



一般社団法人

国際数理科学協会会報

No.99/2016.7

編集委員：藤井淳一（委員長）

目次

* 年会のお知らせ

* 寄稿

* 研究紹介

国際数理科学協会 2016 年度年会

年会担当理事 濱田悦生

国際数理科学協会 2016 年度年会の各分科会が、以下のように開催されますのでお知らせいたします。

「確率モデルと最適化」分科会

代表者：菊田健作（兵庫県立大学）

日本オペレーションズ・リサーチ学会研究部会「不確実性環境下の意思決定モデリング」
(主査 笠原正治(奈良先端科学技術大学院大学), 幹事 中西真悟(大阪工業大学)) との共催

日時：2016年8月26日（金）13:00–17:30

場所：大阪工業大学うめきたナレッジセンター

大阪市北区大深町3-1 グランフロント大阪ナレッジキャピタルタワーC9階

アクセス：<https://www.oit.ac.jp/umekita/#Access>

プログラム

13:00–13:55 片桐 英樹（神奈川大学）

『基板検査における最適化 ～中小企業との産学連携を通して～』

14:05–15:00 三好 直人（東京工業大学）

『ジニブル点過程を用いたセルラネットワークのモデル化と解析』

15:10–16:05 佐藤 毅（神戸学院大学）

『海岸保全施設の維持管理問題について』

16:15–17:10 安田 正實（千葉大学名誉教授）

『動的計画法とフィボナッチ数の2次評価分割、トリボナッチ数列による連の確率計算』

「統計的推測と統計ファイナンス」分科会研究集会

世話人: 濱田 悦生 (大阪大学), 地道 正行 (関西学院大学)

開催日時: 2016年8月20日(土) 10:00-17:00

場所: 大阪大学基礎工学部 J棟 1F 共通セミナー室

プログラム

午前の部

10:00-10:30

岩貞 侑那 (大阪府立大学大学院理学系研究科)・林 利治 (大阪府立大学大学院工学研究科)
『一般化加法モデルによる判別とその性能評価』

10:30-11:00

川崎 悠介 (大阪府立大学大学院工学研究科)・林 利治 (大阪府立大学大学院工学研究科)
『畳み込み符号化された信号の particle filter による推定』

11:00-11:40

折原隼一郎・濱田 悦生 (大阪大学大学院基礎工学研究科)
『統計的因果推論における共変量バランシング一般化傾向スコアについて』

11:40-12:20

荒川 聖悟・地道 正行 (関西学院大学 商学部)
『データプラットフォームの構築とその応用: Web スクレイピング, 可視化 (仮)』

午後の部

13:30-14:10

倉田 澄人・濱田 悦生 (大阪大学 大学院基礎工学研究科)
『漸近的過剰・過小適合確率と規準のロバスト性について』

14:10-14:50

田辺 竜ノ介 (大阪大学 大学院基礎工学研究科)
『TBA』

14:50-15:30

地道 正行・阪 智香 (関西学院大学 商学部)
『動的文書生成と再生可能研究: 財務・経済指標データ分析の観点から』

15:40-16:30

林 利治 (大阪府立大学 学術研究院 第3学群 電気情報系)
『カルマンフィルタからアンサンブルカルマンフィルタへ』

16:30-17:00 総合討論

* 寄稿

ゼノンのパラドックスと熱力学 (Zeno's paradoxes and thermodynamics)

明星 稔 (Minoru Myojo ; 無所属)

1 はじめに

熱力学は全微分操作を多用するから、本会報 2016 年 1 月号に寄稿した『熱力学は数学的 (Thermodynamics is mathematical)』の中で、著者は「熱力学動作に全微分条件は必須である」ことを強調した [1]。その解説では、対象とする系 (system) が粒子減数を伴う熱力学的な「極限」を扱っていて、数学操作を重視するあまりに物理学視点の「時間概念」を疎かにする印象を与えた感は否めない。

本稿では、ゼノンのパラドックス (Zeno's paradoxes) を取り上げ、“より本質的な” その主張の対象が時間概念 (時間分割と時間極限) であるとの著者解釈について、「どのように理解すべきか」を議論する。そして、ある意味哲学的な時間概念の、熱力学を介した数理科学と自然科学の間における「その存在」について、数学的表現に基づいた熱力学における時間概念の取り扱い方について解説する。

2 ゼノンのパラドックス — その背景 —

およそ 2500 年の時間が経過してなおゼノンのパラドックスが忘れ去られずに今日まで語り継がれることのできた理由の 1 つとして、散逸してしまったゼノンの論文の内容が時代を越えて論敵となったアリストテレス (英字表記 Aristotle ; 384BC-322BC) の著述 [2] に引用されたことが挙げられる。ゼノン (同 Zeno ; 490 頃 BC-430 頃 BC) は、ギリシャのエレア Elea の地でパルメニデス派に属した哲学者で、ピュタゴラス派との論争を重ねる過程で 4 つのパラドックスを創出したと言われている。(それらの変化バージョンには、後年の人たちによる創作が含まれる。)

ゼノンは、その師パルメニデス (Parmenides) の基本思想「ある」を存在として捉え、パルメニデスが説明する 8 つの性質のうちの 2 要素 ; 唯「一」の存在と「不動」に着目したと言われる。そして、対極にある思想を展開するピュタゴラス派の「多」と「動」を論駁するためにゼノンは、「動」に対する「不動」の論理主張に背理法を採用し、「多」に対する「一」の論理主張に二律背反となる論述を採用したと言われる [3]。

ゼノンの 4 つのパラドックスは、すべて、前者「不動」を主張するための背理法の中に現れる。背理法では一度は相手の主張が正しいと仮定して議論を進めるために、ゼノンのパラドックスにはゼノンが本来否定することを前提にした (その一方で、著者が有益と考える) 知見が含まれている。本稿の目的は、ゼノンが当時主張した内容の哲学的正当性を記述することではなく、ゼノンの議論が今日まで語り継がれた奇跡に感謝し、その数理・自然科学的知識の拡充といった学術貢献に資するための“概念”や“気付き”を汲み取ることにある。

3 ゼノンのパラドックス — 4 つの逆説の紹介 —

いくつかの文献 [2-6] を参照した結果、著者が「史実として納得がいく」と考える“形式” (著者の表現上の創作を含む) を以下に記す。

<二分割> 移動体（ランナーとか矢）の移動ルート（空間）の始点(S)と終点(G)に着目すれば、移動体は必ずその中点(C)を通過するという考えの下、始点(S)と中点(C)、あるいは中点(C)と終点(G)の間で二分割操作を繰り返すならば、「ランナーはいつまで経っても走り出せない」とか「矢はいつまで経っても的を射ることができない」という逆説。

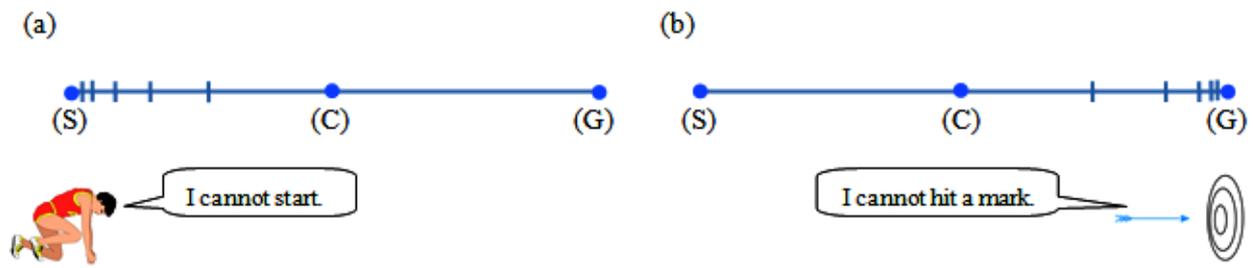
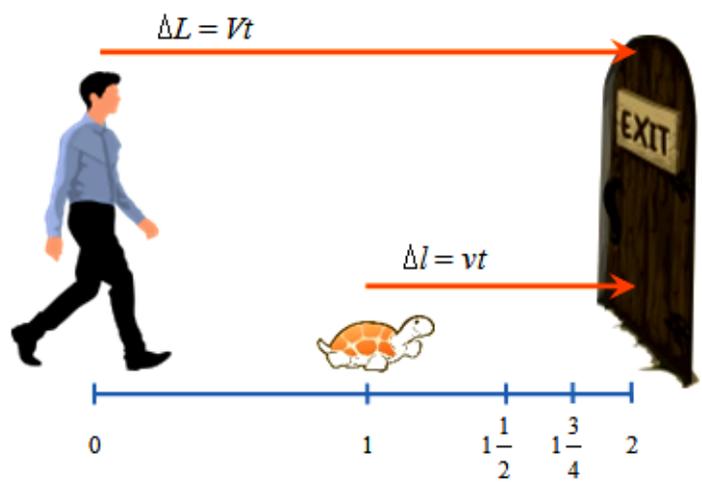


Fig. 1 Bisection methods: (a) the case where the limit is in the starting point, (b) the case where the limit is in the goal point.

<アキレスと亀> 脚力に自信のあるアキレスと“鈍（のろ）さ”が定評の亀に徒競走をさせれば、誰もがアキレスが勝つと信じている。ところが、亀にハンディを与えてアキレスとゴールの間に亀を配置すれば、アキレスが亀のいた位置まで到着すれば亀は更にその先に歩を進めていて、アキレスは亀にいつまで経っても追いつくことができないという逆説。アキレスの移動速度（等速）を亀の2倍に、またアキレスのゴールまでの距離を亀の2倍に設定するときの<アキレスと亀>は、終点(G)を極限点とする<二分割>問題と同じ逆説となる。



This figure shows the paradox in the case of $\frac{\Delta L}{\Delta l} = \frac{V}{v} = 2$ (Bisection method).

Fig. 2 Achilles and the tortoise: the paradox is that Achilles can not overtake the tortoise.

<止まった飛矢> 等速で飛ぶ矢の飛行ルート（空間）を絞り込んでいけば、矢という1つの存在と空間サイズとが一致するようになり、結局のところ、矢の止まった状態が現出することになるという逆説。

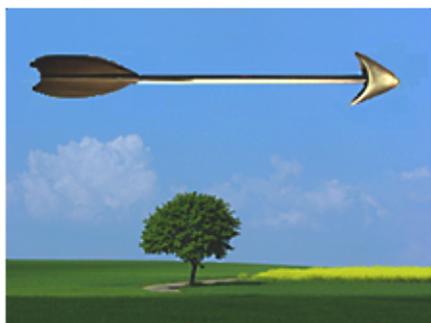


Fig. 3 Stopped flying arrow in the time limit world.

＜競技場＞ トラックの左右から同じ速度（等速）で行き違い2方向に通過する同サイズ2台の馬車をスタジアム中央正面から眺めるとき、その人が見る“馬車が重なり始めてから重なり完了までの時間”は、片方の馬車が停止していたときの時間の1/2倍である。現代人にとってそれは至極当然の相対論であるが、転じて、空間と時間の最小単位を想起しその最小単位の移動を考えれば、“単位の更なる分割”を考えざるを得なくなるという逆説。

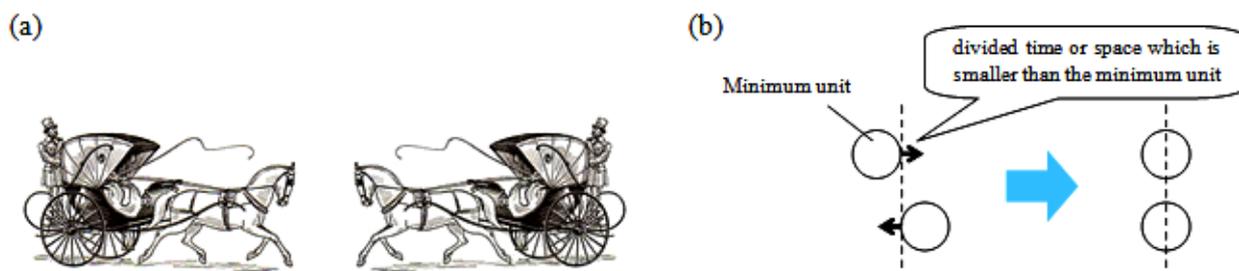


Fig. 4 Stadium: (a) the moving cabs and (b) the paradox is that the minimum units of time and space need to be divided each further

4 4つの逆説を逆説でなくする考え方

以上の4つの逆説について解説する。

＜二分割＞と＜アキレスと亀＞では面白おかしいストーリー性のある“逆説”が記述されているが、そこに隠れた真の主張を捜し求めると“極限点をどこに設けるかの数学的条件”が単に明示されているだけであることが分かる。すなわち、両者の逆説はあくまで数学操作のお話に過ぎない。＜二分割＞での距離S-G間の2つの二分割操作(a)(b)が数学的であるなら、その操作に“操作時間”なる時間的要素が入り込む余地はなく、「スタートできないランナー」も「的の手前で足踏みを始める矢」もイメージすることは許されなくなる。

そして、その数学操作を保証する（証明する）考え方は、その数学操作の中に操作時間を排除して尚、“マイクロ領域（の時空間）に限定して、可逆反転動作（reversible operation having no time element）を満足させると言い切れる証拠”を見つけることである。Fig. 1 (b)の例では、ゴール(G)の近傍で二分割操作を続けて極限点のゴールを目指す場合はもちろんのこと、その途上で2倍操作に切り替え反転してスタート地点方向に戻り始める場合にも、マクロ現象に影響を及ぼすことがないことを認識できるかどうかである¹。この着眼点は、熱力学が主張するところの“準静的過程（quasistatic process）”について、著者が新しく定義づける考え方と同じである。

¹ここでの議論には、分割操作が数学的で“その操作に所要時間は不要”との視点とは別に、“分割対象のフラグメント、とくに時間分割フラグメントに時間経過の方向性を見出せるか否か”の視点を入れて考察する必要がある。後者の視点に対しては、後述する“熱力学時間”を参照のこと。

さらに、本来は何に対して“極限点”を設けたのかと言うと、それは『時間（時間の長さ）』に対してである。先の<二分法>問題では、『距離（空間の長さ）』を対象にした分割を考えたが、等速の速度概念を持ち込んだ上は特殊相対性理論の及ばない世界を対象にすれば、すべての事象に共通して流れる『時間』を分割する行為の方が上位概念に位置づけられる。時間とは、2つの“時点”間の長さ（や幅）のことである。Fig.2 に現れたアキレスと亀が過ぎた時間に着目すれば、

$$t = \frac{\Delta L}{V} = \frac{\Delta l}{v} \quad (1)$$

と表現されるように両者は同じ時間 t を共有している。

そして、時間を分割する行為を通して、時間極限（時間の幅はゼロ）への到達可能性と、“時間を関数にもつ対象物（や空間）の、いわゆる「動」”から“極限究極の姿・形である「不動」、例えば<止まった飛矢>”への転換が示唆されることになる。ただし、時間の極限点への実際の到達は不可能であり、数学的にそれは、分割操作が「無限に」繰り返される形式によってのみ表現される。

<アキレスと亀>での時間分割の正当性を再確認する。時間分割が距離分割の上位に位置づけられることは、アキレスと亀のそれぞれの位置（Fig. 5 縦軸）が両者に共通の時間（Fig. 5 横軸）の関数として記述できることから納得できる。Fig. 2 に表したアキレスと亀の相対位置と速度の関係（二分法；Bisection method）を Fig. 5 に表し、共通の時間軸に注目すれば、その時間軸は極限に達するまでの時間の割合 t_{ratio} （範囲：0~1）を表している。そして、自然科学的な実時間 $t(s)$ とそれ t_{ratio} との関係は、極限到達時間を $t_{cross}(s)$ と設けて

$$t = t_{cross} \cdot t_{ratio} \quad (2)$$

と表すことができる。極限到達時間 t_{cross} とはその系（system）に特徴的な極限が関与した時間と考えることができる。日常生活の中であまり極限の存在を意識しないアキレスは、実時間 t を延長させて亀を抜き去り、普通に次の行動へと移れることとなる。それは、時間分割が数学操作に基づくから可能なことと言える。

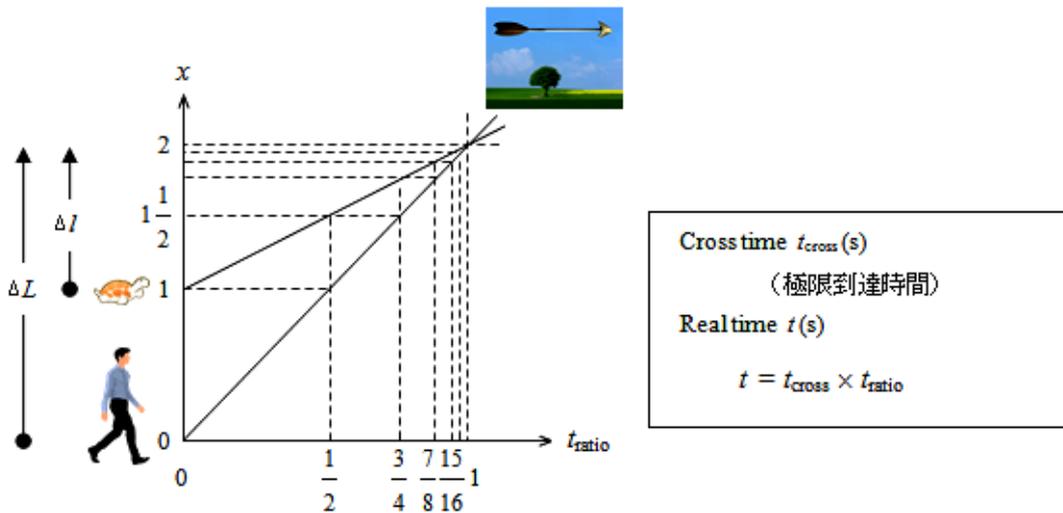


Fig. 5 Distance (space length) vs. time (time length), assuming the tortoise to walk at Achilles' half speed.

ここで、Fig. 5 の極限点には、アキレスを矢に置き換えて考えれば<二分法>の Fig. 1(b) で表現した「的に直前の矢」をイメージできるし、それと同時に、的に至る途上にも極限点があったと想定すれば Fig. 5 の中に記載した<止まった飛矢>をイメージしても良い。ただし、それは先述したように、数学的記述に拠る以外はイメージ世界の中でのみ存在が許される代物である。

実は、絶対零度の取り扱いにはそれに似ている。研究・工業利用目的のために絶対零度に近い状態を作り出す技術開発は現時点（2016.4）でもかなりのレベル（特殊条件下で制限もあるがレーザー冷却で $\mu K \sim mK$ オーダー）に達している。しかしながら、熱力学第3法則のように絶対零度への到達表現は数

学的に可能であるが、絶対零度の真の達成には、自然科学的な各種の動作原理（熱伝導理論や断熱膨張理論など）がそれを否定する。熱伝導を利用して物質の絶対零度化を目指そうにもその物質に接触させる物質の温度には絶対零度以下が要求されることになるし、断熱条件を整えたとしても宇宙規模の膨張も有限条件と捉えられるから、真の絶対零度には到達できない（宇宙の背景放射のスペクトル温度は約3K）。それでも、絶対零度の存在 ($T = 0$) をイメージしそのような条件の熱力学関数からなる式を用意して、絶対零度の学術世界の広がりを探求する行為は大変有益である。

同様の考え方は、粒子減数の進んだ系に現れる熱力学的極限世界 (Fig. 6 および Fig. 9 参照) [1] にも適用できる。なお、同じ極限世界でも数論的な世界と熱力学的な世界とでは、 $x-y$ 座標と $p-V$ 線図のそれぞれの軸が“数論に基づく数”で構成されているか“粒子数”を背景に成立しているかに依拠して、大いに特徴を違えていることに注意が払われなければならない (後述) [7]。



Fig. 6 Special equation of state to express the thermodynamic limit world in comparison with the stopped flying arrow in the time limit world.

極限点をイメージする行為は、日ごろ気が付かなくても日常生活の至るところで経験可能である。ふと目を上げて外の景色を見遣るか旅先で見た光景を頭の中で再現するとき、例えば Fig. 7(a) のような映像の中に消失点を自覚できたならば、それが極限点となる [8]。また、幾何学的には、円の外周は無数の極限点で構成され接線 (tangential line) を引く接点 (同図 (b)) が実在し、球の外表面も無数の極限点で構成されそこには接平面 (tangential plane) を結び付ける接点 (同図 (c)) が実在する。幾何学上の無数の極限点それ自体が対象 (物) を形づくることはないが、それぞれの接点に紐付いた無限小が‘それ’を可能にしている。

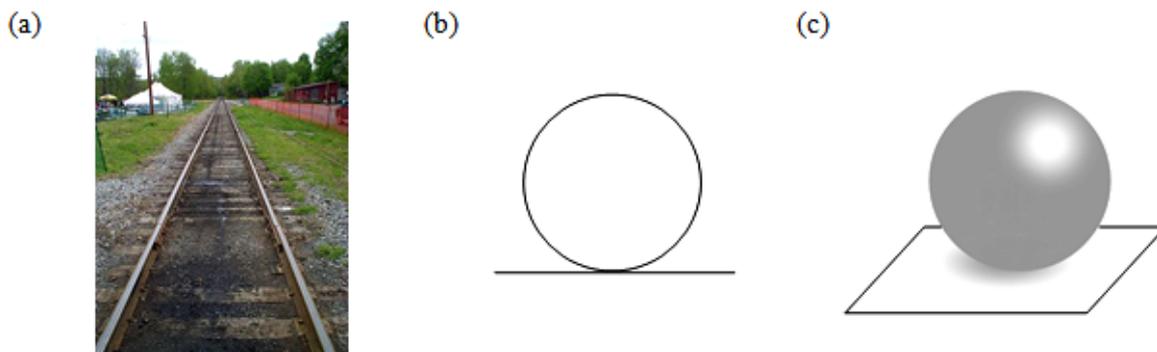


Fig. 7 Various limit points in a picture (a) or geometric figures (b) and (c).

<競技場> の場合の逆説は、ゼノンの本来の意図を離れば数理・自然科学的に見て「至って正当な逆説」である。実は、時間と空間に最小単位を想定すること自体に重大な誤りがあり、「“単位の更なる分割”を考えざるを得ない」との鋭い指摘は、『無限小 (infinitesimal) という数値概念はあっても最小値はない、すなわち、「無限操作」は継続されなければならない』といった現代数学に繋がる学術知見の存在を予見していたかのようである。数学的立場はその様であるが、自然科学的には不確定性原理 (Heisenberg uncertainty principle) が支配する量子世界が用意されているとともに、そこへと至る直前の熱力学世界では粒子数に依拠して数学とは異なる無限の扱い、すなわち“熱力学的無限小 (熱的最小単位 $TdS = (1/2)kT$) ” の概念を誕生させることとなる (後述) [1]。

5 数学的記述に基づく時間分割表現

本章では、これまでに解説した内容を、以下に取り上げる数学的記述で補強することを目指す。初項 a ($\neq 0$)、公比 r ($r < 1$) の無限等比級数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots \quad (3)$$

は収束し、その和 S_n は

$$S_n = \frac{a}{1-r} \quad (4)$$

と表される。ここで、 $a = 1$ 、 $r = 1/m$ ($m > 1$) とおけば

$$S_n = 1 + \frac{1}{m} + \left(\frac{1}{m}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{m}\right)^{n-1} + \dots = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{m}\right)} = \frac{m}{m-1} \quad (5)$$

を得る。この時点で、 m は“ある長さ”を分割する“数”と考えればよい。

さて、〈アキレスと亀〉を時間分割問題として捉え直す。アキレスと亀のそれぞれの移動特性は $\Delta L = Vt$ 、 $\Delta l = vt$ と表されるから

$$\frac{\Delta L}{\Delta l} = \frac{V}{v} = m \quad (6)$$

の分割数 m が得られると同時に、

$$t = \frac{\Delta L}{V} = \frac{\Delta l}{v}$$

$$t = t' \left[\frac{1}{m} + \left(\frac{1}{m}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{m}\right)^n + \dots \right] = t' \left(\frac{m}{m-1} - 1 \right) = t' \frac{1}{m-1} \quad (7)$$

といった時間分割の概要が得られる。そして、Eq. 7 より $t' = (m-1)t$ の関係を得て、時間分割の各フラグメントとその和の関係：

$$t = (m-1)t \left[\frac{1}{m} + \left(\frac{1}{m}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{m}\right)^n + \dots \right] \quad (8)$$

が得られる。すなわち、時間分割の単フラグメントは

$$(m-1)t \left(\frac{1}{m}\right)^n \quad (9)$$

のように表されることとなる。そして、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (m-1)t \left(\frac{1}{m}\right)^n = 0 \quad (10)$$

が、数学的表現としての「時間極限（時間の幅はゼロ）への到達」を表している。すなわち、それはゼノン本来の「不動とその世界」（例えば、Fig. 3 参照）である。この内容の、数学的表現以外の如何なる記述も“イメージ世界の表現”とならざるを得ない。

ここで、今更ながらに、 t の 2 つの“時点”間の長さとは、「最初に設定した時間」のことである。この設定時間 t は有限であって、「この有限値を無限に分割した後に改めて数学的に足し合わせれば“元の有限の設定時間に戻る”」という表現形式が、Eq. 8 の中に明示されている。

ゼノンのパラドックスのうち、分割数 m で時間分割した表現形式が実は本来の「アキレスと亀」であり、Fig. 2 はそれを 2 分割 ($m = 2$) 問題として限定的に表現した場合である。Fig. 1(a)(b) で 2 種類に表現された「二分分割」も、記述形式は異なるが $m = 2$ の場合の 2 分割表現形式と同じである。

ところで、Eq. 2 ($t = t_{\text{cross}} \cdot t_{\text{ratio}}$) と Eq. 8 の別表現 ($t = (m - 1)t \cdot t_{\text{ratio}}$) を比較してみよう。この比較より、極限到達時間 $t_{\text{cross}}(\text{s})$ が t' を改め

$$t_{\text{cross}} = (m - 1)t$$

と表現可能なが分かる。2 分割 ($m = 2$) の場合の極限到達時間 $t_{\text{cross}}(\text{s})$ は、実時間 $t(\text{s})$ に等しい。さて、いよいよ以下に示す条件：

分割数 m :	$m = 1.0001 \sim 100$ (m 分割)
フラグメント化のための分割回数 n :	$n = 1 \sim 500$ (n 回分割)
初期設定時間 t :	$t = 10 \text{ s}$

のもと、初期設定時間の 10s を対象にして、 m と n の 2 つのパラメータ (m 分割, n 回) による「時間分割フラグメント」がどのように変化するかを計算する。その結果を Fig. 8 および Table 1 に示す。

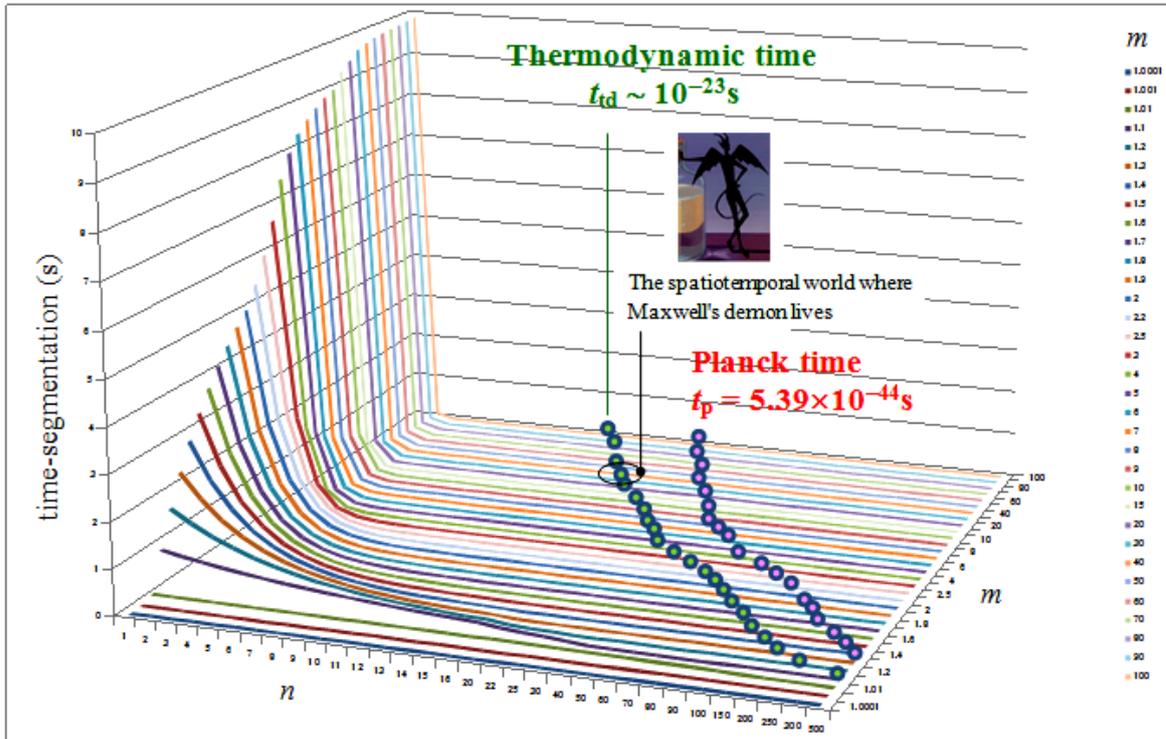


Fig. 8 Zeno's time-segmentation and the relation with the newly-defined thermodynamic time.

Eq. 8 の主張の別表現が

$$\sum_{n=1}^{\infty} (m - 1)t \left(\frac{1}{m} \right)^n = t \quad (11)$$

であるから、「この設定時間 t (Eq. 8 左辺) は有限であって、この有限値を無限に分割した後改めて数学的に足し合わせれば「元の有限の設定時間に戻る」との既出表現を、集計時間 t (Eq. 11 右辺) の計算結果 (Table 1 の sum) としてチェックすることができる (ただし、 n 値飛ばしによる不完全集計と計算機側に計算打ち止め設定があることに注意)。

時間分割の単フラグメント (Eq. 9) がどのように (m, n) 分布しているかは、Fig. 8 を通じて確認できる。時間分割の単フラグメント (Eq. 9) の大きさを、自然科学的に意味のある最小の時間単位として認識される Planck 時間 ($t_p = 5.391 \times 10^{-44}\text{s}$)² と大小比較する行為は学術的に有益である。Planck 時間よりも小さく分割された時間フラグメントは、量子世界で不確定性原理に基づき観測不能になると同時に、マクロ視点における時間概念を完全に失っていると言える。

6 時間分割と熱力学との関係

前章の Planck 時間と同様に考察することのできる、本稿が数値化に向けて定義する「熱力学時間 (熱力学的な時間の最小単位)³」を紹介する。

粒子減数が織り成す熱力学的極限の世界 [$(pV/TS - 1) \rightarrow 0$ ないしは $(1 - TS/pV) \rightarrow 0$] が粒子数 $N = 5 \sim 6$ の近傍にあること (Fig. 9 参照) を、著者は既報『熱力学は数学的 (Thermodynamics is mathematical)』の中で指摘した [1]。その折に著者は、それ以下の粒子数 $N = 1 \sim 5$ が熱力学世界の成立以前ではあるが、“熱力学的無限小の幅を有する等温線システム”の構築に向けて大切な役割 (Table 2 参照) を担っていることを認識した [7,9]。ちなみに Fig. 9 は、熱力学的極限世界「 $pV = ST$ 」の条件と Bose 統計を加味して統計熱力学的に解析した結果である。研究対象が古典粒子でありながら粒子が少数過ぎて、多重度関数を採用することができなかったことを、ここに付記しておく。

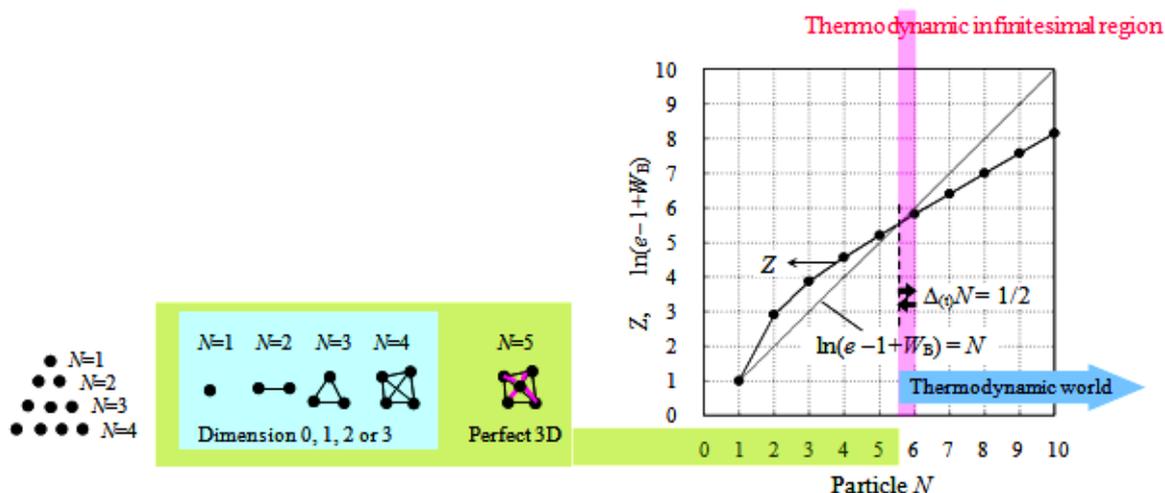


Fig. 9 A few particle numbers in a system and their role to make up the dimension.

Table 2 に記した内容の考察を、著者は熱力学研究に本腰を入れ出した 2012 年頃から始めたが、それよりもずっと以前に『数と次元の関係』を真正面から考察した人たちがいた [10]。その人たちは古代ギリシャのピュタゴラス派に属し、彼らは「10」を非常に神聖な数字として取り扱った。その理由として、彼らは両手の“指の数”といった表面的な発想にではなく、「 $N = 1 \sim 4$ の整数がそれぞれの次元と結び付き、それが組み合わさって成す神秘的な三角数 (ピラミッド形状)」に神聖なる価値を見出したとの指摘を挙げることができる。

²Planck 時間は、プランク単位系の中で時間について定義された物理的意味を持ち得る最小の時間単位である。それは、ビッグバンのプランク時代に関係して、プランク長と真空中の光速により一意に決定できる。

³熱力学的時間という用語が、かつてイリヤ・プリゴジン (Ilya Prigogine) やホーキング (S. W. Hawking) により、エントロピー時間とほぼ同義で使用された経緯がある。類似用語としての識別詳細調査が待たれるところであるが、本稿が取り上げた「熱力学時間」なる用語の‘数値による定義化’は、今回が初めてではなかろうか。

Table 2 A few particle numbers in a system and their role to make up the dimension.

粒子数	次元数	コメント
$N = 1$	0	自らが走っている感覚の“風”を顔に受けることもなければ、直線スピードの増減感覚や2次元カーブを曲がる「運動量変化」を認識することもない。ひたすら、自らの存在をも自覚できない無次元世界に留まるのみ。
$N = 2$	1	相手粒子を見遣る視“線”とその線上で相対する距離感覚があるのみ。
$N = 3$	1~2	他の2粒子に対して視線をスキャン移動させる“面”感覚があるのみ。相対位置関係によっては1次元になる場合もあり得る。
$N = 4$	2~3	基本的に3次元であるが、それは四面体構造を取った場合である。相対位置関係によっては2次元になる場合もあり得る。
$N = 5$	3	支柱を得た四面体として確実に立体を形作る。この段階で初めて、熱力学的な圧力 p と容積 V の“源（基礎）”が完成間近になったと観る。

Table 2 に記したこのような考察は、熱力学が粒子数に特徴付けられて

- 熱力学的な極限は、数学的な数論に基づく極限とは明らかに異なる
- 熱力学的な無限小は、熱量の最小単位に関連付けられ、ある程度の大きさを有する
- $N = 5 \sim 6$ 以上の粒子数が熱力学的空間を確保して、圧力 p と容積 V 、それに温度 T 概念を確実にする

といった知見へと導く。

p - V 線図内で固定された動作点は、状態量として「時間変化がない」といった形式で時間とは無縁である。そして、その動作点が動くときに「時間概念」が顕在化する。そのために、「 p - V 線図上で移動する動作点の、時間の長さを決定する熱力学的な時間の最小単位（熱力学時間）はどの程度か」を見極めることが必要となる。上述した知見のうちの3点目の指摘は、Planck 時間の扱いと同様に“熱力学時間 (thermodynamic time)” を決定できる必然性を示唆している。

すなわち、 p - V 線図の両軸（圧力 p と容積 V ）はある程度に粒子数が確保されて初めて実効を成すし、そうであるから逆に、 p - V 線図内で生じさせた時間概念を“粒子減数を伴って失効させる条件”が存在することも理解できる。その条件を利用して決定することのできる熱力学時間は、例えば基準時間を 1s とし、熱力学的に必要な最小の粒子数を $N_{\min} = 5.5 \sim 6$ と与え、それを“時間概念を保つことのできる最小限界のモル数”に相当させるために Avogadro 数 $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ を採用して、仮にも

$$t_{td} \equiv 1(\text{s}) \cdot N_{\min}/N_A \sim 10^{-23}\text{s} \quad (12)$$

と与えられる。

Planck 時間 ($t_p = 5.391 \times 10^{-44}\text{s}$) の場合と同様に、時間分割の単フラグメント (Eq. 9) をこの熱力学時間 ($t_{td} \sim 10^{-23}\text{s}$) と大小比較することは、学術的に有用である。すなわち、この熱力学時間よりも小さく分割された時間フラグメントは、熱力学から時間概念を潜在化し、熱力学・準静的過程の可逆動作とは無縁の「数学操作のみ」を機能させることを主張する（この条件での p - V 線図の存在は難しい）。そして、時間分割フラグメントが熱力学時間と一致するとき、数学操作的可逆性をぎりぎり残した「自然科学的可逆動作（第1報の Eq.25 周辺）」の概念が生まれ、熱力学・準静的過程の本質が顕わとなる。さらに、この熱力学時間の別の視点について、著者は、思考実験の中でのみ存在することのできる“マクスウェルの悪魔 (Fig. 8 参照)” が、いろいろの役回りでこの時空間に棲んでいると考えている [11,12]。

その点を詳述する。物理法則が時間反転に対して不変であることを可逆性原理と称するが [13]、本稿はその“時間反転”による説明には拠らずに、粒子減数による時間概念の変質（マクロ熱力学的な時間概念は排され数学操作を伴わせて可逆性は表現される）という立場をとった。逆の立場で“時間反転”を含め

て時間概念を系の中に認めるとき、その理論は新たに生じるゼノンの逆説課題に対処しながら、Planckを含む熱力学研究者がかつて指摘した“厳密な可逆条件”に応える内容でなければならない⁴ [14]。

数学的にみた極限点の存在認識は任意である（任意に数学的条件を整えてあげれば良い）が、熱力学的に見た“粒子減数による極限の存在”は任意とはいかない自然科学的根拠〔 $\lim_{N \rightarrow 5.5} (pV/TS - 1) = 0$ あるいは $\lim_{N \rightarrow 5.5} (1 - TS/pV) = 0$ 〕を有して、“熱力学的無限小の幅を有する等温線システム”といった唯一の存在イメージを明確にしている。また本稿は、そうした粒子減数が p - V 線図内で移動する動作点の時間概念の存立可否にも影響することを指摘した⁵。そのような認識の中で、熱力学系で最小となる時間概念が“ゼノンの時間分割による単フラグメント”と比較参照された (Fig. 8 と Table 1)。

微視的現象に対して無条件で成り立つ可逆性原理は微視的可逆性原理と呼ばれるが、『微視的可逆性原理からマクロ現象における不可逆性が説明できるか否かは、不可逆性問題または不可逆性逆理と呼ばれる、自然科学上の未解決問題である』との指摘がある [15]。本稿および前報は、その「微視的可逆性原理とマクロ不可逆性問題との違い」が“熱力学的無限小の幅を有する等温線システム”の内外、すなわち、全微分条件の成立・不成立に関係した数学的条件に起因していることを力説した⁵ [1]。

最後に、著者は、微視的可逆性原理の中の“時間反転”のことを、その微視的システム内だけで機能する極めて特殊な概念（マクロ世界のものとは明らかに異なる概念）であると理解すると同時に、それは「数学操作の一表現ではないか」との見方を強めていることを付記しておく。

7 おわりに

全微分条件を明示し、その数学表現能力を頼りに熱力学理論の再構築を目指した前回の著者寄稿は、準静的過程の可逆動作を数学操作によって記述することの正当性を主張する一方、時間反転の概念を基本とする可逆性原理については一切触れなかった。そのため、本稿では、時間概念の取り扱いに関する解析を進め、“4つのゼノンのパラドックス”の逆説解消に向けた取り組みを紹介した。その過程で、数学操作と時間反転操作の同一性・非同値性の視点に注目し、議論を深める立場をとった。

時間分割に着目する考え方は、ゼノンのパラドックスの問題解決に役立つだけでなく、実際に熱力学研究にも役立つことが紹介された。そして、“熱力学時間”と名付けるに相応しい新たな数値概念を創出することに成功した。このような考察経緯を踏まえて、時間反転が数学操作の一表現である可能性を示唆した。

参考文献

- [1] 明星 稔, 国際数理科学協会会報, No.97, 2016. <http://www.jams.or.jp/kaiho/kaiho-97.pdf>
- [2] アリストテレス, 「自然学」第6巻第2章, 第3章, 第5章, 第9章, および第8巻第8章. (出典: 植村恒一郎, 2004. http://greek-philosophy.org/ja/files/2004/03/2004_3.pdf)
- [3] 山田哲也, ネット情報, 2008. http://www7a.biglobe.ne.jp/~mochi_space/ancient_philosophy/vorsokratiker/zeno.html
- [4] 足立恒雄, 「無限のパラドックス」, 講談社 (ブルーバックス), 2000.

⁴準静的過程の可逆性を時間反転の概念を入れて説明する場合は、その系は正・負2方向の時間概念を有することになる。そのような準静的過程を、ゼノンのパラドックス<二分割>問題に置き換え考察することが許されると仮定すれば、正時間の流れに対して「いつまで経っても走り出せないランナー」とか「いつまで経っても的を射ることのできない矢」の問題に真正面から向き合わなければならない。そのため、準静的過程とゼノンのパラドックス<二分割>問題とが、どの程度に同じ概念を共有しているか否かについて、精査・再確認の必要がある。

⁵ p - V 線図内等温線の“無限小幅”の内外で時間概念は有無に分かれ、“内”で時間概念は潜在化しエントロピーは補償され（エントロピーのサイクル収支はゼロとなって）可逆過程が成立し、“外”では時間概念の顕在化に伴いエントロピーは補償されずに増大することになる。

- [5] Wikipedia 「Zeno's paradoxes」 (最終更新 2016.3.19) https://en.wikipedia.org/wiki/Zeno's_paradoxes
- [6] Drexel University, 「Math Forum : Zeno's Paradox」, 1994-2016. <http://mathforum.org/isaac/problems/zeno1.html>
- [7] M.Myojo, 15th International Symposium on the Science and Technology of Lighting (LS15), Kyoto Univ., 2016.
- [8] Wikipedia 「遠近法」 (最終更新 2015.10.17) . <https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%81%A0%E8%BF%91%E6%B3%95>
- [9] 明星 稔, カルノー準静的過程に始まる熱力学再考, 第 30 回光源物性とその応用研究会資料 (照明学会), (2015), 1-6.
- [10] アミール R. アクゼル (青木薫訳), 「無限に魅入られた天才数学者たち」, 早川書房, 2002.
- [11] 都筑卓司, 「新装版 マックスウェルの悪魔—確率から物理学へ」, 講談社 (ブルーバックス), 2002.
- [12] 田崎晴明, 日本物理学会誌, 66(3), (2011),172-173. <https://ci.nii.ac.jp/naid/110008593008>
- [13] 玉虫文一・他編, 「岩波理化学辞典 (第 3 版)」, 岩波書店, 1971.
- [14] M. Planck, “Thermodynamik (8th Ed.)”, Walter De Gruyter & Co., 1927.
- [15] Wikipedia 「時間」 (最終更新 2016.3.19) . <https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%99%82%E9%96%93>

※ Fig.1(a) の描画の出典は文献 [6] である。Fig.1(b) の描画の出典は文献 [5] である。Fig.7(a) の写真の出典は文献 [8] である。Fig.8 に記載の描画の出典は文献 [11] である。この寄稿で採用した、それらと自筆描画を除く全ての描画は、MS-Office のクリップアートに拠った (それらの出典元は不明)。この場をお借りして謝意をお伝えします。

テーブルを持つ施設における到着集団の テーブルへの最適な割当方法とその問題

小笠原悠 (弘前大学大学院 理工学研究科)

0. 自己紹介

私は筑波大学大学院システム情報工学研究科を修了後、株式会社日立製作所に入社し金融システム開発に携わっていました。その後日立製作所を退職して弘前大学大学院理工学研究科に入学。現在は Revenue Management の研究を行っています。都市と地方でのホスピタリティ産業における業務内の意思決定の差異などに興味があり、Revenue Management と CRM やサービス工学との理論的統合から新たな価値を創出するマネジメントシステムの実現を目標としています。

1 はじめに

簡単にですが、私の行っている研究を紹介します。ある飲食店に入店した際に、もしそれがランチタイムなどの混雑する時間帯であれば店員に席を指定されるが、混雑しない時間帯であれば自由に席を選ぶことが出来る、ということは多くの方が経験したことがあるかと思います。直感的に、それは混雑する時間帯に発生する機会損失を回避するための店側の意思決定である、というように理解できます。このような、固定された資源に対する不確実な消費リクエストを処理するような業種を対象としたマネジメントが Revenue Management(RM) [1] です。RM の応用対象としては主に航空業界やホテル業界が有名で既に広く実用化されており、我々にとって身近な所では「早割」などの名前が付く商品の最適な予約受け入れ人数や最適な価格の算出などで使用されています。近年では更に先に挙げた飲食店に加えて、スタジアム、カジノ、フェリーなどの業種が新たな応用先として研究されています [2]。

私はその中でも特に、飲食店やスタジアムなどに向けた、予約に対する最適な意思決定に関して研究しています。ここでは最初に挙げた飲食店を対象とした最適な顧客の割り当て問題を簡単に紹介します。

2 モデル

解析をやすくするために幾つかの前提条件を与えます。それは 1) 飲食店にある最大のテーブルサイズより大きい集団は到着しないものとする、2) 集団とテーブルは分割・結合出来ないものとする、3) 飲食店が開いている時間は有限とする、4) 集団は時間と集団サイズに依存した非定常ポアソン分布に従って到着する、5) 集団は、時間と集団サイズに依存した指数分布に従って退出する、というものです。モデル化においては時間は $n = 1, \dots, N$ に離散化して、到着、もしくは退出の発生が各 n で高々1回しか起こらないとしています。時間は N から 0 に進み、 0 は閉店時間を表しているものとします。これらの前提条件の下で、飲食店は到着した顧客に対して、その顧客の入店を受け入れるのか断るのかを決定します。もし受け入れるのであれば、どの空いている席にその集団を割り当てるのかを決定します。これらの決定を行うことで、飲食店は開店時間を通して得られる期待利益の最大化を目指します。このとき最大期待利益は以下の式で表すことが出来ます。 $U_n(X)$ は時間 n で、飲食店のテーブルが埋まっている状態 $X \in X_n$ が与えられた時に、閉店までに飲食店が得られる最大期待利益です。 X_n は時間 n での状態空間を表しています。

$$\begin{aligned}
 U_n(X) = \sum_{p \in P} \lambda_p^n \left\{ \left(r_p^n - \min_{i \in I_p} \Delta_p^i U_{n-1}(X) \right)^+ + U_{n-1}(X) \right\} + \sum_{p \in P} \sum_{i \in I_p} x_p^i q_p^n U_{n-1}(X - \mathbf{e}_p^i) \\
 + \left(1 - \sum_{p \in P} \lambda_p^n - \sum_{p \in P} \sum_{i \in I_p} x_p^i q_p^n \right) U_{n-1}(X), \tag{1}
 \end{aligned}$$

$$X \in X_n, n = N, \dots, 1$$

ここで、 P は到着する集団の集合、 I は飲食店のサイズの異なるテーブルの種類集合、 I_p は集団 p が座ることの出来るテーブルの集合、 r_p^n は時間 n で集団 p から得られる利益を表します。加えて、 λ_p^n は時間 n での集団 p の到着率、 q_p^n は時間 n での集団 p の退出率を表します。 $\Delta_p^i U_n(X)$ は時間 n でのテーブル i に座る集団 p の機会費用を表しています。また、境界条件は $U_n(X) = -\infty, X \notin X_n, U_0(X) = 0, X \in X_0$ で与えます。

この最大期待利益を得るための最適政策は以下で与えられます。

最適政策: 時間 n で状態 X の時、集団 p に対する最適政策は $r_p^n - \min_{i \in I_p} \Delta_p^i U_{n-1}(X) \geq 0$ ならば、集団 p をテーブル $\arg \min_{i \in I_p} \Delta_p^i U_{n-1}(X)$ に受け入れ、 $r_p^n - \min_{i \in I_p} \Delta_p^i U_{n-1}(X) < 0$ ならば、集団 p の受け入れを断る。

つまり、全ての時間 n と状態 X に対する最大期待利益 $U_n(X)$ を計算し、その計算の際に得られる上記の最適政策を適用すれば、前提条件の下での飲食店は利益の最大化を実現することが出来るということになります。ここで冒頭の話思い出して下さい。我々が繁盛している店舗に入った際に店員に案内される時のテーブルは小さなものではないでしょうか？実際にこのモデルにおいては、このような店員の行動は最適であることがわかっています。

補題 1. ある集団 p が到着した時に、もし p を受け入れることが最適政策になるのであれば、最適な割り当てるテーブルは p が座ることのできる最も小さいテーブルになる。

この補題は我々の直観を保証するだけではなく、最適政策の計算を多少楽にしてくれます。加えてこの補題 1 は、もし、店内の人数が増えれば増えるほど店への到着率が下がるようにモデルを拡張した場合においても成り立つことがわかっています。

3 数値例

実際に例を与えて最適政策を計算してみます。2 人掛けテーブル 6 つ、4 人掛けテーブル 7 つとして、そこに 1 人から 4 人の集団が 1 回のピーク時間を持って到着する飲食店を考えます。ここで時間は $N = 100$ とし、集団の到着率と退出率、及び利益は時間 40-60 をピークとする単峰の形にしています。つまり、お昼時などで顧客の回転率が高くなるランチタイムのような時間があり、それ以外は回転率の低いカフェのようにサービスを提供している席数 40 のファーストフード店のような店舗を想定しています。また、利益は集団のサイズで線形に大きくなるとしています。状態空間が大きいので、ここでは 2 人掛けテーブルが 1 人が 2 組、2 人が 2 組で計 4 つ埋まり、4 人テーブルが 1 人が 1 組、3 人が 1 組、4 人が 1 組で計 3 つ埋まっている状態での 1 人から 4 人の集団に対する最適政策のみ載せます。その最適政策を抜粋した表が表 1 です。表中の p は集団の人数、 d は受け入れを断ることを表しています。また、 $2 + 4$ はどちらのテーブルでも構わないことを示しています。この表 1 を見ると、利益の低い小さな集団になるほど集団に対して厳しく、また、ピークを控えた時間は厳しく、ピーク時間を過ぎて閉店時間に近づくほど集団に対して優しくなる割り当て方になっており、我々の直観に従うような結果になっていることがわかります。

表 1: 時間 n の集団 p に対しての最適な割り当てテーブルのサイズ

$p \setminus n$	100	99	98	...	62	61	60	59	58	57	...	7	6	5	4	3	2	1
1	d	d	d	...	d	d	d	2	2	2	...	2	2	2	2+4	2+4	2+4	2+4
2	2	2	2	...	2	2	2	2	2	2	...	2	2	2	2+4	2+4	2+4	2+4
3	4	4	4	...	4	4	4	4	4	4	...	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	...	4	4	4	4	4	4	...	4	4	4	4	4	4	4

4 最後に

この飲食店に対する RM は特に Restaurant Revenue Management(RRM)[4] と呼ばれ、その中でも 集団の最適振り分け問題は最近では Party Mix Problem(PMP)[5] と呼ばれます。しかし、既存の PMP に関するモデルは近似計算による解の算出に注目したものが中心でした [4][5]。このモデルは前提条件によって問題を単純化することで、最適解の構造への理解を助けることで意味があります。しかし、実際に現実世界と照らし合わせると様々な問題があります。1 つは集団の退出の無記憶性です。飲食店における集団の滞在時間は RRM では meal duration などと呼ばれ、回転率から全体利益に直結するため重要視されています [9][8]。しかし、その滞在時間への影響分析や、その時間の統計量は報告されていませんが [7][10]、その分布の形に注目した研究は私の知る限りありません。よって、集団の退出を指数分布としたときに、テーブルのある施設を持つ様々な業態に対して、モデルがどれほど説明力を持つのかは未知数になります。もう 1 つの問題は補題 1 です。補題 1 の結果を厳密に適用している飲食店は我々の周りにどれほどあるのでしょうか。集団を少し余裕のある席に割り当てる事実上のアップグレードを行っている店舗もしくは店員は、もっと多くの情報から判断してアップグレードを行っているかもしれません。実際にこのような現場の判断と剥離した“部分最適化”の問題は近年報告されております [3]。更に、顧客が店舗の決定に対して行動を変えろということを含んだ RM のモデルによる数値実験から、常連客を増やすような長期的利益を目指す方がより高い利益を得ることが報告されており [12]、このような CRM と RM との理論的統合は近年の RM の課題とされています [3]。

私は今後、博士号取得後は現実社会に応用可能なシステムの実現に向けて、RM とそれに関連した研究を大学で続けていきたいと思っております。また、国際数理学協会では編集委員の田畑吉雄先生、前代表理事の寺岡義伸先生、現代表理事の植松康祐先生、その他隣接する研究分野の先生方が国際数理学協会に多数在籍されているとの事ですので、機会があれば実際にお会いして他の会員の先生方との交流を深めたいと思います。

謝辞

今回紹介した本研究では金正道先生と石井博昭先生に多くのご指摘、及び助言を頂きました。ここに深い感謝を申し上げます。

参考文献

- [1] K. T. Talluri, G. J. Van Ryzin: The theory and practice of revenue management(Springer, 2004).
- [2] Chiang. W.C., Chen, J. C. and Xu, X.: An overview of research on revenue management: Current issues and future research. International Journal of Revenue Management, **1**(2007), 97–128.
- [3] Wang, Xuan Lorna, et al.: Revenue Management: Progress, Challenges, and Research Prospects. Journal of Travel & Tourism Marketing, **32**(7)(2015), 797–811.
- [4] D. Bertsimas and R. Shioda: Restaurant Revenue Management. Operations Research, **51**(2003), 472–486.
- [5] F. Guerriero, G. Miglionico and F. Olivito: Strategic and operational decisions in restaurant revenue management. European Journal of Operational Research, **237**(2014), 1119–1132.
- [6] C. Steinhardt and J. G'onsch: Integrated revenue management approaches for capacity control with planned upgrades. European Journal of Operational Research, **223**(2012), 380–391.
- [7] Kimes Sheryl E. and Stephani KA Robson: The impact of restaurant table characteristics on meal duration and spending. Cornell Hotel and Restaurant Administration Quarterly, **45**(4)(2004), 333–346.
- [8] Kimes Sheryl E., Jochen Wirtz, and Breffni M. Noone: How long should dinner take? Measuring expected meal duration for restaurant revenue management. Journal of Revenue and Pricing Management, **1**(3)(2002), 220–233.
- [9] Thompson Gary M.: (Mythical) revenue bene

- ts of reducing dining duration in restaurants. *Cornell Hospitality Quarterly*, **50**(1)(2009), 96–112.
- [10] Bell Rick and Patricia L. Pliner: Time to eat: the relationship between the number of people eating and meal duration in three lunch settings. *Appetite*, **41**(2)(2003), 215–218.
- [11] Y. Ogasawara: A condition for reducing expansive variations of optimal policy in restaurant revenue management. *Scientiae Mathematicae Japonicae*(in press)
- [12] Klein, R. and Kolb, J.: Maximizing customer equity subject to capacity constraints. *Omega*, **55**(2015), 111–125.

小笠原悠

弘前大学大学院理工学研究科 安全システム工学専攻

〒 036-8561 弘前市文京町 3 番地