一般社団法人

国際数理科学協会会報

No.85/2013.1　　編集委員： 藤井淳一（委員長）

目次

現況調査書の提出ご依頼

国際数理科学協会会員の皆様

当協会では、2013 年度より、一部会員区分及び会費を改定いたします。改定後の会費は、年齢により変動する部分もありますので、現会員の方々全員に、新形式の現況調査書（下記）のご提出をいただきたく存じます。

2013 年 1 月中に、2013 年度会費につき、納付ご依頼を行いますが、その際に、下記の内容で国際数理科学協会現況調査書（葉書）を同封いたします。内容を隠すシールを貼った上で、当協会（水落）宛に、ご返送願います。（内容等に、ご意見のある会員の方は、ご遠慮なく、当協会宛に、お問い合わせ願います。

TEL 072-222-1850 → 火曜・金曜午前 10 時から午後 4 時、　E-Mail: trsr@jams.or.jp）

国際数理科学協会現況調査書（見本）

氏　　名		（男・女）
フリガナ		(〇で囲む)
ローマ字		西暦　　年　　月　　日生
会　員　番　号		
最　終　学　歴	学校名　　科名	卒業年月
勤務先（在学校） 学部・学科 まで記入	 同上英訳	職名 （学年）同上英訳
博士号		
連 絡 先 住 所	〒	TEL(　　)(　　)(　　)
e-mail address		
専門分野名		

会費及び雑誌購読費の変更について

国際数理科学協会では、高齢会員の方について、過去の功績に感謝し、引き続き、今後のご協力をお願いするため、2013 年度以降の会費を [表 2] の通り、一部、改めることと致しました。また、雑誌 Scientiae Mathematicae Japonicae は、国内会員全員に、無料配布に変更致しました。

[表 2]

【2013 年度の会費】

Categories	国内会員	海外会員	途上国会員
単年度正会員	6,000 円	US$ 75, €55	US$ 45, €33
単年度準会員	4,000 円	US$ 50, €37	US$ 30, €22
終身会員	下記式による*	扱いなし	扱いなし
生涯会員	終身会員へ	US$ 750, €550	US$ 440, €323
名誉会員	無料	無料	無料

*資格：

(1) 63 歳以上 73 歳未満の正会員で、(73 −年齢) × 3000 円（注）年齢は、毎年 4 月 1 日現在の満年齢を基準といたします。

(2) 73 歳以上の方は、正会員で本人が希望すれば、会費の払い込みは不要で、会員の資格・特典を終生継続いたします。

（正・準会員における 3 年会員の制度は廃止されました。準会員は、学生会員のみの扱いに変更されました。）

また、従来は、雑誌購読費を支払っていた方のみ Scientiae Mathematicae Japonicae (Print 版) を配布する扱いでありましたが、2012 年度中より正会員（国内）の方全員に、配布の扱いに変更しております。これについては、各会員の反応もおおむね好評であることから、2013 年度も引続き同様の扱いと致します。

なお、上記の変更に伴い、高齢会員の正確な認定や今後の協会運営データに資する目的で、「国際数理科学協会入会申込書」（葉書による形式）をお送りいたしますので、ご返送願います。また、この事務処理に伴い、昨年度までは、「会費振込依頼書」を年内 12 月中送付しておりましたが、年明け 1 月中に、送付いたします。

＊寄稿

順序線形位相空間に値をとる非加法的測度について

新潟大学自然科学研究科博士研究員/日本大学理工学部非常勤講師
渡辺俊一

1　導入

多くの研究者が述べているように非加法的測度論における研究指針の一つは，測度の非加法性のために不成立となる測度論の重要定理に着目し，その成立のために測度に課すべき必要な条件 (可能ならば必要十分条件) を見出すことである．このことの代表的な定理として Egoroff の定理と Lusin の定理がある．現在得られている結果で比較的分かりやすが深い結果として実数値に値をとる場合の結果で 2011 年に Li と Mesir により得られた, Egoroff の定理から Lusin の定理を導く研究がある．自身は現在, これがベクトルに値をとる場合, 空間にどのような条件が必要であるかということに対し興味を持ち研究を進めている．

本稿では, 特に順序線形位相空間に値をとる場合での, Egoroff の定理から Lusin の定理を導く結果を報告したいと思う．証明を詳細に述べられないことなど, 大変申し訳なく思いますが, 各文献をあたっていただければと思っております．

2　先行研究

ここでは非加法的測度論における Egoroff の定理, Lusin の定理について先行研究をまとめておく．Egoroff の定理についての先行研究としては, 実数値に値をとる非加法的測度の研究が多く知られている．Li[10] による、実数値非加法的測度がファジィ測度の場合に対して Egoroff の定理の成立を述べたもの, 室伏ら [16] による, Egoroff の定理成立のための必要十分を示しファジィ測度でないいくつかの測度の場合に Egoroff の定理の成立するための測度の条件を示した, それぞれの場合, 互いに他を含まない条件であることを示している．これを受けてベクトル空間に値をとる場合として, 河邊 [7, 8] は Riesz 空間における順序による収束構造を用いて Riesz 空間値の非加法的測度について室伏、Li らの結果を考察した．もうひとつのテーマである Lusin の定理については実数値に値をとる非加法的測度については, Wu and Ha[27] は測度が有限自己連続 (finite autocontinuous) なファジィ測度である場合に Lusin の定理を述べたが, これは Jiang と Suzuki[5] により σ-有限自己連続 (σ-finite autocontinuous) なファジィ測度の場合に拡張された．その後, Song と Li[18] により零加法的 (null-additive) なファジィ測度の場合が, Li と安田 [13] により弱零加法的 (weakly null-additive) なファジィ測度の場合に定理の成立が示された．ベクトル空間に値をとる場合としては, 河邊 [9] による, Li と安田の結果を Riesz 空間に値をとるファジィ測度の場合で議論したものがある．最近, Li と Mesiar[12] により pseudometric generating property をもつ monotone 測度の場合での定理の成立が示された。

3 準備

以下では, N を自然数全体, R を実数全体, Θ を N から N への中への写像全体とする．実数係数の線形空間 E が次の (1), (2) の意味で線形演算と両立する順序関係 $x \leq y$ を持つとき，E を順序線形空間という:

(1) $x \leq y$ ならば $x + z \leq y + z$,
(2) $x \leq y, \lambda \geq 0$(λは実数) ならば $\lambda x \leq \lambda y$.

線形空間 E 上の位相が線形位相であるとは, 次の (1), (2) の写像が連続であることである,

(1) $(x, y) \mapsto x + y$
(2) $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$

ここで $x, y \in E$, $\alpha \in R$ とする．

E を順序線形空間とする．E の部分集合 F が full であるとは $x_1, x_2 \in F$ かつ $x_1 \leq x_2$ ならば $[x_1, x_2] = \{x \in F \mid x_1 \leq x \leq x_2\} \subset F$ であることである．E 上に線形位相を考え, $\mathcal{B}_0$ を $0 \in E$ の近傍系とする．E 上の線形位相が locally full 位相 (topology) であるとは, full 集合 (sets) からなる $\mathcal{B}_0$ の基底が存在するときをいう．この位相を備えた順序線形空間を [3] に従い順序線形位相空間（ordered topological vector space ）と呼ぶ. 以下では $(X, \mathcal{F})$ は可測空間, すなわち, $\mathcal{F}$ は空でない集合 X の部分集合からなる$\boldsymbol{\sigma}$集合体. E を順序線形位相空間（ordered topological vector space) とする．$\{u_n\}$ を E での列, $u \in E$ としたとき, $\{u_n\}$ が u へ収束することを $u_n \to u$ と表し, その意味は E 上の線形位相についてものとする, すなわち, 任意の $U \in \mathcal{B}_0$ に対し $n_0 \in N$ が存在し, 任意の $n \geq n_0$ に対し $u_n - u \in U$ となることである.

定義 3.1. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to E$ は

(i) $\mu(\emptyset) = 0$
(ii) $A, B \in \mathcal{F}$ で $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ (単調増加性)

を満たすとき, 非加法的測度 (*non-additive measure*) であるという.

定義 3.2. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to E$ は非加法的測度とし, E を順序線形位相空間とする.

(1) 集合列 $\{A_n\}_{n \in \mathrm{N}} \subset \mathcal{F}$ と $A \in \mathcal{F}$ が $A_n \searrow A$ を満たすとき,$\mu(A_n) - \mu(A) \to 0$ となるとき, μ は上から連続 (*continuous from above*) であるという.
(2) 集合列 $\{A_n\}_{n \in \mathrm{N}} \subset \mathcal{F}$ と $A \in \mathcal{F}$ が $A_n \nearrow A$ を満たすとき,$\mu(A) - \mu(A_n) \to 0$ となるとき, μ は下から連続 (*continuous from below*) であるという.
(3) μ が上から連続かつ下から連続である場合, ファジィ測度であるという.
(4) μ が強順序連続 (*strongly order continuous*) であるとは, 測度 0 の集合上で上から連続であることである, すなわち, $A_n \searrow A$, $\mu(A) = 0$ を満たす任意の $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ と $A \in \mathcal{F}$ に対し $\mu(A_n) \to 0$ が成り立つ.

(5) μ が性質 (S) をもつとは, 任意の $U \in \mathcal{B}_0$ に対し n_0 が存在し任意の $n \geq n_0$ に対し $\mu(A_n) \in U$ を満たす任意の列 $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ に対し部分列 $\{A_{n_k}\}$ が存在し $\mu(\cap_{i=1}^{\infty} \cup_{k=i}^{\infty} A_{n_k}) = 0$ を満たすことである; [19] を参照.

(6) μ が弱零加法的 (*weakly null-additive*) であるとは, $A, B \in \mathcal{F}$ が $\mu(A) = \mu(B) = 0$ であるならば $\mu(A \cup B) = 0$ となることである.

(7) μ が可算弱零加法的 (*countably weakly null-additive*) であるとは, $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ であり, 任意の $n \in N$ に対し $\mu(A_n) = 0$ であるならば $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$ となることである.

(8) μ が零連続 (*null-continuous*) であるとは, 任意の $n \in N$ に対し $\mu(A_n) = 0$ であるような各増大列 $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ に対し $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$ が成り立つことである; [2] を参照.

4 Egoroff の定理

定義 4.1. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to E$ は非加法的測度とする.

(1) *2* 重集合列 $\{A_{m,n}\} \subset \mathcal{F}$ は

 (D1) $m, n, n' \in \mathrm{N}$ で $n \leq n'$ ならば $A_{m,n} \supset A_{m,n'}$

 (D2) $\mu(\cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=1}^{\infty} A_{m,n}) = 0$

 を満たすとき, $\mathcal{F}$ において μ-*regulator* であるという.

(2) μ が *Egoroff* 条件を満たすとは, 任意の μ-regulator $\{A_{m,n}\}$ と任意の $U \in \mathcal{B}_0$ に対し $\theta \in \Theta$ が存在し $\mu(\cup_{m=1}^{\infty} A_{m,\theta(m)}) \in U$ となることである.

注1) 非加法的測度 μ が Egoroff 条件満たすなら (逆も言えて), 任意の 2 重数列 $\{A_{m,n}\} \subset \mathcal{F}$ が (D2) と次の (D1$'$) を満たすとき, 任意の $U \in \mathcal{B}_0$ に対し $\theta \in \Theta$ が存在し $\mu(\cup_{m=1}^{\infty} A_{m,\theta(m)}) \in U$ を満たす.

(D1$'$) もし $m \geq m'$ かつ $n \leq n'$ ならば $A_{m,n} \supset A_{m',n'}$ が成立する.

定義 4.2. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to E$ は非加法的測度で, $\{f_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ は X 上の $\mathcal{F}$-可測な実数値関数, f もそのような関数とする.

(1) 集合 $E \in \mathcal{F}$ で $\mu(E) = 0$ であるものが存在して, 任意の $x \in X - E$ に対して $f_n(x) \to f(x)$ が成り立つとき, $\{f_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ は f に μ-概収束するという.

(2) 単調減少な有向集合族 $\{E_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{r}} \subset \mathcal{F}$ で $\mu(E_\alpha) \searrow 0$ が存在して, 各 $X - E$ 上で f_n が f に一様収束するとき, $\{f_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ は f に μ-概一様収束するという

(3) X 上の $\mathcal{F}$-可測な実数値関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ が X 上の $\mathcal{F}$-可測な実数値関数 f に μ-概収束すれば常に μ-概一様収束するとき, *Egoroff* の定理が μ に対して成立するという.

次の定理は [16, Proposition 1] の順序線形位相空間への拡張になっている.

定理 4.3. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to E$ は非加法的測度とする. このとき次の条件は同値:

(i) Egoroff の定理が μ に対して成立する.

(ii) μ は Egoroff 条件を満たす.

Proof. [22] を参照されたい. □

5 Egoroff の定理の成立条件

本節では Egoroff の定理の成立条件について述べておく.

定義 5.1. *E における 2 重数列 $\{r_{m,n}\}$ が 位相的 (topological) regulator であるとは, 次の 2 つの条件を満たすことである.*

(1) 任意の $m, n \in N$ に対し $r_{m,n} \geq r_{m,n+1}$ が成り立つ.
(2) 任意の $m \in N$ に対し $r_{m,n} \to 0$ が成り立つ.

定義 5.2. *E が proprety (EP) をもつとは, E における任意の位相的* topological regulator *$\{r_{m,n}\}$ に対し, 列 $\{p_k\}$ で次の 2 つの条件を満たすものが存在する.*

(1) $p_k \to 0$ が成り立つ.
(2) 任意の $k \in N$ と任意の $m \in N$ に対し $n_0(m, k) \in N$ が存在し任意の $n \geq n_0(m, k)$ に対し $r_{m,n} \leq p_k$ が成り立つ.

定理 5.3. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to E$ は非加法的測度で以下の (1), (2) を満たすとする.

(1) *strongly order continuous.*
(2) *property* (S).

E は *property* (EP) を満たすとする. このとき μ は *Egoroff* 条件を満たす.

Proof. [22] を参照されたい. □

後にあげる $L_p([0,1])$ $(0 < p < \infty)$ は, 上記で述べた理論が適用可能な順序線形位相空間の例となっている.

6 Egoroff 条件の特徴づけ

以下の議論においては, 順序線形位相空間 E は Hausdorff かつ第一可算公理を満たすことを仮定する. この節の議論は主に [2] と [12] における議論と同様である. [25] も参照されたい.

まず, [16, Proposition 3] から以下の補題を得る.

補題 6.1. *$\mu : \mathcal{F} \to E$ を非加法的測度とする. μ が Egoroff 条件を満足するならば, μ は強順序連続である.*

定義から以下の命題, 補題を得る.

命題 6.2. *$\mu : \mathcal{F} \to E$ を非加法的測度とする. μ が可算弱零加法的 (countably weakly null-additive) であることは μ が弱零加法的 (weakly null-additive) であり, 零連続 (null-continuous) であることと同値である.*

補題 6.3. *$\mu : \mathcal{F} \to E$ を非加法的測度とする. μ が弱零加法的 (weakly null-additive) であり強順序連続 (strongly order continuous) であるならば, μ は零連続 (null-continuous) である.*

Proof. 定義から [2, 命題 9] における議論と同様である. □

命題 6.4. $\mu : \mathcal{F} \to E$ を非加法的測度とする. μ が弱零加法的 (*weakly null-additive*) であり強順序連続 (*strongly order continuous*) であるならば, μ は可算弱零加法的 (*countably weakly null-additive*).

Proof. 定義より従う. □

補題 6.1 から, 以下が成立する.

命題 6.5. $\mu : \mathcal{F} \to E$ を非加法的測度とする. もし μ が弱零加法的 (*weakly null-additive*) で *Egoroff* 条件を満たすならば μ は零連続 (*null-continuous*) で可算弱零加法的 (*countably weakly null-additive*) である.

Proof. 定義より従う. □

従って Egoroff 条件の定義から以下を得る.

命題 6.6. $\mu : \mathcal{F} \to E$ を非加法的測度とする. 以下の (i), (ii) は同値 :
(i) μ は *Egoroff* 条件を満たす.
(ii) 任意の $U \in \mathcal{B}_0$ と 二重点列 $\{A_{m,n}\} \subset \mathcal{F}$ で, $n \to \infty$ の場合 $A_{m,n} \searrow D_m$ となり, 各 $m \in N$ に対し $\mu(D_m) = 0$ を満たすものに対し $\theta \in \Theta$ が存在し $\mu\left(\cup_{m=1}^{\infty} A_{m,\theta(m)}\right) \in U$ が成立する.

Proof. 定義より従う. □

命題 6.5 と 6.6 から, 以下の補題を得る.

補題 6.7. $\mu : \mathcal{F} \to E$ を非加法的測度とする. 以下の (i), (ii) は同値 :
(i) μ は弱零加法的 (*weakly null-additive*) であり *Egoroff* 条件を満たす.
(ii) 任意の $U \in \mathcal{B}_0$ と二重点列 $\{A_{m,n}\} \subset \mathcal{F}$ で, $n \to \infty$ の場合 $A_{m,n} \searrow D_m$ となり, 各 $m \in N$ に対し $\mu(D_m) = 0$ を満たすものに対し $\theta \in \Theta$ が存在し $\mu\left(\cup_{m=1}^{\infty} A_{m,\theta(m)}\right) \in U$ が成立する.

Proof. 定義より従う. □

7 非加法的測度の正則性

X を Hausdorff 空間とし, $\mathcal{B}(X)$ は X の Borel 部分集合からなる σ-field とする. このとき $\mathcal{B}(X)$ で定義される非加法的測度は X 上の非加法的 Borel 測度と呼ばれる.

定義 7.1. $\mu : \mathcal{F} \to E$ を X 上の非加法的 *Borel* 測度とする. μ が正則であるとは, 任意の $U \in \mathcal{B}_0$ と $A \in \mathcal{B}(X)$ に対し, 閉集合 F_U と開集合 G_U が存在し以下を満たすことである.

$$F_U \subset A \subset G_U \text{ かつ } \mu(G_U \setminus F_U) \in U.$$

定理 7.2. *X を距離空間とし, $\mathcal{B}(X)$ を X の Borel 部分集合からなる σ-体, $\mu : \mathcal{B}(X) \to E$ は X 上の非加法的 Borel 測度で*

(1) *Egoroff 条件.*

(2) *pseudometric generating property.*

を満たすとする. このとき μ は正則となる.

Proof. 補題 6.7 と, μ は Egoroff 条件 を満たすから強順序連続 (strongly order continuous) であることにより [24, 定理 3.6] と同様に示せる. □

以下では, ファジィ測度でない非加法的測度の例, Egoroff 条件, pseudometric generating property に関する非加法的測度の例をあげる.

例 7.3. *ファジィ測度でない非加法的測度の例. $X = [0,1]$ を距離 $d(x,y) = |x-y|$ で与えられる距離空間, $\mathcal{B}(X)$ を X の Borel 部分集合からなる σ-field, m を $\mathcal{B}(X)$ 上の Lebesgue 測度とする.*

$$\mu(A) = \begin{cases} a \cdot m(A) & m(A) < 1 \text{ の場合 }, \\ 1 & m(A) = 1 \text{ の場合 }, \end{cases}$$

で μ を定義する. ただし $0 < a < 1$, このとき μ は非加法的測度. また, m は Lebesgue 測度より, μ は Egoroff 条件と pseudometric generating property を満たす. しかしながら μ は下から連続 (continuous from below) でない. 実際, $A_n = \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] \cup \{1\}$, $n \in N$ ととるとき, $A_n \nearrow X$. しかしながら $\mu(A_n) = a \cdot m(A_n) = a \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \nearrow a < 1 = \mu(X)$ である.

例 7.4. *Egoroff 条件を満たすが pseudometric generating property でない非加法的測度の例. $(X, \mathcal{B}(X), m)$ を例 7.3 と同様とする.*

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & m(A) < 1 \text{ の場合 }, \\ 1 & m(A) = 1 \text{ の場合 }, \end{cases}$$

で μ を定義する. このとき μ は非加法的測度. また, 明らかに μ は Egoroff 条件を満たす. しかしながら μ は弱零加法的 (weakly null-additive) でない. すなわち, pseudometric generating property とならない.

例 7.5. *pseudometric generating property を満たすが, Egoroff 条件を満たさない非加法的測度の例. $(X, \mathcal{B}(X), m)$ を例 7.3 と同様とする.*

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & m(A) = \emptyset \text{ の場合 }, \\ 1 & m(A) \neq \emptyset \text{ の場合 }, \end{cases}$$

で μ を定義する. このとき μ は非加法的測度. また, μ は pseudometric generating property を満たすが Egoroff 条件を満たさない.

定理 7.6. *$\mu : \mathcal{B}(X) \to E$ を X 上の Borel-可測な非加法的測度で*

(1) *Egoroff 条件.*

(2) *pseudometric generating property.*

を満たすとする．このとき $\{f_n\}$ を *Borel*-可測な X 上の実数値関数の列，f もそのような関数とする．もし $\{f_n\}$ が f に μ-概収束するとしたとき，増大列 $\{A_m\} \subset \mathcal{B}(X)$ が存在し $\mu(X \setminus \cup_{m=1}^{\infty} A_m) = 0$ を満たし $\{f_n\}$ は f に各 m に対し A_m 上 μ-概一様収束する．

Proof. [24, 定理 4.2] と同様に示せる． □

定理 7.7. X を距離空間とし，$\mu : \mathcal{B}(X) \to E$ は X 上の非加法的 *Borel* 測度で

(1) *Egoroff* 条件.
(2) *pseudometric generating property.*

を満たすとする．$\{f_n\}$ を *Borel*-可測な X 上の実数値関数の列，f もそのような関数とする．もし $\{f_n\}$ が f に μ-概収束するとしたとき，任意の $U \in \mathcal{B}_0$ に対し，閉集合 F_U が存在し $\mu(X \setminus F_U) \in U$ であり，$\{f_n\}$ は F_U 上で f に μ-概一様収束する．

Proof. 定理 7.6 と補題 6.7 により，[24, 定理 4.3] と同様に示せる． □

定理 7.8. X を距離空間とし，$\mu : \mathcal{B}(X) \to E$ は X 上の非加法的 *Borel* 測度で

(1) *Egoroff* 条件.
(2) *pseudometric generating property.*

を満たすとする．f が *Borel* 可測な X 上の実数値関数であるとしたとき，任意の $U \in \mathcal{B}_0$ に対し，閉集合 F_U が存在し $\mu\,(X \setminus F_U) \in U$ であり，f は F_U 上連続である．

Proof. (a) f が単関数の場合，(b) f が一般の関数の場合に分けて証明を行うが，(a) f が単関数の場合は定理 7.2 より，μ は正則であることが言え，補題 6.7 を介して，主張が従う．(b) f が一般の関数の場合は (a) の場合，補題 6.7，定理 7.6，ならびに弱零加法的 (weaklly null-additivity) より [23, 定理 5] と同様にして，主張が従う，[24, 定理 5.1] も参照． □

[22, Theorem 3]，定理 5.3 と定理 7.8 により以下の系を得る．

系 7.9. X を距離空間とし，$\mu : \mathcal{B}(X) \to E$ は X 上の非加法的 *Borel* 測度で

(1) 弱零加法的 (*weakly null additive*)，または *pseudometric generating property,*
(2) 強順序連続 (*strongly order continuous*),
(3) 性質 (S),

を満たすとする．さらに E は性質 (EP) を満たすとする．このとき，f が *Borel* 可測な X 上の実数値関数であるとしたとき，任意の $U \in \mathcal{B}_0$ に対し，閉集合 F_U が存在し $\mu\,(X \setminus F_U) \in U$ であり，f は F_U 上連続である．

[22, Theorem 4] と定理 7.8 により，以下を得る．

系 7.10. X を距離空間とし，$\mu : \mathcal{B}(X) \to E$ は X 上の *Fuzzy Borel* 測度で

(1) 弱零加法的 (*weakly null additive*) または *pseudometric generating property*

を満たすとする．さらに E は局所凸であるとする．このとき, f が *Borel* 可測な X 上の実数値関数であるとしたとき, 任意の $U \in \mathcal{B}_0$ に対し, 閉集合 F_U が存在し $\mu(X \setminus F_U) \in U$ であり, f は F_U 上連続である．

8　適用例

ここでは, 上記で述べた理論が適用可能な順序線形位相空間の例をあげる．

例 8.1. $L_p([0,1])$ を [0, 1] 上で定義された *Lebesgue* 可測な実数値関数で $\int_0^1 |f(x)|^p d\mu < \infty (0 < p < \infty)$ を満たすものとする． $L_p([0,1])$ は各点の順序により *Riesz* 空間になる． $L_p([0,1])$ は局所 *solid* 空間でもある, [1, e.g. 8.6] 参照．もし *Riesz* 空間の 位相が局所 *solid* である場合, それは 局所 *full* でもある, [3, Chapter 7, Proposition 1] 参照．よって $L_p([0,1])$ は 順序線形位相空間．しかしながらその位相は必ずしも局所凸ではない．また, $L_p([0,1])$ は σ-*Lebesgue* 性を満たす, すなわち, 順序の意味で $L_p([0,1])$ の数列 $\{u_n\}$ が 0 に収束するならば 位相の意味でも収束する, [1, e.g. 8.6] 参照． $L_p([0,1])$ は順序の意味での (EP) 性に相当する *Egoroff* 性 ([8] 参照) を持つ, 証明については [15, Section 71] 参照．従って $L_p([0,1])$ は (EP) 性を持つ．このとき, 系 *7.9* より, $L_p([0,1])$ に値を取る μ に対して理論が適用可能となる．ハウスドルフ空間であること, 第一可算性も満たしていることが言えるので, 直接的に, 定理 *7.2, 7.6, 7.7, 7.8* の主張が従うことも言える．

例 8.2. $C^\infty(R^n)$ を任意階数の連続な微分を持つ実数値関数の全体からなる空間とする． $C^\infty(R^n)$ は *Riesz* 空間とならない局所凸である順序線形位相空間である; [3, page 159] を参照．また, 明らかに $C^\infty(R^n)$ は第一可算であり, ハウスドルフ空間である．このとき $C^\infty(R^n)$ に値を取る μ に対して理論が適用可能となる．

9　あとがき

自身は 2007 年に大阪府立大学名誉教授の中西シヅ先生より信州大学の河邊先生の研究を教えていただき, それを契機に, 特にベクトル値の非加法的測度の研究を続けさせていただいております．幸運にも最初の論文が, 掲載され, その後, さらに幸運なことに 新潟大学の田中環先生の下で学位を取得させていただきました．今現在, 周りの方々の助けをいただき, 少しづつではありますが, 研究を進めらているようにも思えます．測度, 積分, Fuzzy 数学, 順序 など, どれをとっても奥深い魅力があります．それらの真理に少しでも近づき, それらを生かし, さまざまな研究にほんのわずかでも貢献できるようになれればと思っております．

参考文献

[1] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics,* second edition, American Mathematical Society, 2003.

[2] S. Asahina, K. Uchino and T Murofushi, *Relationship among continuity conditions and null-additivity conditions in non-additive measure theory,* Fuzzy sets and Systems **157** (2006), 691-698.

[3] R. Cristescu, *Topological vector spaces,* Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977.

[4] D. Denneberg, *Non-Additive Measure and Integral,* second ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[5] Q. Jiang and H. Suzuki. (1996). Fuzzy measures on metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems* **83**: 99–106.

[6] Q. Jiang, S. Wang and D. Ziou. (1999). A further investigation for fuzzy measures on metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems* **105**: 293–297.

[7] J. Kawabe, *The Egoroff theorem for non-additive measures in Riesz spaces,* Fuzzy sets and Systems **157** (2006), 2762-2770.

[8] J. Kawabe, *The Egoroff property and the Egoroff theorem in Riesz space-valued non-additive measure,* Fuzzy sets and Systems **158** (2007), 50-57.

[9] J. Kawabe, *Regularity and Lusin's theorem for Riesz space-valued fuzzy measures,* Fuzzy sets and Systems **158** (2007), 895-903.

[10] J. Li, *On Egoroff's theorems on Fuzzy measure spaces,* Fuzzy sets and Systems **135** (2003), 367-375.

[11] J. Li, *A further investigation for Egoroff's theorem with respect to monotone set functions,* Kybernetika **39** (2003), 753-760.

[12] J. Li and R. Mesiar *Lusin's theorem on monotone measure spaces,* Fuzzy sets and Systems **175** (2011). 75–86.

[13] J. Li and M. Yasuda, *Egoroff's theorem on monotone non-additive measure spaces,* Fuzzy sets and Systems **153** (2005), 71-78.

[14] J. Li, M. Yasuda, Q. Jiang, H. Suzuki, Z. Wang and G.J. Klir, *Convergence of sequence of measurable functions on fuzzy measure spaces,* Fuzzy sets and Systems **87** (1997), 317-323.

[15] W.A.J. Luxemburg and A.C. Zannen, *Riesz spaces I,* North-Holland, Amsterdam, 1971.

[16] T. Murofushi, K. Uchino and S. Asahina, *Conditions for Egoroff's theorem in non-additive measure theory,* Fuzzy sets and Systems **146** (2004), 135-146.

[17] E. Pap, *Null-Additive Set Functions,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[18] J. Song and J. Li, (2003). Regularity of null-additive fuzzy measure on metric spaces. *International Journal of General Systems* **32**: 271–279.

[19] Q. Sun, (1994). Property (S) of fuzzy measure and Riesz's theorem. *Fuzzy sets and Systems* **62**: 117–119.

[20] Z. Wang, G.J. Klir, *Fuzzy Measure Theory,* Plenum Press, New York, 1992.

[21] T. Watanabe, *On sufficient conditions for the Egoroff theorem of an ordered vector space-valued non-additive measure*, Fuzzy sets and Systems **161** (2010), 2919–2922.

[22] T. Watanabe, *On sufficient conditions for the Egoroff theorem of an ordered topological vector space-valued non-additive measure*, Fuzzy sets and Systems **162** (2011), 79–83.

[23] T. Watanabe, T. Kawasaki, and T. Tanaka. *On Lusin's theorem for non-additive measure that take value in an ordered topological vector space,* Fuzzy Sets and Systems **194** (2012), 66–75.

[24] T. Watanabe and T. Tanaka. *Note on Lusin's theorem for non-additive measure that take value in an ordered topological vector space,* Proceedings of NACA 2011, to appear.

[25] T. Watanabe and T. Tanaka. *Non-additive measure that take value in an ordered topological vector space,* Fuzzy Sets and Systems submitted.

[26] Wu, C. and Ha, M. *On the regularity of the fuzzy measure on metric fuzzy measure spaces,* Fuzzy Sets and Systems **66** (1994), 373–379.

[27] Wu, J. and Wu, C. *Fuzzy regular measures on topological spaces,* Fuzzy Sets and Systems **119** (2001), 529–533.