一般社団法人

国際数理科学協会会報

No.90/2014.4

編集委員： 藤井淳一（委員長）

目次

代表理事就任の御挨拶

代表理事　植松康祐

この度、本協会の代表理事に就任することになります、大阪国際大学・植松康祐です。現在の代表理事・大阪府立大学名誉教授・寺岡義信先生と理事・大阪大学名誉教授・田畑吉雄先生からの推薦を受け、2014 年度より代表理事を務めさせて頂くことになりました。　国際数理科学協会との初めての関わりは、およそ 30 年前に学生会員として、論文を投稿した際に学生会員となったことでした。その後、大阪国際大学に教員として赴任した際に、私の指導教授で同じ職場での上司であった大阪大学名誉教授・大阪国際大学名誉教授・西田俊夫先生からの指名で、会計幹事としてお手伝いをすることから始まりました。その当時、代表理事であった石原忠重先生のご指導の下で会計を中心に、そして、現在のこの協会のシンボルとなっているマークなども作成致しました。その後、代表理事の長尾壽夫先生のご尽力で一般社団法人への登録の際に、設立時社員の一員に加えて頂き、その後、監事として現在に至っております。また、堺市・泉北ニュータウンに住んでいるので堺東の事務所にも近いこともあり、お手伝いすることのきっかけにもなりました。

私は、工学部出身で、確率論と確率過程論を学び、その応用として信頼性工学で学位を取得しました。その後は、OR を中心とした最適化問題を研究材料として研究を続けております。私事なことですが、現在、私の長男がアメリカの大学 4 年生で数学を専攻しており、大学院も数学科に進学する予定です。私自身が、数学を基礎から学んでいないことから、自分の息子には、数学を体系的に学ばせたく、教育大国であるアメリカへの留学を決意させました。アメリカでは、卒業論文は必修ではないのですが、研究の一端を知るためにも、論文を書くことを勧めました。ちょうどその時、2012 年ノーベル経済学賞を受賞した L.S.Shapley と A. E. Roth のゲーム理論の論文に興味を持ちました。今年度中に、その成果

を本協会に親子での共著論文として投稿できればと準備をしております。また、アメリカの大学教員にもこの学会組織を紹介して、論文の投稿をお願いしようと計画しております。

現在の国際数理科学協会は、昨年度まで10年以上赤字会計となっていますが、その赤字額が少しずつ改善されています。これまでの理事の先生方のご尽力によって存続が可能となっております。事務所の運営、会員数の減少、投稿論文の減少、研究会などの活動など、様々な問題を抱えておりますが、皆様のご協力を得ながら少しでも改善が出来ればと願っております。歴史と権威ある国際数理科学協会の代表理事を、若輩の私に努めることができるか不安で一杯ですが、これまでの代表理事を務めてこられた石原忠重先生、井関清志先生、長尾壽夫先生、寺岡義信先生の名を汚さないように頑張って参りますので、ご指導・ご協力の程よろしくお願い申し上げます。

2014年3月吉日

大阪国際大学・植松康祐

2014年度 年会のお願い

年会担当理事 熊谷悦生

２０１４年度開催予定の国際数理科学協会の年会ですが、8月下旬に開催し、会場は各分科会で設定することになっております。つきましては、分科会を開催される分科会代表の先生方は、2014年6月20日までに、新しい年会担当理事までご連絡下さい。その際、

１）分科会名及び代表者名等

２）2014年8月下旬の開催予定日

３）分科会の予定会場

４）プログラム（発表者および簡単な要旨）

を明記して、ご連絡頂ければ幸いです。よろしくお願い致します。

連絡先： 熊谷悦生（大阪大学基礎工）

kumagai@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

社員総会議事録

場所：大阪教育大　天王寺分校 3F307 号室
日時：平成 26 年 3 月 27 日（木）14 時 00 分から 15 時 30 分
議長：代表理事　寺岡義伸
出席者　（新代議員）：植松康祐、熊谷悦生、藤井淳一、菊田健作、北條仁志、宝崎隆祐、古澤仁、富永雅
（旧代議員）寺岡義伸、田畑吉雄、長尾壽夫、藤井正俊

委任状：高橋渉（委任：議長）、石井博昭（委任：植松康祐）、八木厚志（委任：寺岡義伸）、中井英一（委任：寺岡義伸）、河上哲（委任：議長）、渚勝（委任：寺岡義伸）、北廣男（委任：議長）、大内本夫（委任：議長）、服部泰直（委任：寺岡義伸）、三道弘明（委任：議長）、佐藤俊輔（委任：議長）、会沢成彦（委任：議長）、金正道（委任：議長）、地道正行（委任：議長）、和多田淳三（委任：議長）、鈴木武（委任：議長）、棚橋浩太郎（委任：議長）、曽布川拓也（委任：寺岡義伸）、壁谷喜継（委任：議長）、玉置健一郎（委任：議長）、西澤弘毅（委任：議長）、北原和明（委任：議長）

総社員数 30 名、出席者数 29 名（委任状を含む）29 名。総会は成立。

議題

1. 報告事項

（イ）平成 25 年度事業報告

・SCMJ 誌の発行については、投稿論文本数が回復し、Vol.76 は、3 冊の発行だった。２巻は、特集号だった。BIOCOMP2012(Vol.76-1) については、佐藤俊輔先生にお世話をいただいた。井関清志先生追悼号 (Vol.76-2) については、北原和明先生と服部泰直先生にお世話をいただいた。

・投稿本数回復に伴い、審査終了から雑誌掲載までの期間が長くなるので、審査終了論文については、従来のＨＰに随時掲載方式に戻した。（これは会員にも好評だった。）

・年次大会としては、次の３件が行われた。

(1)「統計的推測と統計ファイナンス」分科会研究集会

(2)「確率モデルと最適化」分科会研究集会

(3)「代数、論理、幾何と情報科学研究集会」分科会研究集会

・国際会議の後援としては、次の２件が行われた。

（1） The Eighth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analisis

（2） FIM2013(Forum for Interdisciplinary Mathematics 22nd FIM Int. Conference on Interdisciplinary Mathematics, Statistics and Computational Techniques)

尚、和多田淳三先生と石井博昭先生のお世話によりこの会議に伴う 15 編程度の論文をＳＭＪ誌に掲載予定。

・会報　今年度は、4 月、8 月、12 月の年三回発行に変更致しました（電子メールによる配布)。

・大阪教育大学からの協力校分担金（35 万円）の継続をいただきまして、心より感謝申し上げます。

・横幹連合理事を渚勝先生に依頼。
・当協会の名誉会員でおられた山縣秀雄先生が、昨年 12 月 16 日、永眠されました。
・当協会の名誉会員でおられる古田孝之先生が、叙勲の候補となっております。

（ロ）平成 25 年度会計報告
・経常的項目では、２百万円を超える赤字であるが、急激な円安及び米国債償還により協会純資産は増加した。
・物件費見直しを進め、電話・ネット・コピー機で月額３万円程度の削減が実現した。
・従来から問題となっていた外貨資産比率の圧縮を進め、外貨資産を全体の 18 %にまで低めた。

2. 審議事項

（イ）平成 25 年度事業計画
代表理事に関しまして、寺岡義伸先生が、二年の任期を全うされ、退任となった。
新代表理事には、寺岡義伸先生・田畑吉雄先生の推薦により、植松康祐先生（大阪国際大学）が、満場一致で承認の上、就任となった。
・代議員選挙を行い、従来より継続の方を含め、２９人の新代議員が選任された。（一名辞退者あり）
・　新代表理事の負担軽減及び移行円滑化のため、編集委員長については、暫くの間は寺岡義伸先生が引き続き行い、時期を見て、新代表理事である植松康祐先生が引き継ぐ。
・理事については、若返りをはかりつつも、個人的な能力・経験を協会に生かしていただく観点から、実際の運用で柔軟に対応してはどうか、年齢や登記上の定員に拘りすぎる必要はないのではないかとの意見が寄せられた。
・新たに設けられた顧問制度については、役割分担も含め、異論はなかった。
・過去の論文を容易に閲覧できるようにＰＤＦ化の希望が寄せられた。
・会員相互に知り合う機会が得られるような全体参加型の年会を計画してはどうかとの意見が寄せられた。
・会員人数確保と若返りのため、新規会員獲得活動の重要性が認識された。
・外国会員については、会費を継続して納めてもらえる仕組み作りの必要性が認識された。
・SCMJ 誌は、3 回発行予定。（Vol.77-1,2,3 の３冊分については、既に掲載原稿確保されている。）
・中長期的には、紙ベースの雑誌でなく、電子ジャーナルによる講読希望者の増加が予想されるとの意見がよせられた。
・長年協会事務で貢献いただいた大月文子氏が辞められ、以前に勤務経験のある尾形訓子氏が後任となった。

（ロ）平成 26 年度予算
・会費と雑誌購読料の値上げについては、26 年度以後の実施を検討中。
・堺東の事務所賃借料（年間 130 万円）が、割高であるため、移転先を探している。
・印刷費用も削減のため、他社も検討中。
・米国債売却の余裕資金約 700 万円は、積極的運用しないで様子をみることになった。

以下に財務諸表を掲載する（13 年度貸借対照表、および、13 年度決算予算表）：

2013年度　　　貸借対照表
(13/1/1-13/12/31)

(￥)会計

借方			貸方		
科　目	期　首	期　末	科　目	期　首	期　末
固定資産(保証金)	1,077,615	1,077,615	協会活動予備資金		
流動資産	1,250,538	914,993	出版基盤強化積立金	500,000	500,000
定期預金	0	0	TOTAL INDEX 積立金	500,000	414,993
			設備更新積立金	250,538	0
普通預金	1,250,538	914,993	IT機器積立金		
現金	0	0	事務所移転積立金	1,077,615	1,077,615
			事務機購入積立金	0	0
安全資産ファンド	0	6,864,970	減価償却積立金	0	0
			回転資金	0	0
			繰越金	0	6,864,970
合　計	2,328,153	8,857,578	合　計	2,328,153	8,857,578

外貨会計

借方			貸方		
科　目	期　首	期　末	科　目	期　首	期　末
固定資産			協会活動予備資金	$100,000.00	$55,812.33
流動資産			IT機器積立金	$48,286.00	$0.00
定期預金(★)	$1,069.65	$1,069.77	＄ー￥準備金		
普通預金(★)	$223,872.99	$54,742.56	繰越金	$124,942.64	$0.00
$国債2(★)	$48,286.00	$0.00	合　計　＄	$273,228.64	$55,812.33
合　計＄	$273,228.64	$55,812.33			
(ユーロ)(★)	€ 5,986.94	€ 60.00	(ユーロ)	€ 5,986.94	€ 60.00
￥マルチマネー	¥275,795	¥14,659,493	￥マルチマネー	¥275,795	¥14,659,493
￥普通預金	¥5,088	¥6,831	￥普通預金	¥5,088	¥6,831

数理科学推進基金会計

借方			貸方		
科目	期　首	期　末	科目	期　首	期　末
清水基金	1,000,000	1,000,000	ISMS受賞基金	1,000,000	1,000,000
功力基金	100,000	100,000	国際研究交流基金	1,737,510	1,737,510
石原	2,000,000	2,000,000	通信費	0	0
その他	539,080	538,580	交通費	0	0
			繰越金	901,570	901,070
合計	3,639,080	3,638,580	合計	3,639,080	3,638,580

★印は、為替相場変動リスクあり

＊　2013年度決算予算表
（2013年12/1/1−12/12/31）
収　入

科　　目	13年度実績	14年度予算	13年度予算
前年度繰越金	−		−
	−		
刊行物頒布代（書店）	518,400	580,000	600,000
刊行物頒布代（書店）海外＄より	1,038,035	800,000	600,000
会費	−		
機関会員　A（旧協力校）	−		
機関会員　B（交換誌）	318,000	318,000	318,000
	−		
賛助会員（機関会員）	431,475	470,000	700,000
正会員（国内）	458,000	460,000	500,000
	−		
海外書店郵送費（EBSCO)$より	−		
海外書店（カード払い）	−		
海外正会員（￥払い）	−		
海外正会員（＄→￥）	−		
ページチャージ（¥）	127,000	100,000	40,000
ページチャージ（＄→￥）	30,826	20,000	
単年度掲載費	−		
抜刷郵送代	−		−
設備更新積立金	−		
（イ）減価償却積立金取り崩し分	−		
（ロ）回転資金取り崩し分	−		
（ハ）事務機購入積立金取り崩し分	−		
預金利子	3,574		
（$→¥：調整項目）	774,969	1,952,000	577,000
雑収入(資本取引認定有）	2,052,699	−	1,500,000
合　　計	5,752,978	4,700,000	4,835,000

支　出

科　　目	13年度実績	14年度予算	13年度予算
通信交通輸送費(ｲ+ﾛ+ﾊ)	543,590	260,000	430,000
(ｲ)　編集通信交通費	142,780	80,000	250,000
(ﾛ)　査読通信費	−		
(ﾊ)　抜刷等輸送費	400,810	180,000	180,000
講演依頼料	−		
租税公課	1,200	20,000	20,000
印刷費	1,219,617	900,000	880,000
組版委託費	119,570	120,000	40,000
SE委託費	425,880	350,000	420,000
消耗品代	15,725	20,000	25,000
備品代（OA機器soft,本代）	310,297		70,000
人件費	1,534,570	1,500,000	1,300,000
借事務所代	1,294,465	1,300,000	1,330,000
電話代	151,806	120,000	200,000
振込料・手数料	36,258	10,000	10,000
備品補修費	−		
保険料	−		
税金	70,000	70,000	60,000
会費(学術団体）	30,000	30,000	50,000
コピー費	−		−
基礎財産へ繰入	−		
予備費等	−		
次年度回転資金	−		
次年度繰越金	−		
合　　計	5,752,978	4,700,000	4,835,000

＊寄稿

関数の凸性について

藤井 正俊, 富永 雅（大阪教育大学）

0. はじめに

ある区間 J 上の連続関数 $f(x)$ が凸であるとは、

$$f((1-t)x+ty) \le (1-t)f(x)+tf(y) \quad (x,y\in J;\ t\in[0,1])$$

が成り立つことである。視覚的には、勝手な $f(x)$ の割線がその割線に対応する区間では $f(x)$ のグラフより上になっている、ということである。凸関数の代表的な例には、二次曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ と二次関数 $y=x^2$ が挙げられるであろう。

この小論では、次のような話題を取り上げる：

1. 分数の和
2. Löwner-Heinz 不等式の精密化における $y=\dfrac{1}{x}$ の役割
3. $y=\dfrac{1}{x}$ と $y=x^2$ の作用素論的役割

1. 分数の和

無限和の収束・発散に関して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$ はよく用いられる例である。これを $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の凸性を利用して確かめてみたい。

$a>b>c>0$ で、$b=\frac{a+c}{2}$ とすると、$f(a)+f(c)\ge 2f(b)$ が得られるが、両辺に $f(b)$ を加えて、

$$f(a)+f(b)+f(c)\ge 3f(b).$$

これより、

$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}>\frac{3}{n}$$

が成り立つことがわかる。そこで、$n=3$ とすると、

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$$

が、実際に計算することなく得られる。これを基にすると、次がわかる：

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}&=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}\right)\\&>\frac{3}{6}+\frac{3}{9}+\frac{3}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1.\end{aligned}$$

続いて、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{38}+\frac{1}{39}+\frac{1}{40}>\frac{3}{15}+\cdots+\frac{3}{39}\\&=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}>\frac{3}{6}+\frac{3}{9}+\frac{3}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1.\end{aligned}$$

以下、帰納的に次の不等式が示せる：$p_1 = 2,\ p_n = 2 + 3 + \cdots + 3^{n-1},\ q_n = p_{n+1} - 1$ とおくと、

$$\sum_{k=p_n}^{q_n} \frac{1}{k} > \sum_{k=p_{n-1}}^{q_{n-1}} \frac{1}{k} > \cdots > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1.$$

従って、

$$\sum_{k=1}^{q_N} \frac{1}{k} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=p_n}^{q_n} \frac{1}{k} > 1 + N\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > N + 1$$

となり、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が発散することがわかる。

なお通常は

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) > 1 + \frac{n}{2}$$

のようにするか、あるいは、積分を用いて、

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} > \int_1^{N+1} \frac{1}{x}\ dx = \log\ (N+1)$$

とするのが普通だと思われる。

2. Löwner-Heinz 不等式の精密化における $y = \dfrac{1}{x}$ の役割

まず、エルミート行列 A のすべての固有値が非負のとき、$A \geq 0$ と書く。

$$A \geq 0 \iff \text{任意のベクトル x に対して } (Ax, x) \geq 0$$

が知られている。そして、これよりエルミート行列の間に順序が入る：

$$A \geq B \iff A - B \geq 0.$$

ここで、この順序について、行列の非可換性に関わって、次の重要な不等式がある。 [7] にスペクトルの可換性を使った巧妙な証明がある：

Löwner-Heinz 不等式 (LH). $A \geq B \geq 0$ ならば、$A^p \geq B^p$ $(p \in [0,1])$ が成り立つ。

なお、A^p は、A を対角化 $A = U^*DU$(D：対角行列、U：ユニタリ行列) した上で、$A^p = U^*D^pU$ によって定義される。また、$p > 1$ に対しては、(LH) は成立しない。実際には、$p = 2$ に対して、次の反例があることよりわかる：

反例. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると、$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \geq 0.$

一方、$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \ngeq 0.$

さて、$A \geq B$ よりも強い順序関係として、$A > B$ が考えられる。それは $A - B \geq \epsilon I > 0$ となる正数 ϵ が存在することによって定義される。この下で、次の精密化が最近イランの数学者により示された [5]：

Theorem MN (Moslehian-Najafi). $A > B \geq 0$ ならば、$0 < r \leq 1$ に対して、

$$A^r - B^r \geq \|A\|^r - (\|A\| - m)^r > 0.$$

ただし、 $m = \|(A-B)^{-1}\|^{-1}$ を $A - B$ の最小固有値とする。

ここで Theorem MN の拠り所となっている補題を表出する：

Lemma MN. $A > B > 0$ ならば、 $m = \|(A-B)^{-1}\|^{-1}$ とおくとき、

$$B^{-1} - A^{-1} \geq \frac{1}{\|A\| - m} - \frac{1}{\|A\|}.$$

ここで、$A - B \geq m$ であることより、 $A \geq B + m$ なので

$$\|A\| \geq \|B\| + m.$$

なお、 $m = \|(A-B)^{-1}\|^{-1} = \max\{c \geq 0\ ;\ A - B \geq c\}$ であることに注意しておく。

さて、そうすると、狙いはこの補題の改良ということになる。ここが本節の要点である。

Improved lemma. $A > B > 0$ ならば、

$$B^{-1} - A^{-1} \geq \frac{1}{\|B\| + m} - \frac{1}{\|B\|} = \frac{m}{\|B + m\|\|B\|}.$$

さて、この lemma が我々の希望通りのものであるのか？　答えは肯定的である：

Theorem 1. $A > B \geq 0$ ならば、$0 < r \leq 1$ に対して、

$$A^r - B^r \geq (\|B\| + m)^r - \|B\|^r > 0.$$

ただし、 $m = \|(A-B)^{-1}\|^{-1}$ とする。

証明は、x^r に対する積分表示を使ってなされる：

$$\begin{aligned}
A^r - B^r &= \frac{\sin(r\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{r-1} \left(\frac{A}{\lambda + A} - \frac{B}{\lambda + B} \right) d\lambda \\
&= \frac{\sin(r\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{r} \left(\frac{1}{\lambda + B} - \frac{1}{\lambda + A} \right) d\lambda \\
&\geq \frac{\sin(r\pi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{m\lambda^r}{(\lambda + \|B\| + m)(\lambda + \|B\|)} d\lambda \\
&= \frac{\sin(r\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{r-1} \left(\frac{\|B\| + m}{\lambda + \|B\| + m} - \frac{\|B\|}{\lambda + \|B\|} \right) d\lambda \\
&= (\|B\| + m)^r - \|B\|^r.
\end{aligned}$$

次の段階は、Improved lemma が正しいかどうかであるが、次のように簡単に証明できる：
Improved lemma の証明.

$$B^{-1} - A^{-1} \geq B^{-1} - (B+m)^{-1} = mB^{-1}(B+m)^{-1} \geq \frac{m}{\|B\|(\|B\| + m)}.$$

Improved lemma は、Theorem MN を改良するに止まらず、より一般的な状況で活用できる, cf. [3], [8]：

Theorem 2. $A > B \geq 0$ ならば、 $[0, \infty)$ 上で定義された作用素単調関数 f に対して、

$$f(A) - f(B) \geq f(\|B\| + m) - f(\|B\|) > 0$$

が成り立つ。ただし、$m = \|(A - B)^{-1}\|^{-1}$ である。

まず、f は次のような積分表示をもつことが知られている：

$$f(t) = a + bt + \int_{-\infty}^{0} \frac{1 + ts}{s - t} dm(s) = a + bt + \int_{-\infty}^{0} \left(-s - \frac{1 + s^2}{t - s} \right) dm(s).$$

ただし、 $b \geq 0$ で $m(s)$ は正の測度である。ここで、例の如く Improved lemma を使うことにより、Theorem 2 は証明できる：

$$\begin{aligned} f(A) - f(B) &= b(A - B) + \int_{-\infty}^{0} (1 + s^2)((B - s)^{-1} - (A - s)^{-1}) dm(s) \\ &\geq bm + \int_{-\infty}^{0} (1 + s^2) \left(\frac{1}{\|B\| - s} - \frac{1}{\|B\| - s + m} \right) dm(s) \\ &= f(\|B\| + m) - f(\|B\|)(> 0). \end{aligned}$$

3. 凸関数

実は、我々は少し別の問題意識から、Moslehian 達と同じ方向を目指していた。本節では、我々の敷いたルートに沿って、前節の結果を積分表示を使うことなく初等的に証明する。そこで、まず凸関数の特徴付けを行う。ここでも分数（平均変化率）が役に立つ：

Lemma 3. f を $J = [a, b)$ $(b \in (a, +\infty])$ 上の実数値連続関数とするとき、f が凸関数（凹関数）であることと次が同値である：各 $0 < \epsilon < b - a$ に対して、 $D_\epsilon(t) = f(t + \epsilon) - f(t)$ が $[a, b - \epsilon)$ 上の単調増加関数 (単調減少関数) である。

この補題は、直感的には殆ど明らかではあるが、例えば次のように確実に証明できる。

f が J で凸関数とする。$s, t \in J$ で $s < t, t + \epsilon \in J$ $(t - s < \epsilon)$ として、$y = L(t)$ を $(s, f(s))$ と $(s + \epsilon, f(s + \epsilon))$ を通る直線とすると、f の凸性から

$$L(t) \geq f(t), \quad L(t + \epsilon) \leq f(t + \epsilon)$$

が成り立ち、従って

$$\begin{aligned} D_\epsilon(t) &= f(t + \epsilon) - f(t) \\ &\geq L(t + \epsilon) - L(t) \\ &= L(s + \epsilon) - L(s) \quad \text{by the linearity of } L \\ &= f(s + \epsilon) - f(s) \\ &= D_\epsilon(s). \end{aligned}$$

逆に、$D_\epsilon(t)$ が増加関数として、$t,\ s \in J$ で $s < t = s + 2\epsilon$ とすると、$D_\epsilon(s) \le D_\epsilon(s+\epsilon)$ なので、

$$2f\left(\frac{s+t}{2}\right) = 2f(s+\epsilon) \le f(s+2\epsilon) + f(s) = f(t) + f(s).$$

すなわち、f が凸であることがわかる。

Corollary 4. f を閉区間 $[a, b+\delta]$ $(\delta > 0)$ 上で定義された単調増加な凹関数ならば、各 $0 < \epsilon \le \delta$ に対して $D_\epsilon(t) \ge D_\epsilon(b) > 0$ $(t \in [a,b])$ が成り立つ。

Lemma 5. f を区間 $[a,d)$ で定義された単調増加な凹関数とする。 $C \ge 0$ のスペクトルが $[a,d)$ に含まれているならば、各 $0 < \epsilon < d - \|C\|$ に対して、$f(C+\epsilon) \ge f(C) + D_\epsilon(\|C\|)$ が成り立つ。

まず、与えられた $0 < \epsilon < d - \|C\|$ に対して、$0 < c < d$ と $\epsilon < c - \|C\|$ をみたす $c > 0$ が取れることを注意する。そして、Corollary 4 を $b = \|C\|$ と $\delta = c - \|C\|$ に対して適用すると、

$$f(C+\epsilon) - f(C) \ge D_\epsilon(\|C\|)$$

が得られる。

ここまで来ると、Theorem 2 は目前である。

$A \ge B + m$ $(m = \|(A-B)^{-1}\|^{-1} > 0)$ であるので、f の作用素単調性より、

$$f(A) \ge f(B+m).$$

さらに、 Lemma 5 より、

$$f(B+m) \ge f(B) + D_m(\|B\|)$$

であるので、

$$f(A) - f(B) \ge D_m(\|B\|) = f(\|B\| + m) - f(\|B\|) > 0$$

となり、Theorem 2 が示せたことになる。

4. $y = \dfrac{1}{x}$ と $y = x^2$ の作用素論的役割

さて、行列 A が正定値 $A > 0$ であるとは、任意のベクトル $x \neq 0$ に対して、$(Ax, x) > 0$ がなりたつことであった。従って、関数 $y = \dfrac{1}{x}$ は、$(Ax,x)^{-1}$ と $(A^{-1}x, x)$ という 2 つの形で現れ方が可能になる。あるいは、(Ax,x) はそのままにすると、 $(A^{-1}x,x)^{-1}$ という形で現れる。これらがそれぞれ何者と思えるかであるが、簡単な例を紹介する：

Example. $x = {}^t(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ に対して、$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ とすると、

$$(Ax,x) = \frac{a+b}{2}, \qquad (A^{-1}x,x)^{-1} = \left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}.$$

すなわち、算術平均と調和平均が現れる。(ベクトル x を換えると重み付きのそれらが得られる。また、n 次元化すれば、n 変数のそれらが得られる。) そこで、少し飛躍すると、一般に、任意の単位ベクトル x $(\|x\| = 1)$ に対して

$$(A^{-1}x,x)^{-1} \le (Ax,x), \quad \text{i.e.,} \quad (A^{-1}x,x) \ge (Ax,x)^{-1}$$

が期待できる。

同様のことを $y=x^2$ で、$B=\begin{pmatrix}\sqrt{a} & 0\\ 0 & \sqrt{b}\end{pmatrix}=A^{\frac{1}{2}}$ に対して行うと、

$$(Bx,x)^2=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2,\quad (B^2x,x)=\frac{a+b}{2}$$

となるので、これを整理して比較すると、算術平均と幾何平均が現れ、ここでも一般に上と同様のことが期待できる：

$$(A^2x,x)\geq(Ax,x)^2.$$

実際にこれらの 2 つの不等式は同値であり、勿論成立する：まず、$(A^{-1}x,x)\geq(Ax,x)^{-1}$ を仮定して、任意の単位ベクトル x ($\|x\|=1$) に対して、$y=A^{\frac{1}{2}}x/\|A^{\frac{1}{2}}x\|$ とおくと、y は単位ベクトルで、$\|A^{\frac{1}{2}}x\|^2=(Ax,x)$ に注意すると、

$$\frac{1}{(Ax,x)}=\frac{\|x\|^2}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|^2}=(A^{-1}y,y)\geq(Ay,y)^{-1}=\left(\frac{(A^2x,x)}{(Ax,x)}\right)^{-1}=\frac{(Ax,x)}{(A^2x,x)}$$

となり、$(A^2x,x)\geq(Ax,x)^2$ が得られる。逆は今の逆、すなわち、任意の単位ベクトル x に対して $y=A^{-\frac{1}{2}}x/\|A^{-\frac{1}{2}}x\|$ とおいて、同じことをすればよい。なお、これらの成立は、Schwarz の不等式 $|(x,y)|\leq\|x\|\|y\|$ によって、保証される。実際、任意の単位ベクトル x に対して、

$$(A^2x,x)=\|Ax\|^2=(\|Ax\|\|x\|)^2\geq(Ax,x)^2$$

より、望みの不等式が得られる。

本節での議論した 2 つの凸関数に対する不等式は、纏めれば、

$$(f(A)x,x)\geq f((Ax,x))$$

というフォルムになる。この不等式は、A のスペクトルを含む区間で凸となる連続関数と任意の単位ベクトル x に対して成立する。古典的な Jensen の不等式

$$\sum_1^n t_i f(a_i)\geq f\left(\sum_1^n t_i a_i\right)\qquad\left(t_1,\cdots,t_n\geq 0;\ \sum_1^n t_i=1\right)$$

の内積を使った機能的な定式化と言える。 Jensen の不等式は、幾何的には、凸多角形 $\mathcal{K}$ の重心は $\mathcal{K}$ の中に存在すると言い換えることができる。

Jensen の不等式に関して、その典型的な応用は、エントロピー関数 $\eta(x)=-x\log x$ から定められるエントロピーについての Shannon の不等式の証明に対するものである。今年度の大学入試で某大学の問題としても出題されている：

Problem.

$y=\eta(x)$ $(x>0)$ 上の点 $P(t,\eta(t))$ における接線を $y=ax+b$ とする。

(1) a,b を t で表せ。

(2) $x>0$ に対して、$\eta(x)\leq ax+b$ を示せ。

(3) $g(t)=nt-\log t-1$ の $t>0$ の範囲での最小値を求めよ。

(4) $x_i > 0$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ ならば、$\sum_{i=1}^n \eta(x_i) \le \log n$ を示せ。

(4) が Shannon の不等式である。つまり、この問題は、上のような手順でそれを示せるということかと思われる。

まず、(1) は、普通に計算すると、接線の方程式は、$y = -(\log t + 1)x + t$ となる。

(2) は、$y = \eta(x)$ が凹関数であることを確かめればよく、$\eta''(x) = -\dfrac{1}{x} < 0$ でよい。

(3) も、通常の計算から、$g'(t) = n - \dfrac{1}{t}$, $g''(t) = \dfrac{1}{t^2} > 0$ より、$t = \dfrac{1}{n}$ で、最小値 $g\left(\dfrac{1}{n}\right) = \log n$ をとることが解る。

さて、(4) は、各 x_i について、(2) より、$\eta(x_i) \le ax_i + b$ が解るので、和を取ることにより、

$$\sum_{i=1}^n \eta(x_i) \le \sum_{i=1}^n (ax_i + b) = a + nb = g(t).$$

最後に、(3) を使うと求める不等式が得られるという筋書きである。

さて、Jensen の不等式を利用する証明であるが、与えられた $x_i > 0$ ($\sum_{i=1}^n x_i = 1$) に対して、均等な重み ($a_i = \frac{1}{n}$) を付けると、

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\eta\left(x_i\right) \le \eta\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}x_i\right) = \eta\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\log n.$$

後は、両辺を n 倍すれば、求めたい不等式が得られる。

5. エピローグ.

最後に、2節で取り上げた Löwner-Heinz 不等式の逆不等式に関わって、十数年前小さくない “失敗” をしている。

Löwner-Heinz 不等式は $p > 1$ に対しては、一般に成立しない。しかし、緩やかにではあるが “成立” してほしいときもある。例えば、つぎの意味で順序を “保存” するような定数 K が存在する：

$$A \ge B \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad KA^2 \ge B^2.$$

以下、x は単位ベクトルとする。まず、前節の結果を用いると

$$(Bx, x)^2 \le (Ax, x)^2 \le (A^2x, x)$$

がわかる。従って、問題は、次の不等式をみたす定数 K が存在するかどうかである。

$$(B^2x, x) \le K(Bx, x)^2.$$

そこで、B のスペクトルの範囲を $[m, M]$ に限定する。これは、

$$MI \ge B \ge mI > 0, \quad \text{i.e.,} \quad M \ge (Bx, x) \ge m > 0$$

を意味する。次に、関数 $y = t^2$ の凸性を使い、グラフ上の2点 (m, m^2), (M, M^2) を通る割線 $y = (M+m)t - Mm$ が $[m, M]$ では、$y = t^2$ より上にくることを利用して、K を次のように定める：

$$K = K(m, M, 2) = \max_{t \in [m,M]} \frac{(M+m)t - Mm}{t^2}.$$

普通の計算から、$g(t)=\frac{(M+m)t-Mm}{t^2}$ は、$t_0=\frac{2Mm}{M+m}\in[m,M]$ で最大値 $g(t_0)=\frac{(M+m)^2}{4Mm}$ を取る。すなわち、$K=\frac{(M+m)^2}{4Mm}$ が求めるものである。結果として、次を得る：

$$A\geq B,\ MI\geq B\geq mI>0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{(M+m)^2}{4Mm}A^2\geq B^2. \tag{$*$}$$

関数 $y=\frac{1}{t}$ についても、同様の計算をやってみる。$(m,\frac{1}{m}),(M,\frac{1}{M})$ を通る割線は、$y=-\frac{1}{Mm}t+\frac{1}{M}+\frac{1}{m}$ なので、$g(t)=(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}-\frac{1}{Mm}t)t$ の最大値を見つければよい。これは２次関数なので、$t_0=\frac{M+m}{2}$ のとき、最大値 $g(t_0)=\frac{(M+m)^2}{4Mm}$ を取る。(この方法は、[6] においてはじめて提案されたことである。) 或いは、前節の２つの同値な内積についての不等式の議論を使っても得られるが、いずれにしても、

$$MI\geq B\geq mI>0 \quad\Longrightarrow\quad (1\leq)(Bx,x)(B^{-1}x,x)\leq\frac{(M+m)^2}{4Mm}(=K(m,M,-1))$$

が解る。この不等式は、Kantorovich 不等式、また定数 $\frac{(M+m)^2}{4Mm}$ は Kantorovich 定数と呼ばれている。

ここでもう一度、「Löwner-Heinz 不等式は $p>1$ に対しては、一般に成立しない。」という事実に戻る。1997 年、[2] を書いたとき、最後の章に Theorem 6 として $(*)$ の成立だけを書き加えた。そして、$p>1$ については、非常に弱い結果

$$A\geq B,\ MI\geq B\geq mI>0,\ p>1 \quad\Longrightarrow\quad \left(\frac{M}{m}\right)^p A^p\geq B^p \tag{$**$}$$

で満足してしまった。その後のこの方向の研究の進化 (cf. [4]) を見るにつけても、「なぜ $p=2$ だけで議論を打ち切ってしまったのか？」明らかに、$p=2$ の場合 $(**)$ は $(*)$ より確実に弱い結果である。青信号の交差点での一旦停止のような当時の行動を折に触れて反省している。中村先生は、常々おっしゃっておられた。『数学は自己批判の学である』と。

参考文献

[1] M. Fujii, Y.O. Kim and R. Nakamoto, *A characterization of convex functions and its application to operator monotone functions*, Banach J. Math. Anal. (to appear).

[2] M. Fujii, S. Izumino, R.Nakamoto and Y. Seo, *Operator inequalities related to Cauchy-Schwarz and Hölder-McCarthy inequalities*, Nihonkai Math. J. 8 (1997), 117–122.

[3] T. Furuta, *Operator monotone functions, $A>B\geq 0$ and $\log A>\log B$*, J. Math. Inequal. 7 (2013), 93–96.

[4] T. Furuta, J. Mićić Hot, J.E. Pečarić and Y. Seo, *Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Monographs in Inequalities, Elements, Zagreb, 2005.

[5] M.S. Moslehian and H. Najafi, *An extension of the Löwner–Heinz inequality*, Linear Algebra Appl. 437 (2012), 2359–2365.

[6] M. Nakamura, *A remark on a paper of Greub and Rheinboldt*, Proc. Japan Acad. 36 (1960), 198–199.

[7] G. K. Pedersen, *Some operator monotone functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 36 (1972), 309–310.

[8] M. Uchiyama, *Strong monotonicity of operator functions*, Integral Equations Operator Theory 37 (2000), 95–105.