairement un treillis, mais il devient un treillis vectoriel si F est complet pour l'ordre.

Une topologie vectorielle τ sur un treillis vectoriel E est dite localement solide si les voisinages solides de 0 forment un système fondamental des voisinages de 0. Elle est dite localement convexe-solide si elle est à la fois localement convexe et localement solide.

Une topologie localement solide τ sur E est dite de Lebesgue (respectivement pré-Lebesgue) si $x_\alpha\downarrow 0$ (respectivement $0\leqslant x_n\uparrow\leqslant x$) dans E implique $x_\alpha\to 0$ (respectivement (x_n) est τ-cauchy). Pour toute la terminologie concernant les treillis vectoriel localement convexe-solide nous renvoyons le lecteur à $[1]$.

Si (E,τ) un treillis vectoriels localement convexe-solide et E' son dual topologique, on note par $|\sigma|(E,E')$ (respectivement $\beta(E,E')$) la topologie faible absolue (respectivement forte) définie sur E par la famille des semi-normes de treillis $\{P_f: f\in E'\}$ (respectivement $\{P_A: A$ borné dans $(E,|\sigma|(E,E'))\}$), où $P_f(x)=|f|(|x|)$ (respectivement $P_A(x)=\sup\{|f|(|x|):\ f\in A\}$). On définit de la même manière les topologies $|\sigma|(E',E)$ et $\beta(E',E)$ sur $E^{'}$.

2. Première généralisation

Rappelons le résultat suivant dû a A. Grothendieck, dont on peut trouver une démonstration dans $([5]$, Théorème 3, p. $51)$.

Théorème 2.1. *Soient (E,E'), (F,F') deux systèmes duaux, $T:E\to F$ un opérateur faiblement continu et $T^{'}:F^{'}\to E^{'}$ l'application duale de T. Si $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{B}$) est une collection de parties $\sigma(E,E')$-bornées de E (respectivement $\sigma(F',F)$ $-$bornées de F') et si $\tau_{\mathcal{A}}$(respectivement $\tau'_{\mathcal{B}}$) est la topologie de la convergence uniforme sur les éléments de $\mathcal{A}$ (respectivement de $\mathcal{B}$), alors on a l'équivalence suivante*:
i) *$T(A)$ est $\tau'_{\mathcal{B}}$-précompact pour tout $A\in\mathcal{A}$.*
ii) *$T'(B)$ est $\tau_{\mathcal{A}}$-précompact pour tout $B\in\mathcal{B}$.*

Une conséquence de ce théorème qui nous sera utile pour la suite est la suivante:

Corollaire 2.2. *Si (E,τ) et $(F,\Im)$ sont deux espaces localement convexes avec E'* et *F' leurs duaux topologiques, et i $T:E\to F$ est un opérateur linéaire, alors on a $(i)\Leftrightarrow(ii)$ et $(iii)\Leftrightarrow(iv)$, où*
i) *T est précompact.*
ii) *T est continu et pour tout équicontinu H de F', $T'(H)$ est $\beta(E',E)$-précompact dans E'.*

iii) *$T\left([-x,x]\right)$ est τ-précompact dans F pour tout $x \in E^+$.*
iv) *$T'\left(H\right)$ est $|\sigma|\left(E',E\right)-$précompact pour tout équicontinu H de F'.*

Introduisons la notion de quasi-précompacité pour l'ordre.

Définition 2.3. *Soit (E,τ) un treillis vectoriel localement convexe séparé. Une partie $A \subset E$ est quasi-ordre-précompacte si pour tout voisinage U de 0, il existe $x \in E^+$ tel que $A \subset [-x,x] + U$.*

Proposition 2.4. *Soient E un treillis vectoriel, $(F,\Im)$ un treillis vectoriel localement convexe-solide et $S,T : E \to F$ deux opérateurs linéaires tels que $0 \le S \le T$. Soit $A \subset E^+$ tel que $T\left(A\right)$ est quasi-o-précompact, alors $S\left(A\right)$ est quasi-o-précompact.*

Preuve. Soit U un voisinage solide de 0 dans F. Vu que $T\left(A\right)$ est quasi o-précompact, il existe $y \in F^+$ tel que $T\left(A\right) \subset [-y,y] + U$, i.e. pour tout $f \in A$, il existe $y_i \in [-y,y]$ tel que $T\left(f\right) - y_i \in U$. Or $S\left(f\right) - S\left(f\right) \wedge y = \left(S\left(f\right) - y\right)^+ \le \left|T\left(f\right) - y_i\right| \in U$. Par conséquent, $S\left(f\right) \in S\left(f\right) \wedge y + U$, et donc $S(A) \subset S(A) \wedge y + U$ ■

Nous aurons besoin du résultat suivant démontré dans [2].

Lemme 2.5. *Soient E un treillis vectoriel et $(F,\Im)$ un treillis vectoriel localement convexe-solide et complet pour l'ordre dont la topologie $\Im$ est de Lebesgue. Alors, pour tout $x \in E^+$, l'ensemble $B = \{T \in \mathcal{L}_b\left(E,F\right) : T\left[0,x\right] \text{ est } \Im\text{-précompact}\}$ est une bande de $\mathcal{L}_b\left(E,F\right)$.*

La proposition suivante se déduit immédiatement du lemme précédent.

Proposition 2.6. *Soient E un treillis vectoriel, $(F,\Im)$ un treillis vectoriel localement convexe-solide dont la topologie $\Im$* est *pré-Lebesgue. Si $S,T : E \to F$ sont deux opérateurs linéaires tels que $0 \le S \le T$ et si $T([0,x])$ est $\Im-$ précompact pour tout $x \in E^+$, alors $S([0,x])$ est $\Im-$précompact pour tout $x \in E^+$.*

Preuve. En effet, si F est séparé, on prend $(\hat{F},\hat{\Im})$ le complété topologique de $(F,\Im)$. C'est un treillis vectoriel localement convexe-solide complet pour l'ordre dont la topologie $\hat{\Im}$ est de Lebesgue. Si F n'est pas séparé, on prend le quotient $F/\overline{\{0\}}$. ■

Le théorème suivant est fondamental, il nous permettra de généraliser les résultats de [2] et [4] aux treillis vectoriels localement convexe-solides.

Théorème 2.7. *Soient $S,T : E \to F$ deux opérateurs linéaires continus entre deux treillis vectoriels localement convexe-solides tels que $0 \le S \le T$. On suppose que T transforme les o-intervalles en des précompacts, alors:*
i) *T transforme les quasi-o-précompacts en des précompacts.*
ii) *S transforme les quasi-o-précompacts en des quasi-o-précompacts.*
iii) *Si $E = F$, S^2 transforme les quasi-o-précompacts en des précompacts.*

Preuve. i) Soient V un voisinage solide de 0 dans F et A un quasi-o-précompact de E. Comme T est continu, il existe un voisinage solide U de 0 dans E tel que $T\left(U\right) \subset V$. Vu qu'il existe $x \in E^+$ tel que $A \subset [-x,x] + U$, on a $T\left(A\right) \subset T([-x,x]) + V$, avec $T([-x,x])$ précompact.
ii) En combinant la proposition (2.4) et la propriété **i)**.

iii) D'après **i**), Il suffit de montrer que S^2 transforme les o-intervalles en des précompacts. Soit H un équicontinu de E' (on peut supposer $0 \in H$). Vu que $T'(H)$ est un $|\sigma|(E', E)-$précompact (corollaire (2.2)), T' transforme tout o-intervalle de E' en un $|\sigma|(E', E)$-précompact. Comme $|\sigma|(E', E)$ est de Lebesgue, S' transforme tout o-intervalle de E' en un $|\sigma|(E', E)$-précompact et d'après **i**), S' transforme tout quasi-o-précompact de E' en un $|\sigma|(E', E)$-précompact. En particulier; si $S'(H)$ est quasi-o-précompact dans E' on aura $(S')^2(H)$ est $|\sigma|(E', E)$-précompact, il s'ensuit que S^2 transforme tout o-intervalle en un précompact de F. Montrons que $S'(H)$ est quasi-o-précompact dans E'. En effet, puisque $H = H^+ - H^+$ avec $H^+ = \{f^+ : f \in H\}$ et H^+ est équicontinu, alors $T'(H^+)$ est $|\sigma|(E^+, E)$-précompact, et donc quasi-o-précompact. Par conséquent; $S'(H^+)$ est quasi-o-précompact ■

On déduit deux conséquences.

Corollaire 2.8. *Soient $S, T : E \to F$ deux opérateurs linéaires continus entre deux treillis vectoriel localement convexe-solides tels que $0 \leq S \leq T$. On suppose que T transforme les o-intervalles en des précompacts. Si $A \subset E^+$ est tel que $T(A)$ est quasi-o précompact, alors $S^3(A)$ et $T^2(A)$ sont des précompacts.*

Corollaire 2.9. *Soient (E, τ) un treillis vectoriel localement convexe-solide et S, T : $E \to E$ deux opérateurs linéaires continus tels que $0 \leq S \leq T$. Si T transforme les $\tau-$bornés en des quasi-o-précompacts et transforme les o-intervalles en des précompacts. Alors S^3 et T^2 sont précompacts.*

En particulier on a le résultat important suivant:

Corollaire 2.10. *Soient $S, T : E \to E$ deux opérateurs linéaires continus sur un treillis vectoriel localement convexe-solide tels que $0 \leq S \leq T$.* Si T est *précompact, alors S^3 est précompact.*

Remarque 2.11. Sous les conditions du corollaire (2.10), on peut aussi déduire que S transforme les bornés en quasi-o-précompacts et que S^2 transforme les o-intervalles en des précompacts.

Remarque 2.12. On peut généraliser le corollaire (2.9) sous la forme suivante: Si T transforme les o-intervalles en des précompacts et T^n transforme les bornés en des quasi-o-précompacts $(n \in \mathbb{N})$, alors S^{n+2} et T^{n+1} sont des précompacts.

Proposition 2.13. *Soient (E, τ) un treillis vectoriel localement convexe-solide avec τ pré-Lebesgue et $S, T : E \longrightarrow E$ deux opérateurs linéaires continus tels que $0 \leq S \leq T$. Si T transforme les o-intervalles en des précompacts, alors pour tout $A \subset E^+$ tel que $T(A)$ est quasi-o-précompact, on a $S^2(A)$ est précompact.*

Preuve. En effet, il suffit de combiner les propositions (2.4), (2.6) et le théorème (2.7) ■

Comme conséquences, on peut citer les résultats suivants:

Corollaire 2.14. *Soient (E, τ) un treillis vectoriel localement convexe-solide avec τ pré-Lebesgue et S, $T : E \longrightarrow E$ deux opérateurs linéaires continus tels que $0 \leq S \leq T$. Si T transforme les $\tau-$bornés en des quasi-o-précompacts, alors S^2 est précompact.*

Corollaire 2.15. *Soient (E,τ) un treillis vectoriel localement convexe-solide avec τ pré-Lebesgue et $S,T:E\to E$ deux opérateurs linéaires continus tels que $0\leq S\leq T$.* Si T est *précompact, alors S^2 est précompact.*

Corollaire 2.16. *Soient (E,τ) un treillis vectoriel localement convexe-solide avec la topologie $\beta(E',E)$ pré-Lebesgue et $S,T:E\to E$ deux opérateurs linéaires continus tels que $0\leq S\leq T$. Si T est précompact, alors S^2 est précompact.*

Preuve. Si H est un équicontinu de $(E')^+$, $T'(H)$ est $\beta(E',E)$-précompact. On a $(S')^2(H)$ est $\beta(E',E)$-précompact (Proposition (2.13)). Or pour tout équicontinu H de F' on a $H\subset H^+-H^+$ avec H^+ équicontinu, donc S est précompact ■

Pour montrer le dernier résultat de ce paragraphe, on a besoin de deux lemmes. Le premier est un résultat dont on peut trouver une démonstration dans ([1], Théorème (19.18), p.132).

Lemme 2.17. *Dans un treillis vectoriel localement convexe-solide séparé (E,τ) dont la topologie τ est pré-Lebesgue, les topologies τ et $|\sigma|(E,E')$ coïncident sur les bornés pour l'ordre de E.*

Lemme 2.18. *Si (E,τ) est un treillis vectoriels localement convexe-solide séparé et $A\subset E$ une partie précompacte, alors pour tout $u\in E$, $u\wedge A$ est précompact.*

Preuve. Soit V un $\tau-$voisinage équilibré solide de 0 dans E, il existe une partie K finie dans A tel que $A\subset K+V$. Montrons que $u\wedge A\subset u\wedge K+V$. En effet, soit $x\in A$, il existe $k\in K$ et il existe $y\in V$ tel que $x=k+y$. Et d'après l'inégalité de Birkhoff ([1], Théorème (1.1), p. 3), on a $|u\wedge x-u\wedge k|\leq|x-k|=|y|\in V$, et donc $u\wedge x-u\wedge k\in V$■

Théorème 2.19. *Soient (E,τ), $(F,\Im)$ deux treillis vectoriel localement convexe-solides avec les topologies $\Im$ et $\beta(E',E)$ pré-Lebesgue, et $S,T:E\to F$ deux opérateurs linéaires continus tels que $0\leq S\leq T$. Si T est précompact, alors S est précompact.*

Preuve. Soient H un équicontinu de F' et V un voisinage de $\{0\}$ dans F. L'ensemble $T'(H)$ est $\beta(E',E)$-précompact (Corollaire (2.2)) et donc, pour tout $f\in F'$, $T'([-f,f])$ est $\beta(E',E)$-précompact. Par suite $S'([-f,f])$ est $\beta(E',E)$-précompact (proposition(2.6)). Ceci montre que $S(B)$ est $|\sigma|(F,F')$-précompact pour tout borné B de E. En supposant $B\subset E^+$, on peut déduire qu'il existe $y\in F$ tel que $S(B)\subset y\wedge S(B)+V$. D'après le lemme (2.18), $y\wedge S(B)$ est $|\sigma|(F,F')$-précompact, et grâce au lemme (2.17), on a $y\wedge S(B)$ est $\Im$-précompact■

3. Deuxième généralisation

Il s'agit de généraliser les résultats de A.W. Wickstead [6].

Théorème 3.1. *Soient (E,τ) et $(F,\Im)$ deux treillis vectoriels localement convexe-solides séparés complets. On a l'équivalence suivantes:*

1- *L'une des propriétées suivantes est vérifiée:*

a) *Les topologies $\beta(E',E)$ et $\Im$ sont de Lebesgue.*

b) *L'espace F est discret et la topologie $\Im$ est de Lebesgue.*

c) *L'espace E' est discret et la topologie $\beta(E',E)$ est de Lebesgue.*

2- *Si $S, T : E \to F$ sont deux opérateurs linéaires continus tels que* $0 \leq S \leq T$ *et T* est *précompact, alors S est précompact.*

Preuve. **a)** $\Rightarrow$ **2** : C'est le théorème (2.19).
b) $\Rightarrow$ **2** : Soit B un borné de E^+. Soit U un voisinage solide et équilibré de 0 dans E, il existe un autre voisinage V de 0 tel que $V + V \subset U$. Comme $T(B)$ est précompact, $S(B)$ est quasi-o-précompact (i.e. $\exists x \in F^+$ tel que $S(B) \subset [-x, x] + V$). Et vu que l'espace F est discret, l'intervalle d'ordre $[-x, x]$ est $\Im$-compact ([1], Corollaire (21.13), p.156), et par suite, il existe $K \subset [-x, x]$ fini tel que $[-x, x] \subset K + V$. Ce qui montre que $S(B) \subset K + V + V \subset K + U$.
Finalement, puisque pour tout borné B on a $B \subset B^+ - B^+$, *où* $B^+ = \{x^+ : x \in B\}$, la conclusion en découle.
c) $\Rightarrow$ **2** : Soient H un équicontinu de $(F')^+$ et U, V deux voisinages solides équilibrés de 0 dans $(E', \beta(E', E))$ tel que $V + V \subset U$. Vu que $T'(H)$ est $\beta(E', E)$-précompact, et donc quasi-o-précompact, alors $S'(H)$ est quasi-o-précompact (car $0 \leq S' \leq T'$), il existe $f \in (E')^+$ tel que $S'(H) \subset [-f, f] + V$. Comme $[-f, f]$ est $\beta(E', E)$ $-$précompact, il existe une partie finie $K \subset [-f, f]$ telle que $[-f, f\ ] \subset K + V$ ([1], Corollaire (21.13),p.156), et donc $S'(H) \subset K + U$, par suite $S'(H)$ est $\beta(E', E)$-précompact. Or pour tout équicontinu H de F' on a $H \subset H^+ - H^+$ avec H^+ équicontinu, donc S est précompact.
2 $\Rightarrow$ **1** : On va montrer que
i) Si la topologie $\beta(E', E)$ n'est pas pré-Lebesgue, alors $(F, \Im)$ vérifie **b)**.
ii) Si la topologie $\Im$ n'est pas de Lebesgue, alors $(E', \beta(E', E))$ vérifie **c)**.

i) Supposons que la topologie $\beta(E', E)$ n'est pas pré-Lebesgue et que **b)** est fausse. Il existe donc $y \in F^+$ et une suite $(y_n)_{n \geq 1} \subset [0, y]$, qui converge pour $\sigma(F, F')$ mais n'admet pas de sous-suite convergente pour $\Im$ (cf.[1], Théorème (21.13), p.156). Comme la topologie $\beta(E', E)$ n'est pas pré-Lebesgue, il existe $f \in E'$ et une suite disjointe $(f_n) \subset [0, f]$ qui ne converge pas vers 0 pour la topologie $\beta(E', E)$ ([1], Théorème (10.1), p. 64). Mais vu que la topologie $|\sigma|(E', E)$ est pré-Lebesgue on a $f_n \overset{|\sigma|(E',E)}{\longrightarrow} 0$. D'après ([3]; Théorème(23), p4), il existe un borné équilibré $B \subset E$ et une suite disjointe $(x_n)_{n \geq 1} \subset B$ telle que $(f_n(x_n))_n$ ne converge pas vers 0 (on peut supposer que $1 \leq f_n(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Posons $H = \left\{\sum_{n \geq 1} \alpha_n\ x_n :\ \sum_{n \geq 1} |\alpha_n| < +\infty\right\}$ et soit l'application linéaire et positive:

$$\Psi : l_1 \to H,\ (\alpha_n)_{n \geq 1} \to \sum_{n \geq 1} \alpha_n\ x_n$$

Ψ est une bijection telle que Ψ^{-1} est positive et continue. En effet; puisque $(x_n)_n$ est disjointe on a $\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\ \alpha_k\ x_k\right| = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|\ x_k$, et donc si $\Psi((\alpha_n)_n) = 0$ alors $(\alpha_n)_{n \geq 0} = 0$.
Par suite Ψ est injective, et on en déduit que Ψ est bijective. Considérons

$$\Psi^{-1} : H \to l_1,\ \ x = \sum_{n \geq 1} \alpha_n\ x_n \to (\alpha_n)_{n \geq 1}$$

Si $x = \sum_{k \geq 1} \alpha_k x_k \in H$ est tel que $0 \leq \sum_{k \geq 1} \alpha_k x_k$ on a $-\alpha_1\ x_1 \leq \sum_{k \geq 2} |\alpha_k| x_k$, et par suite $-\alpha_1\ x_1 \leq |\alpha_1| x_1 \wedge \sum_{k \geq 2} |\alpha_k|\ x_k$ et donc $-\alpha_1 \leq 0$.
De la même façon, on a $\alpha_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ce qui montre que Ψ^{-1} est positive.
Soit $\varepsilon > 0$. Vu que f est continue, il existe U un voisinage solide équilibré de 0 dans E tel que $\forall x \in U$, $|f(x)| < \varepsilon$.
Si $x = \sum_{k \geq 1} \alpha_k x_k \in U$ alors $|x| = \sum_{k \geq 1} |\alpha_k|\ x_k \in U$, et donc $f(|x|) = \sum_{k \geq 1} |\alpha_k|\ f(x_k) < \varepsilon$. Or $f(x_k) \geq 1$, ce qui donne $\sum_{k \geq 1} |\alpha_k| < \varepsilon$, et par suite Ψ^{-1} est continue.
Par conséquent, les applications

$$\Phi_n : H \to \mathbb{R};\ \sum_{n \geq 1} \alpha_n x_n \longmapsto \alpha_n$$

$$\Phi : H \to \mathbb{R};\ \sum_{n\geq 1} \alpha_n x_n \longmapsto \sum_{n\geq 1} \alpha_n$$

sont positives et continues.
Définissons maintenant les applications suivantes:

$$S : H \to F;\ x = \sum_{k\geq 1} \alpha_k\ x_k \longmapsto \sum_{k\geq 1} \alpha_k y_k = \sum_{k\geq 1} \Phi_k (x) .y_k$$

$$T : H \to F;\ x = \sum_{k\geq 1} \alpha_k\ x_k \longmapsto \Phi (x) .y$$

et

$$P : E \to H\text{: } \forall x \in E^+,\ P (x) = \sup \{y \in H : 0 \leq y \leq x \}$$

et

$$\forall x \in E,\ P (x) = P (x^+) - P (x^-)$$

$P (x)$ est bien définie, en effet, si $y \in H$ tel que $0 \leq y \leq x$ alors, $0 \leq \Phi_n (y) x_n \leq y \leq x, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\alpha_n = \sup \{\Phi_n (y) : y \leq x\}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha_n\ x_n \leq x$, et donc sup $\{\alpha_n\ x_n : n \in \mathbb{N}^*\} \leq x$. Or $\sup \{\alpha_n\ x_n : n\ \in \mathbb{N}^*\} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\ x_n$, et donc $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\ x_n \leq x$, par suite, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\ f (x_n) \leq f (x)$.
D'autre part, comme $1 \leq f (x_n)$, on a $\sum_{n=1}^{\infty}\ \alpha_n \leq f (x)$, et donc $\sum_{n\geq 1} \alpha_n < +\infty$.
Par conséquent, $P (x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in H$.
Maintenant, il est clair que SoP et ToP sont deux opérateurs positifs et continus avec ToP un précompact (de rang égal à un), mais $SoP\ (x_n) = y_n$, et la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ n'admet aucune sous-suite convergente, i.e SoP n'est pas précompact.

ii) Supposons que $\Im$ n'est pas de Lebesgue, et que la propriété **c**) est fausse. D'après ([1] , Théorème (10.1), p. 64), il existe un $y \in F$ et une suite disjointe $(y_n)_{n\geq 1} \subset [0, y]$ qui ne converge pas vers 0. De même d'après ([1] , Théorème (21.13), p.156), il existe un intervalle d'ordre $[0, \Psi] \subset E'$ qui n'est pas $\beta (E', E)$-compact. Montrons que $[0, \Psi]$ est $\beta (E', E)$-complet. En effet si $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ est une suite généralisée $\beta(E', E)$-Cauchy dans $[0, \Psi]$, alors pour tout $x \in E$, la suite $(f_\alpha (x))_{\alpha\in I}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc converge vers un certain $f(x)$ (notons que $f \in E'$ et $f \in [0, \Psi]$).
Montrons que $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge vers f pour la topologie $\beta (E', E)$. Soient B un borné solide et équilibré de E et $\varepsilon > 0$.

$\forall\ x \in B,\ \forall y \in E,\ \forall \alpha \in I,\ \forall \beta \in I$ on a:

$$\begin{aligned}|f_\alpha (x) - f (x)| &\leq |f_\alpha (x) - f_\beta (x)| + |f_\beta (x) - f_\beta (y)| + |f_\beta (y) - f (y)| + |f (y) - f (x)|\\ &\leq |f_\alpha (x) - f_\beta (x)| + |f_\beta (y) - f (y)| + 2\Psi (|x - y|) .\end{aligned}$$

Or $\exists N \in I$ tel que $\forall x \in B,\ \forall \alpha, \beta > N$ on a $|f_\alpha (x) - f_\beta (x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
On en déduit $|f_\alpha(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |f_\beta (y) - f (y)| + 2\Psi (|x - y|)$.
Faisant tendre y vers x puis β vers $+\infty$, on obtient, $|f_\alpha(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui montre que $f_\alpha \overset{\beta(E',E)}{\longrightarrow} f$, et par suite $[0, \Psi]$ est $\beta (E', E)$ $-$complet.
En utilisant le théorème (21.12), [1], p. 154, il existe une suite $(\Phi_n)_{n\geq 1} \subset [0, \Psi]$ qui coverge vers Φ pour $\sigma (E', E'')$, mais qui n'admet pas de sous-suite convergente pour $\beta (E', E)$, où $E'' = (E', \beta (E', E))'$.
Définissons maintenant deux opérateurs $S,\ T : E \to F$ par:

$$S (x) = \Phi (x)\, y + \sum_{n=1}^{+\infty} (\Phi_n - \Phi) (x)\, y_n$$

et

$$T (x) = \Psi (x)\, y$$

Il est clair que $0 \leq S \leq T$ et T est précompact (de rang fini).
Pour montrer que S n'est pas précompact, il suffit de prouver que l'application

$$R : E \longrightarrow F;\ R(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\Phi_n - \Phi)(x) . y_n$$

n'est pas précompacte. Pour cela, posons $H = \left\{ \sum_{n \geq 1} \ \alpha_n \ y_n \ : \alpha_n \longrightarrow 0 \right\}$. On a : $R(E) \subset H$. On peut montrer de la même façon **(i)**, que l'application $\varphi : c_o \longrightarrow H$, $(\alpha_n)_{n \geq 1} \mapsto \alpha_n \ y_n$ est bijective et que φ^{-1} est positive. De plus φ^{-1} est continue. En effet; on peut supposer l'existence d'un voisinage solide équilibré W de 0 tel que $y_n \notin W$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $0 < \varepsilon < 1$, si $\sum_{n \geq 1} \alpha_n \ y_n \in \varepsilon W$, alors $\sum_n |\alpha_n| \, y_n \in \varepsilon W$. Donc $|\alpha_n| \ y_n \in \varepsilon W$, et par suite $|\alpha_n| \leq \varepsilon$ (car $y_n \notin W$). Il s'ensuit que $\|(\alpha_n)\|_\infty \leq \varepsilon$, et φ^{-1} est continue. Par conséquent, les applications

$$g_n : H \to \mathbb{R} \ \sum_n \alpha_n \ y_n \longmapsto \alpha_n$$

sont continues. Plus précisement, l'ensemble $K = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinu dans F'.
Donc si $R : E \to H$ est précompacte, alors $R'(K)$ est $\beta(E', E)$-précompact.
Or $R'(g_n) = \Phi_n - \Phi$ et $(\Phi_n - \Phi)_n$ n'admet pas de sous-suite convergente, d'où la contradiction ■

References

[1] C.D. Aliprantis and O. Burkinshaw, Locally solid Riesz spaces, Academic Press 1978.

[2] C.D. Aliprantis and O. Burkinshaw, Positif compact operators on Banach lattices, Math. Z., 174 (1980) 289-298.

[3] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw and M. Duhoux, Compactness properties of abstract kernel operators. Pacific journal of Mathematics. vol.100, n.1 (1982) 1-22.

[4] P.G. Dodds and D.H. Fremlin, Compact operators in Banach lattices, Isreal J. Math. 34 (1979) 287-320.

[5] A.P. Robertson and W. Robertson. Topological vector spaces, 2^{nd}Ed, Cambridge University Press, London, 1973.

[6] A.W. Wickstead, Converses for the Dodds-Fremlin and Kalton-Saab theorems, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 120 (1996) 175-179.

Université Ibn Tofail; Faculté des Sciences, Département de
Mathématiques et informatique, Equipe d'analyse fonctionnelle, B.P. 133,
Kénitra, Morocco. baqzzouz@hotmail.com