一般社団法人
国際数理科学協会会報

No.89/2013.12　　編集委員： 藤井淳一（委員長）

目次

役員候補者推薦の御願い

国際数理科学協会代表理事　寺岡義伸

国際数理科学協会会員の皆様

真夏の暑さのから真冬の寒さへと、急激な気温変化に驚かされたこの3ヶ月間でしたが、国際数理科学協会会員の皆様におかれましては、益々ご清栄のこととお慶び申し上げます。

さて、私（寺岡義伸）が国際数理科学協会の代表理事を拝命してから、２年近くが経過し、役員交代の時期が近づいて参りました。来年の春には新しい役員の下で、協会の運営を進められるよう、準備をしております。役員の選挙の最初として、代議員の選挙を御願いすることになりますが、今回は、正式の選挙に先立ち、会員の皆様に、（理事への候補も含めて）代議員として適任な方を推薦していただき、投票に際して推薦された方の名簿を参考にして投票をしていただく方式を取りたいと考えています。各種研究会のグループや所属しておられる機関で、この方と思われる方がおられましたら、推薦していただければ幸いです。

・代議員・理事候補者の推薦依頼

・受付期限：平成 25 年 12 月 28 日（金）

・連絡先：国際数理科学協会　代表理事　寺岡義伸

電子メール（teraoka@jams.or.jp　）あるいは　郵便で、連絡して下さいますよう、よろしくお願い申し上げます。

2013 年度 年会報告

以下の内容で、分科会が行われたことをご報告いたします。

年会担当理事：熊谷 悦生

国際数理科学協会 2013 年度年会 「統計的推測と統計ファイナンス」分科会研究集会

世話人: 地道 正行 (関西学院大学 商学部)

連絡先: 熊谷 悦生 (大阪大学 大学院基礎工学研究科)

日時: 2013 年 8 月 24 日 (土) 10:30–16:30 場所: 関西学院大学梅田キャンパス 1403 教室

プログラム

午前の部

10:30–11:00 **于 立洋** (大阪府立大学 大学院理学系研究科 情報数理科学専攻)

『線形・非線形状態空間モデルにおける予測アルゴリズム』

時間を離散化することにより偏微分方程式から状態空間モデルを構築し、それに基づいて、予測分布を逐次的に求める方法を示す。モデルが線形か非線形かに応じて、カルマンフィルタかアンサンブルカルマンフィルタ、粒子フィルタが利用される。最後に、後者 2 つを比較する。

11:00–11:30 **河本 直子** (大阪府立大学 大学院理学系研究科 情報数理科学専攻)

『株価の二項モデルにおける派生証券の価格評価と株価モデルの発展』

派生証券の価格評価について説明する。まず、株価の二項モデルを構築し、無裁定理論より複製によってヨーロピアンオプション価格を決定する。アメリカンオプション価格は満たすべき性質から決定される。最後に株価の二項モデルの問題点を挙げ、その解決策として幾何ブラウン運動モデルを紹介する。

11:30–12:00 **山本 康裕** (東京大学 大学院工学系研究科)

『統計的手法を用いた自然言語処理 LDA』

統計的な言語処理手法の 1 つである LDA について、どのような流れで処理が行われているかの解説を行った。加えて、この LDA の手法を適用した実例として、情報セキュリティの脆弱性に関するデータベース (CVE) の文章からトピックを抽出した例を紹介した。

午後の部

13:00–13:40 **地道 正行** (関西学院大学 商学部), 前田真之介 (関西学院大学 大学院商学研究科)

『ビジネス・データ・ビジュアライゼーション』

抽象データ (物理的に座標を持たないデータ) のビジュアライゼーション (可視化) は人間の認知を考慮しながら適切な物理的座標と視覚構造を定義することが重要である。今回の報告では、多変量の抽象データとして特に日経 NEEDS の財務データを取り上げ、その視覚表現を作成し、視覚属性にマッピングする具体的な方法やその効果についても検証した。

13:40–14:20 **宮本 大輔** (東京大学 情報基盤センター)

Toward Big Data Analysis of Cyber Threat

ビッグデータ解析基盤として著名な Hadoop についてのチュートリアルを行い、その特徴的なアルゴリズムである MapReduce について説明を行った。また、統計解析言語 R から Hadoop の分散ファイルシステムを利用し、解析を行うデモンストレーションを行った。

14:20–15:00 **藤井 孝之** (滋賀大学 経済学部)

『局所時間を用いたジャンプマルコフ過程の統計的推測とその応用』

本講演では、局所時間を中心にしたジャンプマルコフ過程のノンパラメトリック推定について報告する。局所時間から構築される定常密度関数、強度関数およびジャンプサイズの条件付き分布に対するノンパラメトリック推定量の漸近的性質を紹介し、ここで得る理論的成果の実社会の問題への応用を議論する。

15:10–15:50 **熊谷 悦生** (大阪大学 大学院基礎工学研究科)

An Apportionment by R ényi's Entropy

Rényi entropy による議員配分を紹介し、一つの情報量規準の提案を行い、日本の衆議院と参議院における小選挙区での都道府県別の議員配分を示した。

15:50–16:30 **林 利治** (大阪府立大学 大学院理学系研究科 情報数理科学専攻)

『カルマンフィルタとその応用について』

線形ガウス状態空間モデルに従う時系列の観測からシステムの状態を逐次推定するアルゴリズムとして、カルマンフィルタを説明する。さらに、その応用として、長期予測や尤度の逐次計算、欠測値の補間などの例を挙げ、モデルが非線形のときでも利用できるフィルタにも触れる。

国際数理科学協会 2013 年度年会

日本オペレーションズ・リサーチ学会研究部会「不確実性システムにおける意思決定」 （再掲）

代表者: 菊田 健作

（主査：木庭 淳（兵庫県立大学)、幹事：小出 武（甲南大学)、第３回研究会との共催）

日時：平成２５年８月３１日（土）１３：００～１７：００

場所：西宮市大学交流センター　〒663-8035 西宮市北口町１番２号 ACTS6 階

(1)「相互に依存する決定過程モデル」

藤田 敏治（九州工業大学大学院工学研究院）

概要： 複数の決定過程が互いに再帰的に依存する決定過程モデルについて紹介する。このモデルでは、それぞれの決定過程において各期の状態と決定に依存し他の決定過程の初期状態が定まり、その初期状態に対し問題が解かれ、得られた最適値に依存して元の決定過程の利得関数値が定まる。この種の関係が再帰的に生じ、相互に依存した決定過程構造をなすのである。応用例として、落下試験回数最適化や多角形からの凸多面体構成問題についても紹介する。

(2)「電気自動車の充電スケジューリングとエネルギーマネジメント」

森田 浩（大阪大学大学院情報科学研究科）

概要： 電気自動車は環境問題や快適性から注目されているが、一方で電力エネルギーの不足や充電インフラの未整備などの諸問題も多くある。本講演では、電気自動車の充放電に関わる話題として、集合住宅における電気自動車の充電スケジューリングと、充放電による電力ピーク低減のためのスケジューリングについて紹介する。

(3)「捜索ゲーム：そのモデルあれこれと施設警備，UAV 経路問題への応用」

宝崎 隆祐（防衛大学校情報工学科）

概要： クープマンは捜索理論において最適資源配分問題を初めて議論したが、筆者は捜索ゲームにおける資源配分問題を長年研究してきた。今回の発表ではその様々なモデルを紹介するとともに、施設警備問題や UAV(無人航空機) の経路問題への応用例に触れる。

＊寄稿

正定値行列の微分幾何 — CPRBH-geometry

大阪教育大学 教養学科 情報科学

藤井　淳一

1　はじめに

毎度自前の記事で申し訳ありませんが、ご容赦お願いいたします。

今回の話は、私の研究の中心的な部分に関わるもので、そのきっかけとなった Corach-Porta-Recht による C*-環の可逆正作用素のなす多様体のファイバー束的な考察 [3, 4] は、私にとって衝撃でした。この多様体が Finsler 構造をもつだけでなく、当時主な道具として使っていた Hilbert 空間上の正作用素 A, B の**幾何平均**の作る path

$$A \#_t B = A^{\frac{1}{2}} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right)^t A^{\frac{1}{2}}$$

が測地線となり、その 0 での微係数としての**相対作用素エントロピー** [9, 10]

$$S(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \log \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right) A^{\frac{1}{2}}$$

もその距離にかかわると聞けば、Riemann 幾何もまともに知らない身としては興味をひかざるを得ませんでした。何よりもその考察のスタイルが、Kobayashi-Nomizu 流 [12]（Cartan 流といった方がいいかもしれません）の現代的なファイバー束を駆使したもので、局所座標を極力使わず、代数的な手法がまぶしかったのを憶えています。個人的には簡単なものでも計算間違いをよくしますので、多くの幾何学者のような強力な計算力から程遠い身としては、極力複雑な計算のないスタイルはうってつけでした。しかし逆にこのスタイルのせいで、あまり多くの方の興味を引きませんでした。

それに対し、作用素を正定値行列全体に限定し、作用素ノルムを 2-ノルムに直して Riemann 幾何を考えたのが Bhatia-Holbrook [2, 1] でした。この試みが、この幾何自身の発展のみならず、正作用素の幾何平均を多変数化するきっかけになったのは面白い歴史ですが、これはまた別のお話です。無限次元という壁を取り去った時、より通常の幾何学に近づくことになりました。まともに、Riemann 幾何や Lie 群による等質空間、対称空間の好例になったのではないかと思われます。とはいえ、幾何学はハードルが高いうえに、通常の局所座標計算は計算力と（添え字の多さから）視力 (?) も求められ、老眼にはつらいです。さらには、添え字や $\sum$ 記号が多いので $\sum$ さえ取っ払ってしまうという、Einstein 記法などの名人芸まで要求されます。慣れた方は（当の Kobayashi-Nomizu のテキスト [12] でさえ）本来必要な添え字も省略してしまい、記述が専門家のみの文脈に埋もれてしまいます。実際、幾何学の大家 [14] でさえ自嘲気味に「Busemann が皮肉たっぷりに評した “通過不可能に見えるテンソルの森”」などと引用しておられる程です。

そこで、上記に述べた方このアプローチで、素人にも優しい（と勝手に思っている）方向で、逆に添え字が増えたりするところもありますが、正定値行列のなす Riemann 多様体（ここでは、頭文字をとって **CPRBH-geometry** と呼ぶことにします）を眺めてみたいと思います。基礎的な部分は、[8] のリメイクです。

2　ファイバー束の幾何学

まず、極度に抽象化された基本的なファイバー束の幾何学の一般的な枠組みについて素人なりの解説をしておきます（cf. [12, 16]）。n 次元（微分可能）多様体 M 上の（無限回）微分可能関数全体を、$\mathcal{F}(M)$ とします。$a \in M$ における**接ベクトル** X_a とは、共役空間 $\mathcal{F}(M)^*$ の元（つまり $\mathcal{F}(M)$ の線形汎関数）のうち、微分的に

$$\textbf{Leibniz 則：} \qquad X_a(fg) = X_a f \cdot g(a) + f(a) \cdot X_a g$$

を満たすもので、その全体 $T_a(M)$ は n 次元線形空間となり、**接空間**と呼ばれます。抽象的な定義で直観的な「接ベクトル」とは一見違うように思えますが、実際、局所座標 $\{x_j\}$ を入れた場合には、$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right\}$ が標準基底になり、同時に「接ベクトル」がその意味を伴います。正式に定義すると面倒ですが、p での接ベクトル X_p を実現する曲線 $x(t)$（つまり $x(0) = p, \dot{x}(0) = X_p$ となるもの）をつかうと、局所座標を避けて、ワンパラメータで書くことができます：

$$X_a f = \left.\frac{df(x(t))}{dt}\right|_{t=0}.$$

これだけでもかなり違和感が取れるのではないでしょうか。また、$(fX)_a = f(a)X_a$ として、$T_a(M)$ は $\mathcal{F}(M)$ の加群ともみなせます。

次に、M を**底空間**, リー群 G を**構造群**とする**主束** $P = P(M,G) = P(M,G,\pi)$ とは、以下の性質を持つ多様体のことです（あまり真剣に眺めず、定義以降の太字部分をご覧ください）：

1. $g \in G$ の右作用 R_g が微分同相写像として、**推移的**（$R_{gh} = R_h R_g$）であり、**自由に作用する**（$g \neq e_G$ のとき、R_g が不動点を持たない）こと（これらを合わせて**単純推移的**とも呼ばれる）。

2. **射影**と呼ばれる P から M への微分可能写像 π があり、各 $p \in P$ について $\pi^{-1}(\pi(p)) = \{pg | g \in G\}$ となること。$a \in M$ について $\pi^{-1}(a)$ は、a **の上のファイバー**と呼ばれ、G と微分同相になる。

3. P は局所的には G との直積、即ち、各 $a \in M$ のある近傍 U_a について、$\pi^{-1}(U_a) \cong U_a \times G$. ここで直積への群の右作用は $(b,g)h = (b,gh)$ であり、主束の**同型**対応 $f\colon\ P \to P'$ とは、微分同相写像で $f(ag) = f(a)g$ ($\forall g \in G$: 共通の構造群) となることである。

一般に群 G の右正則表現も R_g とかくことにすると、この表現で G は「置換群」すなわち「変換群」として単純推移的に G 自身に右作用していますので、**主束の意味するところは、M の各点にファイバー**

として変換群がくっついたものと考えられ、個々の変換の移り変わり（下記の「接続」）を指定することで、曲がった空間 M **の変化を捉えようとする，いわば「変換を指定する多様体」**といえるでしょう。この考え方が、（曲がっていない）古典幾何学を変換群の不変量として捉えた F.Klien の発想「**エルランゲン・プログラム**」を E.Cartan が（曲がっている）多様体に拡張したものです。

接続の定義を見ておきます。$p \in P$ を通る接空間 T_pP のなかで、p を通るファイバー $\pi^{-1}(\pi(p))$ に接するベクトル全体を $\mathfrak{g}_p$ とするとき、主束の**接続**とは、$p \in P$ を通る接空間 T_pP の直和分解 $T_pP = \mathfrak{g}_p \oplus Q_p$ で、**垂直部分空間** $\mathfrak{g}_p$ に対し、**水平部分空間** Q_p を、$Q_{pg} = R_g(Q_p)$ を満たすものとして定めたものです。この定義以外に、$\mathfrak{g}_p$ 上では不変で、その核が Q_p となる 1 次微分形式が考えられますが、これを「接続形式」と呼びます。逆にある性質を持つ 1 次微分形式が与えられたとき、直和分解が決まるので、これで接続を定義することもでき、接続形式の方は「Ehresmann 接続」とも呼ばれます。あまり「接続」らしくないこの分解が何を意味するのでしょうか。

接続＝水平性 が定まったとき、多様体 M の曲線 γ に対して、P の曲線 Γ で、$\pi(\Gamma) = \gamma$ を満たし、Γ の接ベクトル $\dot{\Gamma}$ が**水平な**（すなわち、各点 $\Gamma(t) \in P$ で水平空間 $Q_{\Gamma(t)}$ に属する）ものを γ の（**水平**）**持ち上げ**と呼びます。P は変換群の塊とみなせますから、Γ を変換 $\tilde{\Gamma}$ とみて、**「多様体の点** $\gamma(t)$ **の移り変わりに従って変換として** $\tilde{\Gamma}(t)$ **をどのように指定していくか」が接続**と言えて、出発点に対し点の変化の方向に向かって「水平に」変化し、主束の**点の平行移動**、即ち**「変換の移り変わり」** $\tilde{\Gamma}(t_0) \mapsto \tilde{\Gamma}(t_1)$ **が指定される**ことになります。その点がベクトルの変換として解釈され、変換としての変化は $\tilde{\Gamma}(t_1)\tilde{\Gamma}(t_0)^{-1}$ なので、0 から t への**ベクトルの平行移動** $\Gamma(t_1)\Gamma(t_0)^{-1}X_{t_0}$ として実現されます。蛇足ですが、JAVA から導入されたと思われるコンピュータグラフィクスのモデルも、各オブジェクトに変換行列がくっついていて、部分的な変換を実現しています。

測地線に触れておきましょう。M の曲線 γ、接ベクトル束のベクトル場を X としたとき（便宜上 $X(t) = X_{\gamma(t)}$ とします）の**共変微分（アフィン接続）**$\nabla_{\dot{\gamma}}(X)$ については、γ に沿う接ベクトルの s から t への**平行移動** P_t^s が与えられたとき、

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(P_t^{t+\varepsilon} X(t+\varepsilon) - X(t)\right) = \tilde{\Gamma}(t)\left(\tilde{\Gamma}(t)^{-1} X(t)\right)'$$

で与えられます。これは、本来違う空間のベクトルを同じ空間に平行移動して、変化率を見たものです。このとき、$\dot{\gamma}$ 自体も部分的なベクトル場ですから、**共変微分** $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(t)$ が意味を持ち、これが常に 0 となるときは、曲線がコンパクトなので、各近傍での計算によって、「どの接ベクトル $\dot{\gamma}(s)$ を曲線に沿って平行移動しても $P_t^s \dot{\gamma}(s) = \dot{\gamma}(t)$ となる」という意味において「自己平行な曲線」と考えられ、これを**測地線**と呼びます。このようにとりあえずは計量と無関係に（1 階微分の共変微分方程式だから 2 回微分の）微分方程式の解として unique に測地線が得られるとするのが現代的な微分幾何学の解釈であり、古典的な「計量で長さを測ったときに最短となる曲線」という位置づけはもはや失われています。したがって、幾何構造と両立するような計量が導入された時、測地線の最短一意性は問題になりえます cf. [7]。

接ベクトル束上の共変微分についてもう少し述べておきます（実は主束と接ベクトル束は「同伴ファイバー束」として互いに関連しあっていますが、その点については [8] をご参照ください）。$\dot{\gamma}$ は、一つ

の曲線 γ から作られるベクトル場ですが、一般のベクトル場に拡張できるので、接ベクトル場 X による共変微分 $\nabla_X(Y)$ は、以下の性質を満たすことが分かります（$h \in \mathcal{F}(M)$）：

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z, \quad &(2)\ \nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z\\
&(3)\ \nabla_{hX}Y = h\nabla_X Y, &(4)\ \nabla_X(hY) = (Xh)Y + h\nabla_X Y.
\end{aligned}
$$

逆に上記 4 条件を満たす写像は、P の接続から得られる共変微分となる事が知られています。共変微分から見た平行性としては、「Y が γ に沿って平行」という状況は、$\nabla_{\dot{\gamma}}Y = 0$ で規定されます。以上のように、**接続・平行移動・共変微分**はこのような枠組みでは同等の概念とみなせます [11]。ベクトル束の共変微分を「接続」と呼ぶテキストも多く、実際、同伴束が接ベクトル束の場合には、**アフィン接続**と呼ばれています。

3 CPRBH-geometry の概要

さて、いよいよ本題の幾何学です。主束を $\mathcal{P} = \mathcal{G}(\mathcal{M}^+,\mathcal{U},\pi)$（ただし、$\mathcal{G}$ は正則行列全体 $\mathcal{GL}(n)$、射影は $\pi(G) = GG^*$ として、ユニタリ行列の構造群 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(n)$ の右作用は $G \mapsto GV$ という自然な単純推移的作用とします。ここで、各ファイバーは $G\mathcal{U}$ という形になっていますので、$G \in \mathcal{G}$ での接空間 $T_G\mathcal{P}$ の垂直部分空間は、ユニタリの作用の変化のみの接空間ですから、$\lim_{t\to 0} V(t) = I$ となる微分可能ユニタリ写像について、$G\dot{V}(t)$ という接ベクトルの集まりです。ここで、

$$
\dot{V}^*(t) = \lim_{t\to 0}\frac{V^*(t) - I}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{V^*(t)(I - V(t))}{t} = -I\dot{V}(t) = -\dot{V}(t)
$$

ですから、垂直ベクトルは G の右側に歪エルミット行列がくっついたものです。そうすると、**接続**、すなわち「水平部分空間」は、エルミット行列がくっついたものと考えられ、水平垂直分解は、G の接ベクトル Y について、

$$
Y = G\frac{G^{-1}Y + (G^{-1}Y)^*}{2} + G\frac{G^{-1}Y - (G^{-1}Y)^*}{2}
$$

です。この場合、曲線 γ の水平持ち上げ Γ は、この左から基点を逆行列で消してエルミットになる**水平性** $\Gamma^{-1}\dot{\Gamma} = (\Gamma^{-1}\dot{\Gamma})^* = \dot{\Gamma}^*(\Gamma^*)^{-1}$ と持ち上げ $\pi(\Gamma) = \Gamma\Gamma^* = \gamma$ より、**transport equation** と呼ばれる微分方程式

$$
\dot{\Gamma} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}\gamma^{-1}\Gamma
$$

によって規定されます。

ここでの接束 $\mathcal{M}^h$ への作用（変換群としての解釈）は $\tilde{G}X \equiv GXG^*$ で、0 から t への曲線 γ に沿う接ベクトル場 X の**平行移動**は、

$$
P_t X \equiv {P_t}^0 X(t) = \tilde{\Gamma}(t)\left(\tilde{\Gamma}(0)^{-1}X(0)\right)
$$

となるので、**共変微分**は、transport equation と水平性と、微分公式 $(\Gamma^{-1})' = -\Gamma^{-1}\dot{\Gamma}\Gamma^{-1}$ より

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{P_t{}^{t+\varepsilon} X(t+\varepsilon) - X(t)}{\varepsilon} = \tilde{\Gamma}(t) \left(\tilde{\Gamma}(t)^{-1} X(t)\right)'$$
$$= \Gamma(t) \left(\Gamma(t)^{-1} X(t) (\Gamma(t)^*)^{-1}\right)' \Gamma(t)^* = \dot{X} - \frac{1}{2}(\dot{\gamma}\gamma^{-1}X + X\gamma^{-1}\dot{\gamma}).$$

となります。したがって、自己平行曲線としての**測地線** γ は、$X = \dot{\gamma}$ とすれば、$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ より、

$$(\gamma)'' = (\gamma)'\gamma^{-1}(\gamma)'$$

という測地線微分方程式の解となります。これを解くのは非可換なので少し面倒ですが、代入すれば、解になっていることはわかります。最近 Pálfia [17] は、$r \in [-1, 1]$ についての測地線微分方程式

$$(\gamma)'' = (1-r)(\gamma)'\gamma^{-1}(\gamma)'$$

の解が

$$A\#_{r,t}B = A^{\frac{1}{2}} \left((1-t)I + \left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^t\right)^{\frac{1}{r}} A^{\frac{1}{2}}$$

となることを、一般的に確かめましたが、ここではもとの $r = 0$ で具体的に解いてみましょう：

> $h(t) = \gamma(0)^{-\alpha/2}\gamma(t)^{\alpha}\gamma(0)^{-\alpha/2}$ とおくと、再度、$h'' = h'h^{-1}h'$ を満たすので、初期条件 $h(0) = I$, $h(1) = A^{-1/2}BA^{-1/2}$ を考慮して、CPR 幾何学のように解く: $H = h'h^{-1}$ とすると、
>
> $$H' = h''h^{-1} - h'h^{-1}h'h^{-1} = h''h^{-1} - h''h^{-1} = O$$
>
> だから、$H = C$, 即ち、$h' = Ch$ である。h', h ともにエルミットなので、
>
> $$hC^* = (Ch)^* = (h')^* = h' = Ch, \quad C^* = h(0)C^* = Ch(0) = C$$
>
> となって、C もエルミットとなるから、各 t で h, h' は可換となり（$h(t)$ と $h(s)$ は可換とは限らないが)、可換の場合と同様、$(\log h)' = h'h^{-1} = C$ が成り立つことが確かめられるから、$\log h(t) = Ct + D$ となり、$h(0) = O$ より、$D = O$ 即ち、$h(t) = \exp tC$ となるが、
>
> $$A^{-\alpha/2}B^{\alpha}A^{-\alpha/2} = h(1) = \exp C \quad \text{より、} \quad h(t) = (A^{-\alpha/2}B^{\alpha}A^{-\alpha/2})^t$$
>
> となって、測地線が $\gamma(t) = A\#_t B = A\#_{0,t}B$ によって得られることが分かる。

さて、$A \in \mathcal{M}^+$ における Riemann 計量は、接ベクトル $X, Y \in \mathcal{M}^h$ について

$$g_A(X,Y) = \left\langle A^{-\frac{1}{2}}XA^{-\frac{1}{2}}, A^{-\frac{1}{2}}YA^{-\frac{1}{2}} \right\rangle \equiv \operatorname{tr} A^{-1}XA^{-1}Y.$$

です。実際この metric は、正則行列 Z について、**homegeneous** と呼ばれる性質

$$g_{ZAZ^*}(ZXZ^*, ZYZ^*) = \operatorname{tr}(V^*)^{-1}A^{-1}XA^{-1}YV^* = \operatorname{tr} A^{-1}XA^{-1}Y = g_A(X,Y)$$

より、平行移動不変となっています。

4 幾何に現れる非可換性と holonomy

当たり前のことながら、あまり作用素論的な非可換性（積の非可換性）は線形 Lie 群でもない限り問題にすらなりませんので、ほとんど述べられていません。ここでは、具体例を通じて、その様子を見てみましょう。

曲線 γ に沿う平行移動において、例えば、一つの正定値行列 A によって $\gamma(t) = A^t$ とした場合（これは測地線の例ですが）のように、曲線全体が可換な場合は、微分 $\dot{\gamma}$ もエルミットで曲線自身と可換となるので、各時点で曲線の 1/2 乗 $\Gamma = \sqrt{\gamma}$ を水平持ち上げにとることができます；

$$(\Gamma^{-1}\dot{\Gamma})^* = (\sqrt{\gamma}^{-1}\dot{\sqrt{\gamma}})^* = \dot{\sqrt{\gamma}}^*(\sqrt{\gamma}^{-1})^* = \dot{\sqrt{\gamma}}\sqrt{\gamma}^{-1} = \sqrt{\gamma}^{-1}\dot{\sqrt{\gamma}} = \Gamma^{-1}\dot{\Gamma}.$$

特に、ベクトル場 $X(t)$ すら曲線上で、曲線と可換になっている場合、$\gamma(t)$ から $\gamma(s)$ への平行移動における、前述の変換の前半部分は、ユニタリ $\sqrt{\gamma}(s)\sqrt{\gamma}^{-1}(t)$ ですが、可換性により後半部分との積で単位行列となって消えてしまい、

$$\nabla_{\dot{\gamma}}X \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{{P_t}^{t+\varepsilon}X(t+\varepsilon) - X(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{X(t+\varepsilon) - X(t)}{\varepsilon} = \dot{X}(t)$$

のように、共変微分は通常の微分と一致してしまいます。このことからも、共変微分は（積の非可換性の意味でも）非可換性を図る指標となっていて、それは同時に空間のゆがみを表しています。通常この度合を測るのは曲率ですが、平行移動的な観点から見ると、holonomy 群がよく使われます。通常の間隔の平行移動とは違うので、球面上でベクトルを平行移動した時でも、元の位置に戻ったらあら不思議、接ベクトルの「向き」が変わってしまったという例はよく引かれているでしょう。その変化の全体は群をなしますので **holonomy 群** と呼ばれます。複雑な幾何の場合、この群が連結とは限らないので、主要連結成分をとって **制限 holonomy 群** を考えることも多いです。ここでは、この群全体を求めることはしませんが、この幾何でどんな変換が holonomy として出てくるかを具体的に例示してみます（holonomy 群は構造群の部分群であることは知られています）。

前述したように曲線自身が可換な場合は、曲線自身の 1/2 乗が水平持ち上げになりましたが、一般に非可換な場合にはそれでは水平にならないので、（原理的には可能ですが）水平持ち上げを探すのは大変です。そこで、ループを考えるにあたって、一部簡単な非可換部分を混ぜることにします。

2 つ目の主要部分 $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 5t^2+4t+1 & 6t^2+4t \\ 6t^2+4t & 8t^2+8t+4 \end{pmatrix}$ から始めます。持ち上げとして、

$$\Gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1+2t & t \\ 2t & 2+2t \end{pmatrix} \qquad (\gamma_2 = \Gamma_2\Gamma_2^*)$$

を取ると、$\det\Gamma_2 = 2t^2+6t+2$ となりますから、逆行列と微分の積は、

$$(2t^2+6t+2)\Gamma_2^{-1}\dot{\Gamma}_2 = \begin{pmatrix} 2+2t & -t \\ -2t & 1+2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2t & 2 \\ 2 & 1+2t \end{pmatrix}$$

となって、エルミットなのでΓ_2は水平です。曲線γ_2は

$$A = \gamma_2(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{から、} \quad B = \gamma_2(1) = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$$

への path になっていて、変換に必要なのは両端の

$$\Gamma_2(0)^{-1} = \sqrt{A}, \qquad \Gamma_2(1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

であることに注意しましょう。

さて、この部分を真ん中の曲線として、$\gamma_1(t) = A^t$, $\gamma_3 = B^{1-t}$ によって、単位行列Iから出発してIに戻るループを考えます。便宜上パラメータtはそれぞれで0から1のままにしておきます。

$$\Gamma_3 = \sqrt{\gamma_3} = \sqrt{B}^{1-t}$$

であることより、

$$\Gamma_3(0) = \sqrt{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3(0)^{-1} = \frac{1}{10\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

であることに注意しましょう。

Iにおける接ベクトルX_Iの平行移動は、まとめて見るとWX_IW^*という形をしていますが、

$$W = \Gamma_3(1)\Gamma_3(0)^{-1}\Gamma_2(1)\Gamma_2(0)^{-1}\Gamma_1(1)\Gamma_1(0)^{-1}$$

となって、実際には$\Gamma_3(1) = \Gamma_1(0) = \Gamma_2(0)^{-1}\Gamma_1(1) = I$ですから、変換の左側の部分$W$は

$$W = \Gamma_3(0)^{-1}\Gamma_2(1) = \frac{1}{10\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$$

となり、本当にユニタリが得られることがわかります。実際には、各指数はすべて合計が0となるので、行列式が1となる特殊ユニタリです。可換な場合はループでなくても常にWは特殊ユニタリにとれ、tからsへの平行移動なら$\sqrt{\gamma(s)}^{-1}W\sqrt{\gamma(t)}$はユニタリになりますが、非可換な場合もループによる平行移動によって、接ベクトルは（特殊）ユニタリ変換分の変化を受けることになることが見えるでしょう。

5　等質空間から対称空間へ

CPRBH-geometry の別の顕著な性質として、いろんな意味で対称空間になっていることがあります。まず、Mが**等質空間**とは、Lie 群Gの作用$x \mapsto gx$があって、それが推移的（$\exists x;\ M = Gx$）であることで、このとき、$M \cong G/G_x$（G_xは固定部分群（イソトロピー群）$G_x = \{g|gx = x\}$）と商空間の構造を持つので、そのように呼ばれます。この特殊なケースが対称空間になります。

CPRBH-geometry では、n次正定値行列全体$\mathcal{M}_n^+$は、$x = I$として、定められた作用$G \mapsto GIG^* = GG^*$ですべての正定値行列が得られて推移的なので等質空間となり、Iの固定部分群はユニタリ全体

$\mathcal{U}(n)$ となるので、$\mathcal{M}_n^+ \cong \mathcal{GL}(n)/\mathcal{U}(n)$ です。これは、極分解を逆から見たようなものであり、そのまま空間的に見た分解 $\mathcal{GL}(n) = \mathcal{U}(n)\mathcal{M}_n^+$ を一般化したものは、Lie 群の Cartan 分解と呼ばれています（Lie 環のものの方がよく使われますが）。

さて、一番原始的なレベルでは、**Lie 群としての対称対** があります（正確には **symmetric pair** の等質空間ですが、ラフに対称空間と呼んでいる場合があります。その理由は一応あります）。Lie 群 G の**対合**と呼ばれる自己同形 σ（$\sigma^2 = \mathrm{id}_G$）が存在し、閉部分群 H として、

$$G_0^\sigma \subset H \subset G^\sigma$$

になっていると、G/H は等質空間となります。ただし、G^σ は、固定部分群で、G_0^σ は I の連結成分です。$\mathcal{M}^+$ では、$G = \mathcal{GL}(n)$ において、$\sigma(g) = (g^*)^{-1}$ で、$H = G_0^\sigma = G^\sigma = \mathcal{U}(n)$ となっていて、特にこのように等号が成立するときに、ラフな意味で対称空間と呼ぶようです。

次に**アフィン対称空間** を定めますが、**アフィン接続** ∇ は、多様体 M の接束 TM 上の共変微分のことです。便宜上この接続に対する**測地線** $\gamma(t)$（$\nabla_{\dot\gamma}(\dot\gamma) = 0$）のパラメータを $t \in [-1, 1]$ とするとき、任意の点 p で $p = \gamma(0)$ となるような測地線について、ローカルに定められた微分同相写像 $s_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ が、∇ と交換可能なとき（このとき、s_p はアフィン写像と言う）、**局所アフィン対称空間**と呼ばれます。M 自身が連結で、s_p が M から M への写像に拡張できるとき、**(大域) アフィン対称空間**といいます。局所アフィン対称空間となるための同値条件は、**曲率テンソル共変微分** $\nabla_Z R$ が 0、すなわち

$$(\nabla_Z R)(X, Y) = [\nabla_Z, R(X, Y)] - R(\nabla_Z X, Y) - R(X, \nabla_Z Y) = 0$$

であることと、**捩率テンソル** T が 0、すなわち

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$$

であることが知られています。ここで、**曲率テンソル**自身は、$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ で定められます。アフィン対称となるための追加の同値条件は、**測地線完備**（パラメータ $t \in [-1, 1]$ が常に $(-\infty, \infty)$ に拡張可能）になることです。したがって、CPRBH 幾何では、Furuta 不等式関連で大活躍した, 拡張作用素幾何平均

$$A \natural_t B = A^{\frac{1}{2}} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right)^t A^{\frac{1}{2}}$$

$(\forall t \in \mathbb{R})$ が測地線になっています。

等質空間 G/H は、**標準接続**といわれる接続（G で不変で、$s(Y) = -Y$ となる接ベクトル場 Y について $\nabla_X Y = 0$ となるもの）についてアフィン対称空間となることが知られています（この接続は、[12] の意味で、**reductive type** のとき存在します; つまり、G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ が、$\mathrm{ad}(H)$ 不変な部分空間 $\mathfrak{k}$ について、$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$ と直和分解できるときです）。実際、$\mathfrak{gl}(n) = \mathcal{M}_n$, $\mathfrak{u}(n)$: 歪エルミット全体なので、$\mathfrak{k} = \mathcal{M}_n^h$:エルミット全体, として、(順序逆の) デカルト分解 $\mathcal{M}_n = \mathfrak{u}(n) \oplus \mathcal{M}_n^h$ を考えると、ユニタリ U とエルミット X について、$\mathrm{ad}(U)X = UXU^{-1} = UXU^*$ は再びエルミットとなるので、reductive type となって、この意味でも $\mathcal{M}_n^+$ はアフィン対称空間でもあります。これが、ラフに対称空間と呼ばれている理由だと思われます。

M 自身が Riemann 空間で、Levi-Civita 接続（計量と両立: $\nabla g = 0$、かつ捩率テンソル 0 で一意的に決まるもの）でアフィン対称となるとき、**Riemann 対称空間** と呼ばれます。これは、各 $x \in M$ の等長変換 s_x で

$$s_x^2 = I_M, \quad s_p(p) = p, \quad (ds_p)_p = -I_{T(M)}$$

となる **symmetry** が取れることと同値です [5] （s_p 自身 $s_p^2 = \mathrm{id}_M$ です)。ds が微分写像であることから、exp 写像について、$s_p(\exp X_q) = \exp(ds_p)_q(X_q)$ という特徴を持ち、特に

$$s_p(\exp X_p) = \exp(ds_p)_p X_p = \exp(-X_p)$$

より、測地線的な対称性もわかります。また、対合 σ との関係は、$s_p(aH) = p\sigma(p^{-1}a)H$ です。

CPRBH-geometry $\mathcal{M}_n^+$ は、Riemann 対称空間にもなっています (real case では、[5] で言及されています)。このとき、symmetry は $s_A(B) = AB^{-1}A$ としますが、実際、s がみたすべき 1 番目の条件は明らかで、$s_I(B) = B^{-1}$ なので、$\exp(ds_I)_I(X_I) = s_I(\exp X_I) = \exp -X_I$ より、$(ds_I)_I(X_I) = -X_I$ となって、2 番目の性質が得られます。さらにベクトル場の左不変性より、$(ds_I)_A X = -A^{-1}XA^{-1}$ だから、接ベクトル $X, Y \in \mathcal{T}_A\mathcal{M}_n^+$ について

$$g_{A^{-1}}((ds_I)_A X, (ds_I)_A Y) = \mathrm{tr}\, A^{-1}XA^{-1}AA^{-1}YA^{-1}A = \mathrm{tr}\, A^{-1}XA^{-1}Y = g_A(X, Y)$$

となって、isometry となっているので、symmetry です。左不変性・homogeneous 性から、一般の s_A も symmetry になっています。

6 おわりに

この拙文は、実は、Pálfia の論文 [17] を読むのに、いろんな幾何的知識が必要となったので、改めて調べ直したことが元になっています。holonomy 群を基礎として対称空間の分類は古くから知られていますが、局所対称空間でない場合も「Berger-Simons の分類」として有名なものがあります（[17] では、[15] が参照されています)。CPRBH 幾何の holonomy 群は（実際はその Lie 環と Ambrose-Singer の定理によって）特殊ユニタリ群であることを計算で示していますが、特に 2 次元ではシンプレクティック群と同型になるという特殊事情があります。また、算術平均、幾何平均、調和平均以外の平均の測地線を持つアフィン接続のパラメータ幾何学の holonomy 群は特殊線形群となって、計量を持たないこともわかり、2 次元以下だけが特殊な状況であることも同時に示してくれたのでした。このことは我々も予想していたことなので、その切れ味のよさに感服しました。まだ完全に読み切れていないので、正確な解説はできませんが、機会があればまた紹介したいと思います。

参考文献

[1] R.Bhatia, “Matrix Analysis”, Springer, 1997.

[2] R.Bhatia and J.A.R.Holbrook, Riemannian geometry and matrix geometric means, Linear Algebra. Appl. **423** (2006), 594–618.

[3] G.Corach, H.Porta and L.Recht, Geodesics and operator means in the space of positive operators. Internat. J. Math., **4** (1993), 193–202.

[4] G.Corach and A.L.Maestripieri, Differential and metrical structure of positive operators, Positivity, **3** (1999), 297–315.
http://link.springer.com/content/pdf/10.1023%2FA%3A1009781308281.pdf

[5] J.-H.Eschenburg, Lecture Notes on Symmetric Spaces,
http://www.math.uni-augsburg.de/~eschenbu/symspace.pdf

[6] J.I.Fujii, Structure of Hiai-Petz parametrized geometry for positive definite matrices, Linear Algebra Appl., **432**(2010), 318–326.

[7] J.I.Fujii, The Hiai-Petz geodesic for strongly convex norm is the unique shortest path, Sci. Math. Japon., **71**(2010), 19–26.

[8] 藤井淳一, 微分可能多様体としての正定値行列とその測地線, 大阪教育大学紀要 第 III 部門　自然科学応用科学, **59**(2010/9), 1–14.
http://ir.lib.osaka-kyoiku.ac.jp/dspace/bitstream/123456789/25227/1/KJ3_5901_001.pdf

[9] J.I.Fujii and E.Kamei, Relative operator entropy in noncommutative information theory, Math. Japon., **34** (1989), 341–348.

[10] J.I.Fujii and E.Kamei, Uhlmann's interpolational method for operator means, Math. Japon., **34** (1989), 541–547 .

[11] 小林昭七, 「接続の微分幾何とゲージ理論」, 裳華房, 1989.

[12] S.Kobayashi and K.Nomizu, "Foundations of Differential Geometry, vol. 1, 2", Wiley Interscience, New York, 1963.

[13] F.Kubo and T.Ando, Means of positive linear operators, Math. Ann. **246** (1980), 205–224.

[14] 松本誠, 「計量微分幾何学」, 裳華房, 1975.

[15] S.Merkulov and L.Schwachhöfer, Classification of irreducible holonomies of torsion-free affine connections, Ann. of Math., **150**(1999), 77–150.
http://arxiv.org/pdf/math/9907206

[16] 野水克己, 「現代微分幾何入門」, 裳華房, 1981.

[17] M.Pálfia, Semigroups of operator means and generalized Karcher equations, Preprint.
http://arxiv.org/abs/1208.5603

国際数理科学協会へのご案内

国際数理科学協会（ISMS）は、1948 年の創刊より約 60 年、国際的に高い評価を得てきた Mathematica Japonica(M.J) と、その姉妹誌で電子 Journal と Paper 誌とを持つ Scientiae Mathenaticae(SCM) とを発行し、数理科学の発展に貢献してきました。今世紀この両誌を合併、 21 世紀 MJ/SCM New Series “Scientiae Mathenaticae Japonicae (SCMJ)” と名称を変更し、純粋数学から応用数理までをカバーする国際的学術誌として発行を続けております。今日まで 260 巻を超える、日本で最大量を誇る数理科学の学術誌です。

(1) 日本のみならず、海外 20 カ国に渡る 80 名の著名な教授・研究者が、Editorial Board に参加しています。掲載可能と判断された投稿論文は、印刷版のみならず電子版として掲載されております。SCMJ に掲載された論文は、Mathematical Review や Zentralbatt によって review されています。

(2) SCMJ は、世界中の多くの図書館へ配布されています。SCMJ の印刷版は、関連する研究者グループに積極的に紹介されており、研究者間交流を促進するのに役立っております。

(3) ISMS 年会 : ISMS 会員・非会員が集まり、発表・討論する研究集会が毎年行われています。

［会員に対する特典］

(1) SCMJ の online version へ自由にアクセス可能となります。（プリントも自由です。）

(2) 年間 3 回発行の Scientiae Mathenaticae Japonicae(SCMJ) が配布されます。

(3) Scientiae Mathenaticae Japonicae(SCMJ) への投稿論文が掲載される場合、掲載料は無料になります。

（入会金：無料、　年会費：正会員 6000 円；準会員 4000 円）

□□□　国際数理科学協会事務連絡・入会の問合せ先　□□□

住所：大阪府堺市堺区南花田口町 2-1-18 新堺東ビル内
新規入会担当：水落（ミズオチ）
電話：(072) 222-1850
E-mail:scm4j@jams.jp