一般社団法人

国際数理科学協会会報

No.84/2012.11

編集委員： 藤井淳一（委員長）

目次

来年度の年会方式変更のお知らせ

年会担当理事　熊谷悦生（大阪大学基礎工学研究科）

来年度開催予定の国際数理科学協会の年会に関しまして、やり方を少し変更し、

「８月下旬に開催し、会場は各分科会で設定」

という方式で行うことになりました。

開催分科会の募集に関しましては、

１）分科会名及び代表者名等

２）２０１３年８月下旬の開催予定日

３）分科会の予定会場

を明記して応募いただきますよう、よろしくお願い申し上げます。

SCMJ 誌への論文投稿要領の簡素化について

SCMJ 誌編集部

国際数理科学協会の論文誌 Scientiae Mathematicae Japonicae（略して SCMJ 誌）へ論文の投稿規程が複雑過ぎる、との苦情をよく聞かされますので、編集委員の先生方と相談し、論文の投稿要領を変更しました。**Submission Form** の記入事項もぐっと減らし、原稿と Form の送り先も **「協会事務局へ」に一元化**しました。原稿の作成には、$\LaTeX\,2_{\varepsilon}$を使い　本協会の JAMS style files を利用してソースファイルを作成と指定しました。その pdf ファイルで投稿してもらいます。詳しくは、ホームページの **For Authors** または　SCMJ 誌 Vol.75 No.2 (August 2012) の巻末ページの **“Call for Papers for SCMJ”** をご覧下さい。

2012 年度国際数理科学協会年次大会　報告 (9/6・7 実施分)

「代数, 論理, 幾何と情報科学」分科会研究集会

日時：平成 24 年 9 月 6 日（木）～7 日（金）13：15～翌 13：00

場所：九州工業大学、　　　講演数：9 件、参加者：20 名

世話人：古澤 仁（鹿児島大学理学部）・西澤弘毅（鳥取環境大学）

発表者、題目

平成 24 年 9 月 6 日（木）13：15～18：00

(1) 河原　康雄

「**Heyting** 代数値関係における所属関係」

(2) 只野　誉（大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻）

「**Dynamical construction of numerical Kahler-Einstein metric on toric del Pezzo surfaces**」

(3) 津曲紀宏（京都大学 数理解析研究所）

「**Galois connections for abstraction of probabilistic systems**」

(4) 木下佳樹（**AIST**）

「システムの妥当性確認の定理証明支援系による支援」

(5) 丸山善宏（オックスフォード大学大学院）

「**Categorical Universal Logic:Lawvere-Tierney Topology and Logical Translation**」

9 月 7 日（金）10：00～13：00

(6) 西澤 弘毅（鳥取環境大学）

「**weak split fork** について」

(7) 萩尾由貴子（久留米大学）, 鴨浩靖, 溝口涼子（奈良女子大学）

「三角形に関する平面ユークリッド幾何への数式処理の応用」

(8) 倉永 崇（名古屋大学大学院 多元数理科学研究科）

「動的意味論の代数解析学的展開をさぐる」

(9) 田中慎一（（株）日立ソリューションズ）

「量子論理における含意結合子の強弱関係」

上記講演の概要や当分科会の活動に関しては

`http://sakura.math.kyushu-u.ac.jp/algi/23/program.htm`

をご覧下さい。

＊寄稿（年会報告分）

秘書問題の最近の話題

愛知大学経営学部　　玉置 光司

1　はじめに

最適停止問題 (optimal stopping problem) の中で重要な位置を占める秘書問題 (secretary problem) の最近の話題－ Planar Poisson Process と Odds Theorem －を中心に紹介する。秘書問題に関しては様々な切り口があるが、本稿の構成は以下のようである。2 節では、秘書問題の紹介も兼ねて、利用可能な情報という観点から、3 つの情報型（無情報型、完全情報型、部分情報型）に分類し、それぞれに対する基本問題（最良選択問題、ランク最小化問題）の主要結果をまとめた。また、保持時間最大化問題に対しても、無情報型と完全情報型の結果を与えた。これらは必ずしも最近の話題ではないが、3.3 節と関連する部分があるので最初に紹介した。3 節では平面ポアソン過程（planar Poisson process、PPP と略す）の考え方を紹介する。完全情報型や部分情報型問題の漸近値を有限問題の極限として求めることは、一般に困難である。最初から無限問題の枠組みとして PPP を導入すると、しばしば見通しよく漸近値を求めることができる。4 節では無情報型最良選択問題の一般化として Odds Theorem を紹介する。最後の 5 節では、その他の話題に簡単に触れる。
秘書問題は一般に逐次観測と最適選択の問題と言われるが、その厳密な定義は存在しない。Ferguson(1989) は”My definition is: A secretary problem is a sequential observation and selection problem in which the payoff depends on the observations only through their relative ranks and not otherwise on their actual values”と述べている。このあたりが妥当な定義かと思われる。多くのサーベイ論文が存在するが、定評があるのは Ferguson(1989) と Samuels(1991) である。秘書問題の基礎を築き、研究の魁となったのは、Gilbert and Mosteller(1966) である。この論文には、その後の発展の萌芽が数多く含まれている。関心をお持ちの方には一読をお勧めする。

2　基本問題の主要結果

”Who solved the secretary problem ?”と題した Ferguson(1989) のサーベイ論文は、主要な文献を紹介しながら時間を遡って秘書問題のルーツを探っていく。そして、活字になった最初の文献として、Scientific American 1960 年 2 月号に載った Gardner(1960) による Mathematical games のコラムにたどり着く。このコラムには秘書問題という言葉は現れない、グーゴル (Googol) と呼ばれる数当てゲームとして紹介されている。グーゴルにはもともと 10^{100}、あるいは天文学的な大きな数という意味があり、このゲームは次のように述べられている。

(Googol) 誰かに好きな枚数だけカードを取らせて、それぞれのカードの表に 1 つずつ異なった正の数字を書かせなさい。数字は限りなく 0 に近い小さな数でもよいし、グーゴルのような大きな数、あるいはそれ以上の数であってもかまわない。数を書き終えたら、カードを重ねてよくシャッフルし、表を下にしてテーブルの上に置く。あなたは上から 1 枚ずつカードをめくり、そこに書かれている数字を見ていく。そして全体の中で 1 番大きな数字が出たと思ったら、そこでストップする（そのカードを選ぶ)。前のカードに戻ることは許されないし、すべてのカードをめくってしまったら、最後のカードを選ばな

ければならない。１番大きな数字を選ぶことができたらあなたの勝ちです。

Scientific American １９６０年３月号に、早速グーゴルの解が紹介されているが、それはこのゲームを下記の無情報型最良選択問題と見なしたものであった。

2.1 無情報型問題 (no information problem)

秘書の採用という文脈で、最も単純なクラスの問題の性質 (特徴) を列挙することから始めよう。

1 秘書の採用は１人である。
2 応募者総数 n は既知である (便宜上、毎時１人ずつ出現するものとする)。
3 応募者はランダムな順序で面接に臨む。すなわち、$n!$ 通りの面接順序は等確率で起こる。
4 採用側は応募者を評価することができる。すなわち、応募者を一堂に集めれば、1(最良) から n (最悪) まで順位 (絶対順位) をつけることができる。実際は１人ずつ出現するので、採否の決定は応募者の相対順位 (既に面接をすませた人の間での順位) に基づいて行われる。
5 一度断った人を後から採用することは許されない。
6 絶対順位 i の者を採用したときの損失を $q(i)$ とする。採用側の選択基準は期待損失を最小にすることである。

性質 3 より、r 番目の応募者の相対順位 A_r は次の性質を持つことが分かる。

(i) $A_1, \ldots, A_n$ は独立な確率変数列となる。
(ii) $P(A_r = s) = 1/r,\ \ 1 \le s \le r,\ 1 \le r \le n$。

したがって、r 番目の応募者の相対順位が s である状態を (r, s) で表すと、このとき、この応募者の真の順位（絶対順位）が i である確率は次式で与えられる。

$$p_i(r,s) = \binom{i-1}{s-1}\binom{n-i}{r-s}\Big/\binom{n}{r}, \quad s \le i \le n+s-r$$

故に、(r, s) において最適決定を取った時の期待損失 $v(r, s)$ は次の最適方程式を満足する。

$$v(r,s) = \min\left\{\sum_{i=s}^{n+s-r} q(i)p_i(r,s),\ \frac{1}{r+1}\sum_{t=1}^{r+1} v(r+1,t)\right\}, \quad v(n,s) = q(s)$$

このクラスの中でも、とりわけ多くの研究者が関心を払ってきた基本問題は次の２つである。

(a) 最良選択問題 (best-choice problem) : $q(1) = 0,\ q(i) \equiv 1,\ 2 \le i \le n$。
(b) ランク最小化問題 (rank minimization problem) : $q(i) = i,\ 1 \le i \le n$。

問題 (a) は確率最大化問題 (probability maximization problem) とも呼ばれる。最良選択問題においては、選択の対象となるのは明らかに相対順位１の応募者（だけ）であるから、今後これを**候補者**と呼ぶ。無情報型問題の (a),(b) の解は次のように与えられる。

定理 1 (最良選択問題)**.** a_r を次式

$$a_r = \frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}, \quad 1 \le r < n$$

で定義し、$r_n = \min\{1 \le r < n : a_r \le 1\}$ とする。このとき、最適ルールはしきい値ルール r_n（最初の $r_n - 1$ 人を流し (断り)、それ以降の最初の候補者を選ぶルール）で与えられる。この時の成功確率は $\phi_n = (r_n - 1)a_{r_n - 1}/n$ となる。また、$n \to \infty$ とした時の漸近挙動は次のようになる。

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{n} = e^{-1} \approx 0.3679 \tag{1}$$

定理 2 (ランク最小化問題)**.** r の非減少関数 $s^*(r)$ が存在し、状態 (r, s) における最適決定は $s \le s^*(r)$ の時に限り応募者を採用することである。$n \to \infty$ のとき、期待順位は次式で与えられる。

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j+2}{j}\right)^{1/(j+1)} \approx 3.8695$$

この問題に関しては、Chow et al.(1964), Robbins(1991), Krieger and Samuel-Cahn(2009) を参照。

注 (1)　2.1 節の性質 2 を次のように変更する。

$2'$　応募者総数 N は未知である (ただし、N は分布が既知の確率変数)。

このとき、特に N が $(1, 2, \ldots, n)$ 上の一様分布、すなわち、$P\{N = k\} = 1/n, 1 \le k \le n$ の場合、次の結果が得られる。

- 最良選択問題：$n \to \infty$ のとき、成功確率は $2e^{-2} \approx 0.2707$(Presman and Sonin(1972))。
- ランク最小化問題：$n \to \infty$ のとき期待順位は無限大 (Gianini-Pettitt(1979))。

2.2　完全情報型問題 (full information problem)

2.1 節の性質 4 を次の $4'$ で置き換える。

$4'$　r 番目の応募者の評価値 (観測値) を X_r で表す。$X_1, \ldots, X_n$ は独立同分布に従う連続な確率変数列で、既知の (共通の) 分布関数 F を持つ。面接によって応募者の評価値が観測され、これに基づいて採否の決定が行われる。

応募者についての利用可能な情報が $4'$ で与えられる問題を完全情報型問題と呼ぶ。分布 F としては一般性を失うことなく、区間 $(0, 1)$ 上の一様分布を仮定することができる。これについて主要な結果を以下にまとめる。

定理 3 (最良選択問題)**.** r 番目の応募者が候補者（完全情報型の場合、$X_r = \max(X_1, \ldots, X_r)$ を意味する）で、その観測値が x である状態を (r, x) で表す。数列 $s_r, r = 1, 2, \ldots$ を $\sum_{j=1}^{r} \left(x^{-j} - 1\right)/j = 1$ の根 x として定義すると、状態 (r, x) における最適決定は $x \ge s_{n-r}$ の時に限って、r 番目の応募者を選ぶことで

ある。成功確率は $v_n = \left[1+\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{r} s_r^{n-j}/(n-j)\right]/n$ で与えられる (この表現は Sakaguchi(1973) が導出)。次の関数

$$I(c)=\int_1^{\infty}\frac{e^{-cx}}{x}dx, \quad J(c)=\int_0^1\frac{e^{cx}-1}{x}dx$$

を導入すると、$n\to\infty$ としたときの漸近的結果が次のように与えられる。

$$v=\lim_{n\to\infty}v_n=e^{-c_1}+(e^{c_1}-c_1-1)I(c_1)\approx 0.5802 \tag{2}$$

ただし、$c_1\approx 0.80435$ は $J(c)=1$ の根。このとき、$\lim_{n\to\infty}n(1-s_n)=c_1$ も成立する。

注 (2)　応募者総数 N が $(1,2,\ldots,n)$ 上の一様分布のとき、最良選択問題の成功確率 u_n は $n\to\infty$ のとき、次の値に近づく (Porosinski(1987), (2002), Samuels(2004), Gnedin(2004))。

$$u=\lim_{n\to\infty}u_n=(e^{c_2}-1)\,I(c_2)+\left(e^{-c_2}-c_2I(c_2)\right)J(c_2)\approx 0.4352 \tag{3}$$

ただし、$c_2\approx 2.1198$ は方程式 $1+J(-c)=e^{-c}\,(1-J(c))$ の根であり、次の関係も満たす。

$$(e^{c_2}-1)\,I(c_2)+\left(e^{-c_2}-c_2I(c_2)\right)J(c_2)=e^{-c_2}+(e^{c_2}-c_2-1)I(c_2) \tag{4}$$

ランク最小化問題についても完全情報型の研究が Bruss and Ferguson(1993), Assaf and Samuel-Cahn(1996), Bruss and Swan(2009) によって報告されているが、まだ完全には解明されていない。この問題の難しさは、最適決定が過去の観測値すべてに依存するところにある。すなわち、r 番目を選ぶか否かの決定は X_r の値だけでなく、$X_1,\ldots,X_{r-1}$ にも依存する。知られている主要な結果を以下に与える。

定理 4 (ランク最小化問題)**.** $\{a_i\}_{i=1}^n$ を増加列 (すなわち、$0\le a_1\le a_2\le\ldots\le a_n=1$) とし、$t_n=\min\{r: X_r\le a_r\}$ で定義される停止ルールをしきい値ルール t_n(停止か否かが現時点の評価値のみによって決まるルール。無情報型のしきい値ルールとは異なることに注意) と呼ぶ。しきい値ルール t_n の下で達成される期待順位は次式で与えられる。

$$g_n(t_n)=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k-1}(1-a_i)\right)\left[(n-k)a_k^2+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(a_k-a_j)^2}{1-a_j}\right]$$

さらに、$g_n=\inf_{t_n\in T_n}g_n(t_n)$ (T_n は可能なしきい値ルール t_n の集合を表す) とし、$g=\lim_{n\to\infty}g_n$ とすると、次のことが示される。

$$2.295<g<2.327$$

2.3　部分情報型問題 (partial information problem)

利用可能な情報が性質 $4'$ で与えられる問題を完全情報型の問題と呼んだが、そこにおいて分布 F が未知パラメータを含む場合を特に部分情報型問題と呼ぶ。例えば、Stewart(1978) は、$X_1,\ldots,X_n$ がそれぞれ独立に区間 $(\alpha,\ \beta)$ 上で一様分布する場合の最良選択問題を考察した。ただし、2 つのパラメータ α,β の値は未知で、その事前分布が 3 つのパラメータ (これは既知) を持つ 2 変量パレート分布 $Pa(k,l_0,u_0)$

に従うものとしてベイジアンの立場からこの問題を解いた。$Pa(k, l_0, u_0), k > 0, l_0 < u_0$ の密度関数は次式で与えられる。

$$f(\alpha, \beta \mid k, l_0, u_0) = \frac{k(k+1)(u_0 - l_0)^k}{(\beta - \alpha)^{k+2}}, \quad \alpha < l_0, \quad u_0 < \beta$$

Petruccelli(1978) は、$X_1, \ldots, X_n$ が $N(\mu, \sigma^2)$ に従う場合 (μ が未知) を、Petruccelli(1980) は $X_1, \ldots, X_n$ が区間 $(\theta - 0.5, \theta + 0.5)$ で一様分布する場合 (θ が未知) を考察した。次の定理が漸近的な結果を与える。

定理 5 (最良選択問題)**.** n を大きくした時の漸近的成功確率は次のようになる。

(i) Stewart (1978) : $e^{-1} \approx 0.3679$ (無情報型に一致)。
(ii) Petruccelli (1978) : $v \approx 0.5802$ (完全情報型に一致。v の定義は（2）)。
(iii) Petruccelli (1980) : $u \approx 0.4352$ (無情報型と完全情報型の中間。 u の定義は（3）)。

注 (3)　部分情報型問題は、上記以外にも研究されている。例えば、Campbell and Samuels(1981) はトレーニング・サンプル (training sample) という概念を導入して、特別な場合として、無情報型問題と完全情報型問題を包含する問題を解いた。Tamaki(1988) は Stewart(1978) のベイジアン問題を一般化した。部分情報型ランク最小化問題はまだ研究されていないように思われる。

2.4　保持時間最大化問題

T_k を時刻 k より後の最初の候補者の出現時刻とする (候補者が出現しない場合は $T_k = n + 1$ と解釈する)。そして、時刻 k で候補者を選んだ時、この候補者の保持時間を $(T_k - k)/n$ で定義する。Ferguson, Hardwick and Tamaki(1992) は保持時間の期待値を最大にする候補者選択問題を種々な条件下で考察した。無情報型、完全情報型の結果を以下に示す。

定理 6 (無情報型問題)**.** $s_n = \min\{1 \le r < n : b_{r+1} \le a_{r+1} + 1/n\}$ と定義する。ただし、a_r は定理 1 で定義され、b_r は次式で定義される。

$$b_r = \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{k-1} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}, \quad 1 \le r < n$$

このとき、最適ルールはしきい値ルール s_n となり、期待保持時間は $h_n = (s_n - 1) b_{s_n - 1}/n$ で与えられる。漸近挙動は、次のようになる。

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{n} = e^{-2}, \quad \lim_{n \to \infty} h_n = 2e^{-2}$$

定理 7 (完全情報型問題)**.** r 番目の応募者が候補者で、その観測値が x である状態を (r, x) で表す。数列 $t_r, r = 1, 2, \ldots,$ を $\sum_{k=1}^{r} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{r-1} x^{k-1} \sum_{j=1}^{r-k} (1 - x^j)/j$ の根 x として定義すると、状態 (r, x) における最適決定は $x \ge t_{n-r}$ の時に限って r 番目の応募者を選ぶことである。期待保持時間は $w_n = [d_n + \sum_{j=1}^{n} j^{-1} \sum_{r=n-j}^{n-1} (d_{n-j} - d_{r-n+j} - 1) t_r^j]/n$ で与えられる。ただし、$d_0 = 0, d_i = \sum_{j=1}^{i} j^{-1}, i \ge 1$。また、次式

$$\int_0^{c_3} e^y \left[1 - \int_0^y \frac{1}{x}(1 - e^{-x}) dx\right] dy = 0$$

の根 $c_3 \approx 2.1198$ に対して、$\lim_{n \to \infty} n(1 - t_n) = c_3$ が成立する。

漸近値は次のように与えられる (Mazalov and Tamaki(2006))。

$$w = \lim_{n \to \infty} w_n = \int_0^1 e^{-\frac{c_3}{u}} du \left\{ \int_0^u \left(\frac{e^{c_3 t/u} - 1}{t} + \frac{e^{c_3 t/u}}{1 - t} \right) dt - 1 \right\} \approx 0.4352 \tag{5}$$

3　平面ポアソン過程 (PPP)

秘書問題においては、応募者総数 n が大きくなったときの特性値の漸近挙動に関心がある。無情報型の場合、このことは比較的容易であるが、完全情報型の場合は一般に面倒あるいは困難である。例えば、無情報型最良選択問題で、しきい値ルール r の下での成功確率 $\phi_n(r)$ は

$$\phi_n(r) = \sum_{j=r}^{n} P\left\{j \text{ 番目がベストで、それを選ぶ}\right\} = \sum_{j=r}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{r-1}{j-1}\right)$$

で与えられる。したがって、r/n を x、j/n を t とおき、$n \to \infty$ とすると $\phi_n(r)$ は次式のようにリーマン近似される。

$$\phi_n(r) = \left(\frac{r-1}{n}\right)\sum_{j=r}^{n}\left(\frac{n}{j-1}\right)\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow x\int_x^1 \frac{1}{t}dt = -x\log x$$

右辺の $-x\log x$ を微分して 0 とおいて $x = e^{-1}$ を得る。そのとき、$-x\log x$ の値も e^{-1} となる。このようにして（1）を得ることもできる。他方、完全情報型の結果（2）を得るのはそれほど容易ではない。この関係式を導いたのは Samuels(1982) であるが、最初に彼は v が次のように表現できることを示した。

$$v = P\left(A_1 < c_1 < A_2\right) \tag{6}$$

ただし、

$$A_1 = E_1(1-U_1), \quad A_2 = \left(E_1 + \frac{E_2}{U_1}\right)(1-U_1U_2)$$

であり、E_1, E_2, U_1, U_2 は独立な確率変数で、E_1, E_2 は標準指数分布に、U_1, U_2 は区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に従う。c_1 は定理 3 で与えた定数であり、この面倒な確率計算（4 重積分）を実行して（2）を得た。

さて、PPP であるが、これは完全情報型問題の漸近特性値を見通しよく計算するモデルである。$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を独立で区間 $(0,1)$ 上の一様確率変数列とすると、$n\left\{1-\max\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)\right\}$ は標準指数確率変数に分布収束する。したがって、有限問題の極限として $[0,1]\times[0,\infty)$ 上の PPP を想定するのは自然である（厳密な議論は Gnedin(1996) を見よ）。便宜上、上下を逆転して考えることにする。(2）の結果をこの方法で導いてみよう（詳しくは Samuels(2004)9 節を見よ）。

3.1　最適ルール

上下を逆転したので、最大値は最小値に対応する。時刻 t に値 y を持つ候補者（y は今までの最小値）が出現している状態を $[0,1]\times[0,\infty)$ 上の点 (t, y) で表す。$Pois(k,\lambda) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ とすると、状態 (t, y) で直ちにストップして成功する確率は $Pois(0,(1-t)y)$ であり、この状態をパスして以降最初の候補者でストップして成功する確率は $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}Pois(j,(1-t)y)$ である。この 2 つの値が等しい、すなわち、次の関係

$$Pois(0,(1-t)y) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}Pois(j,(1-t)y)$$

が成立することは、$c = (1-t)y$ とおくと、$J(c) = 1$ が成立することと同値である。定理 3 より、この式を満足する c の値は c_1 で、最適なしきい値曲線は $y = c_1/(1-t)$ で与えられる。すなわち、最適ルールはこのしきい値曲線の下に位置する最初の候補者でストップすることである。

3.2 最適値

最適ルールが分かったので、このルールの下での成功確率（最適値）を計算しよう。最初に確率変数 T, S を次のように定義する。

T：しきい値曲線 $y = c_1/(1-t)$ の下に位置する最初の点（最も左側の点）の出現時刻。
S：しきい値曲線の上に位置する最小の値を持つ点がしきい値曲線と一致する時刻（例えば、最小の値が X のとき、$S = 1 - c_1/X$）。

PPP の性質より、T と S は明らかに独立である。これらの密度関数を $f_T(t), f_S(s)$ で表す。状態 (t, y) でストップしたときの成功確率は $p(t, y) = e^{-(1-t)y}$ であったから、最適値は次式で計算される。

$$\int_0^1 \int_0^t p(s, \frac{c_1}{1-s}) f_S(s) f_T(t) ds dt + \int_0^1 \int_0^s \left[\frac{1-t}{c_1} \int_0^{c_1/(1-t)} p(t, y) dy \right] f_T(t) f_S(s) dt ds \tag{7}$$

ただし、T, S の密度は以下のように与えられる。

$$f_T(t) = -\frac{d}{dt} P(T > t) = -\frac{d}{dt} \exp\left(-\int_0^t \frac{c_1}{1-r} dr \right) = c_1 (1-t)^{c_1 - 1} \tag{8}$$

$$f_S(s) = -\frac{d}{ds} P(S > s) = -\frac{d}{ds} \exp\left(-\left[\int_0^s \left(\frac{c_1}{1-s} - \frac{c_1}{1-r} \right) dr \right] \right) = \frac{c_1 s}{(1-s)^{c_1+2}} e^{-\frac{c_1 s}{1-s}} \tag{9}$$

(8)、(9) を (7) に代入して計算を実行すると (2) が得られる。

3.3 Petruccelli-Porosinski-Samuels paradox

既述のように、Petruccelli(1980) は $X_1, \ldots, X_n$ が区間 $(\theta - 0.5, \theta + 0.5)$ で一様分布する場合 (θ が未知) の最良選択問題を解き定理 5(iii) の結果を得た。また、Samuels(2004)(Porosinski(2002)) は応募者総数 N が $(1, 2, \ldots, n)$ 上で一様分布する場合の最良選択問題を解き（3）の結果を得た。2 つを比較すると全く異なる問題なのに同じ漸近値を持っている。この謎を PPP を利用して解明しようとしたのが Samuels(2004) である。Porosinski(2002) は実は間違った議論を展開して漸近値 0.4352 を得たが、結果はたまたま正しかった。どういうことか？　今

$$K(c) = e^{-c} + (e^c - c - 1) I(c)$$

と定義すると、(2）は $v = K(c_1) \approx 0.5802$ と書ける。他方、(3)、 (4) より $u = K(c_2) \approx 0.4352$ を得る。Porosinski(2002) は正しくは（3）で計算すべきところを、(4）の右辺としてすなわち、$K(c_2)$ として計算してしまった。しかし、$c = c_2$ の値に対してはたまたま（4）が成立するので結果的には正しい値を得ることになった。漸近値 0.4352 は保持時間最大化問題の漸近値 w にも等しい（(5）を見よ。$c_2 = c_3$ であり、(5）の 2 重積分が（3）に一致することが示される)。すなわち、0.4352 という値が 4 つの異なる問題の共通の解となることを Samuels(2004) は示した。PPP の問題を更に詳しく論じた Gnedin(2004) は、この不思議な等価性を Petruccelli-Porosinski-Samuels paradox と呼んだ。
Petruccelli(1980) の漸近値を P_{PET} と、Porosinski(2002) の漸近値を P_{POR} と表すと両者は等しい値 0.4352 となるが Gnedin(2004) は更に次の成立を示した。

定理 8 (PET and POR)**.** *(i)* P_{PET} と P_{POR} は次のように表される（(6) と比較せよ）。

$$P_{PET} = P(C_1 < c_2 < C_2), \quad P_{POR} = P(B_1 < c_2 < B_2)$$

ただし、

$$\begin{aligned} C_1 &= \left(E_1 + \frac{E_2}{U_1}\right)(1-U_1), \quad C_2 = \left(E_1 + \frac{E_2}{U_1} + \frac{E_3}{U_1U_2}\right)(1-U_1U_2) \\ B_1 &= \frac{E_1}{U}(1-UU_1), \qquad\qquad B_2 = \left(\frac{E_1}{U} + \frac{E_2}{UU_1}\right)(1-UU_1U_2) \end{aligned}$$

で定義され、$E_1, E_2, E_3, U, U_1, U_2$ は独立な確率変数で、E_1, E_2, E_3 は標準指数分布に、U, U_1, U_2 は区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従う。

(ii) B と C は同分布を持つ。すなわち、$(B_1, B_2, B_3, \ldots) = (C_1, C_2, C_3, \ldots)$。

ただし、

$$\begin{aligned} C_k &= \left(E_1 + \frac{E_2}{U_1} + \frac{E_3}{U_1U_2} + \cdots + \frac{E_{k+1}}{U_1\cdots U_k}\right)(1-U_1\cdots U_k) \\ B_k &= \left(\frac{E_1}{U} + \frac{E_2}{UU_1} + \frac{E_3}{UU_1U_2} + \cdots + \frac{E_k}{UU_1\cdots U_{k-1}}\right)(1-UU_1\cdots U_k) \end{aligned}$$

3.4 PPP の応用

• 最後の候補者が全体のベストであり、最良選択問題では従って最後の候補者を選ぶことが目的となる。この条件を緩めたのが Tamaki(2010) である。選んだ者が最後の候補者でなくても、例えば最後から 2 番目の候補者であっても良しとする（成功とみなす）問題である。これを一般化して、選んだ者が最後から m 番目以内の候補者であれば成功とみなす問題を考えると、この漸近成功確率 P_m は次式で与えられる。

$$P_m = e^{-c_m} J_m(c_m) + \{K_m(c_m) - c_m J_m(c_m)\} I(c_m)$$

ただし、

$$\begin{aligned} J_m(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{t^j}{j!} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!} + \sum_{j=m}^{\infty} a_j \frac{t^j}{j!} \\ K_m(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \min(i,m) \frac{t^i}{i!} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\sum_{j=m}^{i-1} a_j\right) \frac{t^i}{i!} \end{aligned}$$

であり、$\sigma_{k,i}$ を第 1 種スターリング数とすると、これは $\sigma_{k,i} = \sigma_{k-1,i-1} + (k-1)\sigma_{k-1,i}$ を満たし、$a_k = (\sum_{i=1}^{m-1} \sigma_{k,i})/k!$ で与えられる。また、c_m は次式の根 t として与えられる。

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{\sigma_{i,m}}{(i!)^2} t^i = 1$$

例えば、$P_2 = 0.8424,\ P_3 = 0.9465$。

• Tamaki(2009) は採用を拒否する応募者が一定の割合 q で存在する場合を考察した。目的は採用を受諾

する応募者の中のベストを選ぶことである。受諾か拒否かが採用通知前に分かる場合 (MODEL 1) と通知後に分かる場合 (MODEL 2。このモデルでは、拒否された場合は更に採用活動を継続することになる) が区別される。MODEL 1 の漸近成功確率は q に無関係に $0.5802(=v)$ となり、MODEL 2 では成功確率の下限が次式で与えられる（正確な値は未知）。

$$e^{-c_1}+(e^{c_1}-c_1-1)\left(\frac{pe}{c_1}\right)^{qc_1/p}L\left(\frac{qc_1}{p},\frac{c_1}{p}\right)$$

ただし、$p=1-q$ であり、$L(a,b)=\int_b^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$。また、$c_1$ は定理 3 で定義されている。数値例は、$q=0.1,\ 0.3,\ 0.5$ に対応して、下限の値は $0.577,\ 0.569,\ 0.558$ で与えられる。この問題の無情報版は Tamaki(1991) を見よ。

• 応募者総数 N が $(1,2,\dots,n)$ 上の一様分布のとき、完全情報型保持時間最大化問題の漸近値は Tamaki(2012) より次式で与えられる。

$$\left(e^{c^*}+\frac{1}{c^*-1}\right)I(c^*)+\frac{1}{2}J(c^*)\left(e^{-c^*}-\frac{(c^*)^2}{c^*-1}I(c^*)\right)\approx 0.2022$$

ただし、$c^*\approx 3.6925$ は次式の根 c である。

$$2(c-1+e^{-c})=e^{-c}J(c)-(c-1)J(-c)$$

因みに、対応する無情報型の漸近値は 0.1267 である。

4 Odds Theorem

無情報型最良選択問題の一般化として、Bruss(2000) は次の問題を考察した。n 人の応募者は出現時に各々候補者か否かに分類される。I_j を、j 番目の応募者が候補者であれば 1、さもなければ 0 の値を取るインデケーター (indicator) と定義する。$I_1,I_2,\dots,I_n$ が独立で、$p_j=P\{I_j=1\},q_j=1-p_j$ のとき、最後の候補者を選ぶにはどうしたらよいか？

定理 9 (Bruss odds theorem)**.** この問題の最適ルールはしきい値ルール s_n で与えられる。$r_j=p_j/q_j$ とすると、

$$s_n=\min\left\{k\ge 1:\sum_{j=k+1}^{n}r_j\le 1\right\}$$

また、このときの成功確率は次式で計算される。

$$v_n=\left(\prod_{j=s_n}^{n}q_j\right)\left(\sum_{j=s_n}^{n}r_j\right)$$

上記の問題を更に一般化して、最後から m 番目以内の候補者であれば良いとすると、どうなるか？ Tamaki(2010) は次の結果を導いた。

定理 10 (Generalized odds theorem)**.** この問題の最適ルールはしきい値ルール $s_n(m)$ で与えられる。今

$$R_{k,j}=\sum_{k\le i_1<i_2<\cdots<i_j\le n}r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_j}$$

と定義すると

$$s_n(m) = \min\{k \geq 1 : R_{k+1,m} \leq 1\}$$

となる。また、成功確率は次式で計算される。

$$v_n(m) = \left(\prod_{j=s_n(m)}^{n} q_j\right)\left(\sum_{j=1}^{m} R_{s_n(m),j}\right)$$

注 (5)　2.1 節の (i), (ii) より、$p_j = 1/j$ のとき、無情報型の問題に対応する。この場合の結果は次のようになる。

$$\begin{aligned} s_n(m) &= \min\left\{k \geq 1 : \sum_{k+1\leq i_1<i_2<\cdots<i_m\leq n} \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{i_j-1}\right) \leq 1\right\}, \\ v_n(m) &= \left(\frac{s_n(m)-1}{n}\right)\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{s_n(m)\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{i_j-1}\right)\right] \end{aligned}$$

また、漸近値は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} s_m^* &= \lim_{n\to\infty}\frac{s_n(m)}{n} = \exp\left\{-(m!)^{1/m}\right\}, \\ v_m^* &= \lim_{n\to\infty} v_n(m) = \exp\left\{-(m!)^{1/m}\right\}\sum_{j=1}^{m}\frac{(m!)^{j/m}}{j!} \end{aligned}$$

例えば、$(s_1^* = e^{-1}, v_1^* = e^{-1})$, $(s_2^* = 0.2431, v_2^* = 0.5869)$, $(s_3^* = 0.1624, v_3^* = 0.7260)$。関連論文としては Bruss(2003), Ferguson(2008), Bruss and Louchard(2009), Bruss and Paindaveine(2000), Ano et al.(2010), Tamaki(2011) がある。

5　その他の話題

紙数の関係もあるので、最後にその他の 3 つの話題を簡単に紹介する。

- Secretary problem with cardinal payoff(Bearden(2006), Samuel-Cahn(2007))

これは、無情報型と完全情報型をミックスした問題である。観測値 $X_1, \ldots, X_n$ は同分布 F を持つ独立確率変数列であるが、意思決定者は直接この観測値を利用することはできない。利用可能な情報は相対順位である。ただし、時刻 k で停止したとき得られる利得は X_k で、この期待値を最大化する問題である。

- Noisy Secretary Problem(Krieger and Samuel-Cahn(2012))

これも無情報型と完全情報型をミックスした問題である。観測値 $X_1, \ldots, X_n$ を同分布 F を持つ独立確率変数列とする。意思決定者が観測するのは $X_1, \ldots, X_n$ そのものではなく、ノイズ（誤差）を含んだ値である。すなわち、誤差列 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ を同分布 G を持つ独立確率変数列とすると、意思決定者は時刻 k に $Y_k = X_k + \epsilon_k$ を観測する。目的は $Y_1, \ldots, Y_n$ の相対順位（観測値ではない）に基づいて、$X_1, \ldots, X_n$ の最大値を選ぶことである。この問題は分布 F と G に深く関係する難問である。

- Last Arrival Problem(Bruss and Yor(2012))

N 人の応募者が各々独立に区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に従って到着する。確率変数 N の分布が未知の場合、最後の応募者（N 番目の応募者）を見つける確率を最大にする問題。

参考文献

[1] Ano, K., Kakinuma. H., and Miyoshi, N., Odds theorem with multiple selection chances, J. Appl. Probab., 47(2010), 1093-1104.

[2] Assaf, D., and Samuel-Cahn, E., The secretary problem: minimizing the expected rank with i.i.d. random variables, Adv. Appl. Probab., 28(1996), 828-852.

[3] Bearden, J.N., A new secretary problem with rank-based selection and cardinal payoffs, J. Math. Psychology, 50(2006), 58-59.

[4] Bruss, S.T., Sum the odds to one and stop, Ann. Probab., 28(2000), 1384-1391.

[5] Bruss, S.T., A note on bounds for the odds theorem of optimal stopping, Ann. Probab., 31(2003), 1859-1861.

[6] Bruss, S.T., and Ferguson, T. S., Minimizing the expected rank with full information, J. Appl. Probab., 30(1993), 616-624.

[7] Bruss, S.T., and Louchard.G., The odds algorithm based on sequential updating and its performance, Adv. Appl. Probab., 41(2009), 131-153.

[8] Bruss, S.T., and Paindavene, D., Selecting a sequence of last successes in independent trials, J. Appl. Probab., 37(2000), 389-399.

[9] Bruss, S.T., and Swan, Y. C., A continuous-time approach to Robbins' problem of minimizing the expected rank, J. Appl. Probab., 46(2009), 1-18.

[10] Bruss, S.T., and Yor, M., Stochastic processes with proportional increments and the last-arrival problem, Stoch. Proces. and Their Appl., (2012), to appear.

[11] Campbell, G., and amuels. S. M., Choosing the best of the current crop, Adv. Appl. Probab., 13(1981), 510-532.

[12] Chow, Y.S., Moriguti, S., Robbins, H., and Samuels, S.M., Optima selection based on relative rank (the "secretary problem"),Israel J. Math., 2(1964), 81-90.

[13] Ferguson, T.S., Who solved the secretary problem ?, Statistical Science, 4(1989), 282-289.

[14] Ferguson, T.S., Hardwick, J.P., and Tamaki, M., Maximizing the duration of owning a relatively best object, Contemporary Mathematics, 125(1992), 37-57.

[15] Ferguson, T.S., The sum-the-odds theorem with application to Sakaguchi, (2008), Preprint.

[16] Gardner, M., Mathematical games, Scientific American, 202(1960), 135.

[17] Gilbert, J., and Mosteller, F.,Recognizing the maximum of a sequence, J. Amer. Statist. Assoc., 61(1966), 35-73.

[18] Gianini-Pettitt, J., Optimal selection based on relative ranks with a random number of individuals, Adv. Appl. Probab., 11(1979), 720-736.

[19] Gnedin, A.V., On the full information best choice problem, J. Appl. Probab., 33(1996), 678-687.

[20] Gnedin, A.V., Best choice problem from the planar Poisson process, Stoch. Proces. and Their Appl., 111(2004), 317-354.

[21] Krieger, A.M., and Samuel-Cahn, E., The secretary problem of minimizing the expected rank: a simple suboptimal approach with generalizations, Adv. Appl. Probab., 41(2009), 1041-1058.

[22] Krieger, A.M., and Samuel-Cahn, E., The noisy secretary problem and some results on extreme concomitant variables, J. Appl. Probab., 49(2012), to appear.

[23] Mazalov, V. V., and Tamaki, M., An explicit formula for the optimal gain in the full-information problem of owning a relatively best object, J. Appl. Probab., 43(2006), 87-101.

[24] Petruccelli, J.D., Some best choice problems with partial information, Unpublished thesis, (1978).

[25] Petruccelli, J.D., On a best choice problem with partial information, Ann. Statist., 8(1980), 1171-1174.

[26] Porosinski, Z., The full-information best choice problem with a random number of observations, Stoch. Proces. and Their Appl., 24(1987), 293-307.

[27] Porosinski, Z., On best choice problems having similar solutions, Statist. Probab. Lett., 56(2002), 321-327.

[28] Presman, E.L., and Sonin, I.M., The best choice problem for a random number of objects, Theory Probab. Appl., 17(1972), 657-668.

[29] Robbins, H., Remarks on the secretary problem, Amer. J. Math. and Manag. Sci, 11(1991), 25-37.

[30] Sakaguchi, M., A note on the dowry problem, Rep. Statist. Appl. Res., JUSE, 20(1973), 11-17.

[31] Samuel-Cahn, E., Optimal stopping for i.i.d. random variables based on the sequential information of the location of relative records only, Seq. Analysis , 26(2007), 395-401.

[32] Samuels, S.M., Exact solutions for the full information best choice problem, Purdue Univ. Stat. Mimeo Series, (1982), 81-87.

[33] Samuels, S.M., Secretary problems, Handbook of Sequential Analysis(edited by Ghosh, B. K., and Sen, P. K.), Marcell Dekker, Boston, 1991, 381-405.

[34] Samuels, S.M., Why do these quite different best-choice problems have the same solutions, Adv. Appl. Probab., 36(2004), 398-416.

[35] Stewart, T. J., Optimal selection from a random sequence with learning of the underlying distribution, J. Amer. Statist. Assoc., 73(1978), 775-780.

[36] Tamaki, M., A Bayesian approach to the best choice problem, J. Amer. Statist. Assoc., 83(1988), 1129-1133.

[37] Tamaki, M., A secretary problem with uncertain employment and best choice of available candidates, Operations Research, 39(1991), 274-284.

[38] Tamaki, M., Optimal choice of the best available applicant in full-information models, J. Appl. Probab., 46(2009), 1086-1099.

[39] Tamaki, M., Sum the multiplicative odds to one and stop, J. Appl. Probab., 47(2010), 761-777.

[40] Tamaki, M., Maximizing the probability of stopping on any of the last m successes in independent Bernoulli trials with random horizon, Adv. Appl. Probab., 43(2011), 760-781.

[41] Tamaki, M., Optimal stopping rule for the full-information duration problem with random horizon, 2012 年秋季ORアブストラクト.

＊寄稿

距離と位相次元

服部泰直（Yasunao Hattori）
島根大学大学院 総合理工学研究科

1　序論

ここでは距離化可能（距離付け可能）な位相空間について考える．また, 特に定義されない用語は [13], [38] に従う．
位相空間の距離化可能性については, 1950 年代に Nagata-Smirnov-Bing の距離化可能定理によってその位相的特徴付けが与えられた:

Theorem 1.1 (Nagata-Smirnov-Bing)**.** 正則空間 X について, 次は同値である．
(1) X は距離化可能である．
(2) X は σ-局所有限な開基を持つ．
(3) X は σ-疎な開基を持つ．

　さて, 距離化可能空間 X（すなわち, 上の定理の条件をみたす位相空間）は, もちろん, その位相を導く距離関数を持つが, そのような距離関数は無数に存在する．距離化可能空間 X における位相的性質を調べるときには, 都合の良い距離（または, 単にその位相を導く距離）を X に導入して調べることがよくある．このときには, その距離関数は X の位相を導く, ということのみが重要であって, 距離関数が持っているであろう性質についてはほとんど気にする必要がない．しかし, 完備性のように距離関数が持つ性質（距離的性質）が位相的性質を調べる上で本質的な役割を演ずることも少なくない．また, よく知られているように, 距離化可能空間 X において X が全有界な距離関数を持つことと, X が可分であることが同値であり, さらに, X がコンパクトであることと, X が全有界かつ完備な距離関数を持つこととが同値である．このように, 距離化可能空間 X において, その位相を導くある特殊な距離関数が, X の持つ位相的性質を導くことがある．拙稿では, 主に次元論に現れる距離化可能空間における諸性質と, 距離関数の持つ距離的性質の関連について, [16], [17], [19] をまとめ直し, いくつかの未解決問題を取り上げながらその周辺について概観する．

距離空間 (X, d) と $x \in X$, $\varepsilon > 0$ に対して, $S_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ とする．

本稿では距離化可能空間 X に対して, X の位相を導く距離関数 d を持つことを, 単に, X が距離関数 d を持つ, ということにする．

2　位相次元を特徴付ける距離関数ー Nagata の距離とその周辺

J. de Groot [10] は 1956 年に空間の 0 次元性をその特殊な距離関数によって特徴付けた．

Theorem 2.1 (de Groot)**.** 距離化可能空間 X の被覆次元が 0 であるためには, X が非アルキメデス的距離関数を持つことが必要十分である．

ここで, X 上の距離関数 d が非アルキメデス的（non-Archimedean）であるとは, d が強三角不等式 $d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}$ が任意の $x,y,z \in X$ に対して成り立つときを言う.
今, 無理数空間 $\mathbb{P}$ に対して, $\mathbb{P}$ を実数直線 $\mathbb{R}$ の部分距離空間とするとき, $\mathbb{R}$ 上の通常の距離から導かれる $\mathbb{P}$ の距離は, 非アルキメデス的ではない. しかし, よく知られているように $\mathbb{P}$ は直積空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ と同相であり, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上のベールの距離は非アルキメデス的であるので, 無理数空間 $\mathbb{P}$ が非アルキメデス的距離を持つことがわかる.
上の定理は J. Nagata [37] と P. S. Ostrand [41] により独立に n 次元空間に拡張された.

Theorem 2.2 (Nagata, Ostrand)**.** *距離化可能空間 X の被覆次元が n 以下, すなわち $\dim X \leq n$, であるためには, X が次の条件を満たす距離関数を持つことが必要十分である:*

$(1)_n$ *X における任意の $n+3$ 個の点 $x, y_1, \ldots, y_{n+2}$ に対して, $d(y_i, y_j) \leq d(x, y_j)$ を満たす $i \neq j$ が存在する.*

この定理の条件を満たす距離関数は長田の距離 (Nagata's metric) と呼ばれている. P. S. Ostrand は上の定理を証明するために, 彼自身 [40] が得た次の距離空間における被覆次元の特徴付けを用いた. この特徴付けは彼が Hilbert の第 13 問題に関連する問題（多変数連続関数を 1 変数連続関数の合成により表現する問題）を解決するために得たものであるが, 上の定理の証明において応用されたように, 広く次元論において応用されている重要な定理である.

Theorem 2.3 (Ostrand)**.** *距離化可能空間 X の被覆次元が n 以下あるためには, X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ と任意の $k \geq n+1$ に対して, k 個の疎な開集合族 $\mathcal{V}_1, \ldots \mathcal{V}_k$ が存在し, $\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{V}i$ が $\mathcal{U}$ の細分であり, かつ, 任意の $n+1$ 個の $\mathcal{V}_{i_1}, \ldots, \mathcal{V}_{i_{n+1}}$ に対して $\mathcal{V}_{i_1} \cup, \ldots, \cup \mathcal{V}_{i_{n+1}}$ が X の被覆になっている.*

定理 2.2 は J. de Groot [11] によって得られた次の定理を改良したものであり, 後述の問題 2.1 の部分解を与えている.

Theorem 2.4 (de Groot)**.** *コンパクト距離化可能空間 X の被覆次元が n 以下であるためには, X が次の条件を満たす距離関数 d を持つことが必要十分である:*

$(2)_n$ *X における任意の $n+3$ 個の点 $x, y_1, \ldots, y_{n+2}$ に対して, $d(y_i, y_j) \leq d(x, y_k)$ を満たす $i \neq j$ と k が存在する.*
さらに, 可分な距離化可能空間 X の被覆次元が n 以下であるためには, X が上の条件 $(2)_n$ を満たす全有界な距離関数を持つことが必要十分である.

Problem 2.1 (de Groot)**.** 定理 2.4 が一般の距離空間に対して成り立つか.

上の問題は de Groot が提起してから半世紀以上たった今でも未だに完全解が得られていない.
J. Nagata [36] は, また, 距離化可能空間における被覆次元を別の特殊な距離で特徴付けた.

Theorem 2.5 (Nagata)**.** *距離化可能空間 X の被覆次元が n 以下であるためには, X が次の条件を満たす距離関数を持つことが必要十分である:*

$(3)_n$ *X における任意の $n+3$ 個の点 $x, y_1, \ldots, y_{n+2}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $d(S_{\varepsilon/2}(x), y_i) < \varepsilon$ ならば, $d(y_i, y_j) < \varepsilon$ を満たす $i \neq j$ が存在する.*

条件 $(1)_n$, $(2)_n$, $(3)_n$ と類似した次の条件を考える：

$(1)_\omega$ X における任意の点 x と任意の点列 $y_1, y_2, \ldots$ に対して, $d(y_i, y_j) \le d(x, y_j)$ を満たす $i \neq j$ が存在する.

$(2)_\omega$ X における任意の点 x と任意の点列 $y_1, y_2, \ldots$ に対して, $d(y_i, y_j) \le d(x, y_k)$ を満たす $i \neq j$ と k が存在する.

$(3)_\omega$ X における任意の点 x と任意の点列 $y_1, y_2, \ldots$ そして任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $d(S_{\varepsilon/2}(x), y_i) < \varepsilon$ ならば, $d(y_i, y_j) < \varepsilon$ を満たす $i \neq j$ が存在する.

J. Nagata は, すべての距離化可能空間が $(2)_\omega$ を満たす距離関数を持つことを示し, 筆者 [14] は, すべての距離化可能空間が $(3)_\omega$ を満たす距離関数を持つことを示した. すなわち, $(2)_\omega$, $(3)_\omega$ は何の位相的性質を導かない. 一方, すべての距離化可能空間が $(1)_\omega$ を満たす距離関数を持つかどうかは J. Nagata により問われたが現在でも未解決である.

Problem 2.2 (Nagata)**.** すべての距離化可能空間が $(1)_\omega$ を満たす距離関数を持つか.

この問題については筆者 [14] が次の部分解を得ている.

Theorem 2.6. *すべての距離化可能空間 X は, 次の条件を満たす距離関数を持つ: ある $\delta > 0$ が存在して $|\{i : d(x, y_i) \ge \delta\}| = \aleph_0$ となる X における任意の点 x と任意の点列 $y_1, y_2, \ldots$ に対して, $d(y_i, y_j) \le d(x, y_j)$ を満たす $i \neq j$ が存在する.*

筆者 [14] はさらに条件 $(3)_\omega$ に関連して, 強距離化可能空間を特徴付ける距離関数を発見した. ここで, 位相空間 X が強距離化可能であるとは, X の基底 $\mathcal{B}$ で, $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{B}_n$, 各 $\mathcal{B}_n$ が星型有限 (star finite) な開被覆となるものが存在するときを言う.

Theorem 2.7. *距離化可能空間 X が強距離化可能であるためには, X が次の条件を満たす距離関数を持つことが必要十分である:*

$(3)'_\omega$ X における任意の点 x と任意の点列 $y_1, y_2, \ldots$ そして任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $d(S_\varepsilon(x), y_i) < \varepsilon$ ならば, $d(y_i, y_j) < \varepsilon$ を満たす $i \neq j$ が存在する.

さらに, 強距離化可能空間を特徴付ける距離関数として Z. Baloh と G. Gruenhage [2] は次を得た.

Theorem 2.8 (Balogh-Gruenhage)**.** *距離化可能空間 X が強距離化可能であるためには, X が次の条件を満たす距離関数を持つことが必要十分である:*

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\{S_\varepsilon(x) : x \in X\}$ が遺伝的閉包保存 (hereditarily closure-preserving) である.

P. Assouad [1] は定理 2.2 の条件を満たす距離 (Nagata's metric) を, n 次元長田の性質 (n-dimensional Nagata property) と呼び, さらに, この性質をもとに次のように新しい次元関数の概念を導入した：

Definition 2.1 (Assouad)**.** (X, d) を距離空間とする. 次の条件を満たす定数 C が存在するとき, (X, d) の長田次元 (Nagata dimension) が n 以下 ($\text{N-dim}(X, d) \le n$) と定義する： 任意の $r > 0$ に対して $\text{mesh}\,\mathcal{U}_r \le Cr$, かつ, 任意の $x \in X$ に対して $|\{U \in \mathcal{U} : U \cap S_r(x) \neq \emptyset\}| \le n + 1$ を満たす X の開被覆 $\mathcal{U}_r$ が存在する. ただし, X の部分集合族 $\mathcal{U}$ に対して, $\text{mesh}\,\mathcal{U} = \sup\{\text{diam}\, U : U \in \mathcal{U}\}$ とする.

そして, Assouad [1] は定理 2.2 の別証明を与え, さらに次を示した.

Theorem 2.9 (Assouad)**.** (X,d) を距離空間とするとき, $N\text{-}\dim(X,d)\le n$ となるための必要十分条件は, (X,ρ) が n 次元長田の性質を満たし, ρ^p が d とリプシッツ同値となる $p>0$ と X の距離 ρ が存在することである.

これらの業績により, 長田次元は Nagata-Assouad 次元と呼ばれるようになり, 粗いトポロジー, asymptotic 幾何学において応用されるようになっている. 特に, asymptotic 幾何学においては Nagata-Assouad 次元の asymptotic 版である asymptotic Nagata-Assouad 次元が定義され多くの研究者により研究が進められている ([4], [6], [7], [8], [9], [27] 等を参照).
また, 長田の距離 (Nagata's metric) については, [18] も参照されたい.

3 中点集合と次元

距離空間 (X,d) と $y\neq z\in X$ に対して

$$M(y,z)=\{x\in X : d(x,y)=d(x,z)\}$$

を y,z の中点集合という. そして, X の部分集合 M が中点集合とは $M=M(y,z)$ となる $y\neq z\in X$ が存在するときをいう. 中点集合の概念は, 幾何学的イメージを与えると共に, 位相的性質を表現する. 本節では, 中点集合を用いた位相的性質の特徴付け等について述べる.
Janos-Martin [25] は可分距離空間において中点集合を用いた直感的で理解しやすい位相次元の特徴付けを示した.

Theorem 3.1 (Janos-Martin)**.** 可分距離化可能空間 X の被覆次元が n 以下 $(\dim X\le n)$ であるためには, X のすべての中点集合 M に対して $\dim M\le n-1$ となる X の全有界な距離関数が存在することが必要十分である.

上の定理が一般の距離空間に拡張されるかどうかは, まだ知られていないが, 小さい帰納的次元における 0 次元性について筆者 [15] は次を示した.

Theorem 3.2. 距離化可能空間 X に対して, 任意の異なる *2* 点に中点が存在しない, すなわち任意の $y\neq z\in X$ に対して $M(y,z)=\emptyset$ ならば, $\mathrm{ind}\,X\le 0$ である. ここで, $\mathrm{ind}\,X$ は X の小さい帰納的次元である.

上において $\mathrm{ind}\,X=0$ を $\dim X=0$ にできるかどうかは未解決である（[19, Problem 2.18]), すなわち, 被覆次元 dim については 0 次元性についてさへ未解決である.

距離空間 (X,d) の部分集合 A, B が合同であるとは, A から B への距離保存な全単射が存在するときをいう. 合同の概念を用いて L. Janos [23], [24] は可分距離空間の 0 次元性と 1 次元性について次を示した.

Theorem 3.3 (Janos)**.** 可分距離化可能空間 X の被覆次元が 0 $(\dim X=0)$ であるための必要十分条件は, X の *2* 点からなるすべての異なる *2* つの部分集合が合同とはならない距離関数を X が持つことである.

Theorem 3.4 (Janos)**.** 局所コンパクトな可分距離化可能空間 X に対して次の条件（$*$）を満たす距離関数を X が持つならば, $\dim X\le 1$ である：

（$*$）　X の 3 点からなる合同な異なる *2* つの部分集合は存在しない.

上の条件（$*$）を unique triangle property (略して UTP と書く) という（[20] 参照）. 定理 3.4 の一般化として筆者 [15] は次を示した.

Theorem 3.5. *距離化可能空間 X が UTP を満たす距離関数を持つならば,* $\mathrm{ind}\, X \leq 1$ *である.*

UTP を満たす距離関数は, その空間の可分性を導かないことは知られているが（[15, Example]), $\mathrm{ind}\, X = 1$ となる可分でない距離空間で UTP を満たす距離関数を持つ空間が存在するかどうかについては未解決のままである（[15, Remark]). すなわち,

Problem 3.1. 可分でない距離化可能空間 X で UTP を満たす距離関数を持ち, さらに $\mathrm{ind}\, X = 1$ となる空間を構成せよ.

一般の距離空間において定理 3.5 の条件の下で $\dim X \leq 1$ とできるかどうかは未解決である（[19, Problem 2.18]). また, L. Janos [24] は, 実数直線 $\mathbb{R}$ が UTP を満たす距離関数を持つことを示し, 定理 3.4 の逆が成り立つか問うた. しかし, これは成り立たない. 実際, Hattori-Ohta [20] は, 局所コンパクトな可分距離化可能空間 X が UTP を満たす距離関数を持つならば, X が実数直線 $\mathbb{R}$ に埋め込めることを示した. そして, もちろん, 1 次元コンパクト距離空間で実数直線 $\mathbb{R}$ に埋め込めない空間はたくさんある（たとえば 2 単体の 1 切片等）ので, これらの空間は $\dim X \leq 1$ であっても UTP を満たす距離関数を持たないことがわかる. このことより次の問題が提起される.

Problem 3.2 (Hattori-Ohta)**.** 可分距離化可能空間 X に対して, X が UTP を満たす距離関数を持つことと, X が実数直線 $\mathbb{R}$ に埋め込まれることが同値であるか.

この問題に関連して次が知られている.

Theorem 3.6 (Hattori-Ohta)**.** *可分距離化可能空間 X が次の 2 つの条件を満たす距離関数 d を持つならば, X は実数直線 $\mathbb{R}$ に埋め込まれる:*
(a) X の任意の異なる 2 点 x, y に対して $|M(x,y)| \leq 1$.
(b) X の 任意の点 x と任意の $\alpha > 0$ に対して $|\{y \in X : d(x,y) = \alpha\}| \leq 2$.

Theorem 3.7 (Hattori-Ohta)**.** *局所コンパクトな可分距離化可能空間 X が上の条件 (a) を満たす距離関数 d を持つならば, X は実数直線 $\mathbb{R}$ に埋め込まれる.*

Problem 3.3 (Hattori-Ohta)**.** 各点がその境界がコンパクトになる基本近傍基を持つ可分距離化可能空間 X が上の条件 (a) を満たす距離関数 d を持つならば, X は実数直線 $\mathbb{R}$ に埋め込まれるか.

(X, d) を距離空間とするとき, 任意の $x \neq y \in X$ に対して $|M(x,y))| = 1$ のとき, (X, d) は 1 中点集合性 (unique midset property, 略して UMP）を持つという. 明らかに, 距離空間 (X, d) が UMP を持つならば, 定理 3.6 の条件 (a) を満たし, 逆に (X, d) が連結で定理 3.6 の条件 (a) を満たすならば (X, d) は UMP を持つことがわかる. また, 距離空間 (X, d) が UTP を満たすならば, 定理 3.6 の条件 (a) を満たすこともわかる.
Berard [3] は, 非退化な連結距離空間 (X, d) が UMP を持つならば, X は実数直線 $\mathbb{R}$ の区間と同相であることを示した. また, Nadler [35] は, 局所コンパクトな可分距離化可能空間 X が UMP を持つならば, X は実数直線 $\mathbb{R}$ に埋め込まれることを示した. 従って, 定理 3.7 は Nadler の定理の一般化となっている. 一般の可分距離空間において定理 3.6 の条件 (a) のみでは実数直線 $\mathbb{R}$ に埋め込めないことは次で示されている.

Example 3.1 (Hattori-Ohta)**.** 定理 3.6 の条件 (a) を満たし, 実数直線 $\mathbb{R}$ に埋め込めない可分距離化可能空間 (X, d) が存在する.

Nadler の定理, 定理 3.7 及び例 3.1 より次の問題は興味深い.

Problem 3.4. 可分距離化可能空間 X が UMP を満たす距離関数 d を持つならば, X は実数直線 $\mathbb{R}$ に埋め込めるか.

Ito-Ohta-Ono [22] は, 有限離散空間の UMP 性をグラフ理論の立場から考察した. 単純グラフ G に対して, 辺の集合 $E(G)$ から G への写像 $\varphi : E(G) \to G$ を G の彩色 (colouring) という. G の任意の二つの頂点 $x \neq y$ に対して $\varphi(xp) = \varphi(yp)$ となる G の頂点 p が唯一つ存在するとき, G の彩色 φ を 1 中点集合性 (unique midset property) を持つという.

Theorem 3.8 (Ito-Ohta-Ono)**.** *K_n を n 個の頂点を持つ完全グラフとする. このとき, n 個の点を持つ離散空間が UMP を満たす距離関数を持つことと, 完全グラフ K_n が UMP を満たす彩色を持つことは同値である.*

G を UMP を満たす彩色を持つグラフとするとき,

$$\mathrm{ump}(G) = \min\{|\varphi(E(G))| : \varphi \text{ は UMP をみたす } G \text{ の彩色 }\}$$

とおく.

Theorem 3.9 (Ito-Ohta-Ono)**.** *完全グラフ K_n について次が成り立つ.*

1. *任意の $n \geq 0$ に対して, $\mathrm{ump}(K_{2n+1}) = n$.*
2. *任意の $n \geq 3$ に対して, $\mathrm{ump}(K_{2n}) \leq 2n - 1$. 特に, $\mathrm{ump}(K_6) = 4$, $\mathrm{ump}(K_8) = 5$, $\mathrm{ump}(K_{10}) = 5$, $\mathrm{ump}(K_{12}) \leq 8$, $\mathrm{ump}(K_{14}) \leq 10$.*

Problem 3.5 (Ito-Ohta-Ono)**.** 任意の $n \geq 6$ に対して, $\mathrm{ump}(K_{2n})$ を決定せよ.

4 2 中点集合予想とその周辺

(X, d) を距離空間とするとき, X の任意の中点集合 M に対して $|M| = 2$ のとき, (X, d) は 2 中点集合性 (double midset property, 略して DMP) を持つという.

2 中点集合予想 (Double Midset Conjecture) DMP をもつ連続体（非退化な連結コンパクト距離空間）は単一閉曲線 (S^1 と同相) である.

明らかに, S^1 は通常の平面におけるユークリッド距離に関して DMP を持つ. 2 中点集合予想はその表現はシンプルでありたいへん興味深く思われる. 2 中点集合予想は未解決であるが, L. D. Loveland 等によるいくつかの部分解が得られているのでそれらを紹介する（[28], [29], [30], [31], [32] 等を参照）.

Theorem 4.1. *X を DMP を満たす連続体とするとき, 次のいずれかの条件を満たすならば, X は単一閉曲線である.*

1. *[Loveland-Wayment] X は cut points を持たない連続体を含む.*

2. *[Loveland]* 中点写像 $M:\{(x,y)\in X\times X: x\neq y\}\to 2^X$ が連続である.

3. *[Loveland]* X が *2* 次元平面 $\mathbb{R}^2$ に含まれており, 通常のユークリッド距離に関して *DMP* を満たす.

さらに L.D.Loveland-S.M.Loveland [31] は次を示した.

Theorem 4.2 (Loveland-Loveland)**.** X を *2* 次元平面 $\mathbb{R}^2$ に含まれている連続体とする. このとき, ある自然数 $n\geq 1$ が存在し, 任意の $x\neq y\in X$ に対して $|M(x,y)|=n$ を満たすならば, X は単一閉曲線であるか, または, 区間と同相である.

次に 2 中点集合予想の一般化を考える.

$(n-1)$-球面中点集合予想 ($(n-1)$-sphere Midset Conjecture) すべての中点集合が $(n-1)$-球面 S^{n-1} と同相である連続体（非退化な連結コンパクト距離空間）は n-球面 S^n と同相である.

2 中点集合予想は, 0-球面中点集合予想である. $(n-1)$-球面中点集合予想 については多くは知られていないが, 次が L. D. Loveland [29] と Debski-Kawamura-Yamada [12] により得られた.

Theorem 4.3 (Loveland)**.** 距離空間 X が次のいずれかを満たせば, X は 2 次元球面 S^2 と同相である.

1. X のすべての中点集合が 1 次元球面 S^1 と同相であり, かつ, X が 2 次元球面 S^2 と同相な部分集合を含む.

2. X はすべての中点集合が 1 次元球面 S^1 と同相となる非退化なコンパクト空間であり, かつ, X のすべての 1 次元球面と同相な部分集合が X を分離する.

Theorem 4.4 (Debski-Kawamura-Yamada)**.** $n\geq 3$ とし, X は $X\subset\mathbb{R}^n$ となる非退化なコンパクト空間とする. このとき, X のすべての中点集合が凸 $(n-2)$-球面であるならば, X は凸 $(n-1)$-球面である.

5 距離に依存する次元

次元論の研究は, まず, 1900 年代前半にコンパクト距離空間における研究がなされ, その後, Hurewicz-Wallman [21] による可分距離空間に, 1950 年代に（一般の）距離空間における理論に発展し, その後, より一般の空間クラスに展開されてきた. コンパクト距離空間における理論では, その空間の距離的性質を利用している場合も少なくない. 次元論においては, 大まかに言えば, 距離的性質はかなりの部分で位相的性質と同等に扱うことができる. そして, 可分距離空間では全有界な距離関数を用いることにより, 距離的性質と位相的性質を近似することができるが, 一般の距離空間ではそのような距離関数（可分距離空間における全有界な距離関数）は一般には存在しない. したがって, コンパクト距離空間における理論が一般の距離空間にそのまま拡張することができないことがある. 本節で扱う距離に依存する次元関数はその一例である. 距離に依存する次元関数は距離的性質であり, 位相的性質ではないので, 厳密には空間の次元と呼べないかもしれないが, 距離空間における次元論の重要な定理から示唆された関数であり, それ自身興味深い. 距離に依存する次元関数については, K. Nagami [33] に詳しい解説があるので, 興味ある読者はそれを参照していただきたい.
以下本節では, X を距離空間とし, X には距離関数 d が与えられているものとする.

距離空間 X の被覆 $\mathcal{U}$ に対して,

$$\mathrm{ord}\,\mathcal{U}=\sup\{|\mathcal{U}'|:\mathcal{U}'\subset\mathcal{U},\bigcap\mathcal{U}'\neq\emptyset\}$$

とする.

Definition 5.1. X を距離空間とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\mathrm{mesh}\,\mathcal{U} < \varepsilon$, $\mathrm{ord}\,\mathcal{U} \le n+1$ となる X の開被覆 $\mathcal{U}$ が存在するとき, X の距離次元 (metric dimension) $\mu\dim X$ が n 以下, $\mu\dim X \le n$ とする.

距離次元 $\mu\dim$ は 1930 年頃に Alexandroff により, コンパクト距離空間における多面体への近似による次元の特徴付けとともに導入された概念である. コンパクト距離空間においては, 距離次元は通常の (被覆) 次元と一致する. しかし, 可分距離空間においては両者は一致しないことが知られている (Sitnikov [42]). また, 一般の距離空間 X に対して, $\mu\dim X \le \dim X$ であることは容易にわかり, $\dim X \le 2\mu\dim X$ であることは, M. Katětov [26] により示された.
次に被覆次元の特徴付けから示唆される 4 つの距離依存型次元関数を定義する.

Definition 5.2. X を距離空間とする. このとき, 距離依存次元関数 d_1, d_2, d_3, d_4 を以下のように帰納的に定義する. $X = \emptyset$ のとき, $d_1(X) = d_2(X) = d_3(X) = d_4(X) = -1$ とする.

1. $n \ge 0$ のとき, $d(E, F) > 0$ となる X の任意の閉集合 E, F に対して, $d_1(B) \le n-1$ となる E と F を分離する閉集合 B が存在するとき, $d_1(X) \le n$ とする.

2. $n \ge 0$ のとき, $d(E_i, F_i) > 0$ となる X の $(n+1)$ 個の任意の閉集合の組 (E_i, F_i), $i = 1, \ldots, n+1$ に対して, $B_1 \cap \cdots \cap B_{n+1} = \emptyset$ となる E_i と F_i を分離する閉集合 B_i が存在するとき, $d_2(X) \le n$ とする.

3. $n \ge 0$ のとき, $d(E_i, F_i) > 0$ となる X の m 個の任意の閉集合の組 (E_i, F_i), $i = 1, \ldots, m$ に対して, $\mathrm{ord}\,\{B_i : i = 1, \ldots, m\} \le n+1$ となる E_i と F_i を分離する閉集合 B_i が存在するとき, $d_3(X) \le n$ とする.

4. $n \ge 0$ のとき, $d(E_i, F_i) > 0$ となる X の任意の閉集合の組の列 (E_i, F_i), $i = 1, 2, \ldots$ に対して, $\mathrm{ord}\,\{B_i : i = 1, 2, \ldots\} \le n+1$ となる E_i と F_i を分離する閉集合 B_i が存在するとき, $d_4(X) \le n$ とする.

定義より $d_2(X) \le d_3(X) \le d_4(X)$ は容易に示される. さらに, Nagami-Roberts [34] は次を示した.

Theorem 5.1 (Nagami-Roberts)**.** 距離空間 X に対して次が成り立つ.

1. $d_1(X) = \dim X$.

2. $d_2(X) \le \dim X$. そして, $\dim X = 1$ ならば $d_2(X) = 1$.

3. $d_4(X) = \dim X$.

4. $d_3(X) \le \mu\dim X$. さらに, d が全有界ならば $d_3(X) = \mu\dim X$ である.

定理 5.1 より, すべての距離空間 X に対して,

$$d_2(X) \le d_3(X) \le \mu\dim X \le d_4(X) = \dim X = d_1(X)$$

がわかる. さらに, Nagami-Roberts [34] は, X が局所コンパクトならば上の次元関数はすべて一致する, すなわち, $d_1(X) = d_2(X) = d_3(X) = \mu\dim X = d_4(X) = \dim X$ となることを示した. 一方, 一般の距離空間において $d_2(X)$, $d_3(X)$, $\mu\dim X$, $\dim X$ が異なる例としては次がある.

Example 5.1 (Nagami-Roberts)**.** $d_2(X) = 2$, $\mu \dim X = 3$, $\dim X = 4$ となる距離空間 X が存在する.

Example 5.2 (Nagami-Roberts)**.** $d_2(X) = 2$, $d_3(X) = \mu \dim X = 3$, $\dim X = 4$ となる距離空間 X が存在する.

次の問題は Nagami-Roberts [34] において提起されたが, 現在でも未解決である.

Problem 5.1 (Nagami-Roberts)**.** 距離空間 X に対して, $d_3(X) = \mu \dim X$ が成り立つか.

Problem 5.2 (Nagami-Roberts)**.** 距離空間 X に対して, $\dim X \leq 2d_2(X)$ が成り立つか. より弱く, $d_2(X) < \infty$ ならば $\dim X < \infty$ であるか.

参考文献

[1] P. Assouad, *Sur la distance de Nagata*, C. R. Acad. Paris **294** (1982), 31–34.

[2] Z. Balogh and G. Gruenhage, *When the collection of ϵ-balls is locally finite*, Topology Appl. **124** (2002), 445–450.

[3] A. D. Berard, Jr., *Characterizations of metric spaces by the use of their midsets: Intervals*, Fund. Math. **73** (1971/72), no. 1, 1–7.

[4] N. Brodskiy, J. Dydak, J. Higes and A. Mitra, *Assouad-Nagata dimension via Lipschitz extensions*, Israel J. Math. **171** (2009) 405–423.

[5] S. Buyalo, *Asymptotic dimension of a hyperbolic space and capacity dimension of its boundary at infinity*, St. Petersburg Math. J. **17** (2006) 267–283.

[6] S. Buyalo and N. Lebedeva, *Dimension of locally and asymptotically self-similar spaces*, math.GT/0509433, 2005.

[7] S. Buzási, *Nagata's metric for uniformities*, Publications Math. Debrecen **26** (1979), 91–94.

[8] J. Dydak and J. Higes, *Asymptotic cones and Assouad-Nagata dimension*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008) 2225–2233.

[9] A. Dranishnikov and J. Smith, *On asymptotic Assouad-Nagata dimension*, Topology Appl. **154** (2007) 934–952.

[10] J. de Groot, *Non-archimedean metrics in topology*, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 948–953.

[11] J. de Groot, *On a metric that characterizes dimension*, Canadian. J. Math. **9** (1957), 511–514.

[12] W. Dębski, K. Kawamura, and K. Yamada, *Subsets of $\mathbb{R}^n$ with convex midsets*, Topology Appl. **60** (1994), no. 2, 109–115.

[13] R. Engelking, *Theory of dimensions finite and infinite*, Heldermann Verlag, Lemgo, 1995.

[14] Y. Hattori, *On special metrics characterizing topological properties*, Fund. Math. **126** (1986), 133–145.

[15] Y. Hattori, *Congruence and dimension of non-separable metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 1103–1105.

[16] Y. Hattori, *Special metrics*, Proc. Ninth Prague Topological Symposium, Contributed papers from the symposium, Topology Atlas, 2001, 155–164 .

[17] Y. Hattori, *Special metrics*, in K. P. Hart, J. Nagata and J. E. Vaughan eds., Encyclopedia of General Topology; Elsevier, 2004, 247–250.

[18] Y. Hattori, *Around the Nagata's metrics*, Sci. Math. Japonicae, **71** (2010), 267–272.

[19] Y. Hattori and J. Nagata, *Special metrics*, Recent progress in general topology (Prague, 1991), North-Holland, Amsterdam, 1992, 353–367.

[20] Y. Hattori and H. Ohta, *A metric characterization of a subspace of the real line*, Topology Proc. **18** (1993), 75–87.

[21] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press, 1941

[22] M. Itō, H. Ohta, and J. Ono, *A graph-theoretic approach to the unique midset property of metric spaces*, J. London Math. Soc. (2) **60** (1999), 353–365.

[23] L. Janos, *A metric characterizations of zero-dimensional spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **31** (1972), 268–270.

[24] L. Janos, *Congruence and one-dimensionality of metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 1268–1270.

[25] L. Janos and H. Martin, *Metric characterizations of dimension for separable metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **70** (1978), 209–212.

[26] M. Katětov, *On the metric dimension*, DAN SSSR **79** (1951), 189–191 (in Russian).

[27] U. Lang and Th. Schlichenmaier, *Nagata dimension, quasisymmetric embeddings, and Lipschitz extensions*, Internat. Math. Res. Notices **58** (2005), 3625–3655.

[28] L. D. Loveland, *A metric characterization of a simple closed curve*, General Topology and Appl. **6** (1976), 309–313.

[29] L. D. Loveland, *Metric spaces with connected midsets*, Houston J. Math. **3** (1977), 495–501.

[30] L. D. Loveland, *The double midset conjecture for continua in the plane*, Topology Appl. **40** (1991), 117–129.

[31] L. D. Loveland and S. M. Loveland, *Equidistant sets in plane triodic continua*, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), no. 2, 553–562.

[32] L. D. Loveland and S. G. Wayment, *Characterizing a curve with the double midset property*, Amer. Math. Monthly **81** (1974), 1003–1006.

[33] K. Nagami, *Dimension Theory*, Academic Press, 1970

[34] K. Nagami and J. H. Roberts, *Metric-dependent dimension functions*, Proc. Amer. Math. Soc **16** (1965), 601–604.

[35] Sam B. Nadler, Jr., *An embedding theorem for certain spaces with an equidistant property*, Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1976), 179–183.

[36] J. Nagata, *Note on dimension theory for metric spaces*, Fund. Math. **45** (1958), 143–181.

[37] J. Nagata, *On a special metric and dimension*, Fund. Math. **55** (1964), 181–194.

[38] J. Nagata, *Modern dimension theory*, Heldermann Verlag, Berlin, 1983.

[39] H. Ohta and J. Ono, *The unique midpoint property of a subspace of the real line*, Topology Appl. **104** (2000), 215–226.

[40] P. A. Ostrand, *Dimension of metric spaces and Hilbert's problem 13*, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 619–622.

[41] P. A. Ostrand, *A conjecture of J. Nagata on dimension and metrization*, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 623–625.

[42] K. Sitnikov, *An example of a two-dimensional set in the three-dimensional Euclidean space allowing arbitrarily small deformations into a one-dimensional polyhedron, and a certain new characterization of the dimension of sets in Euclidean space*, DAN SSSR **88** (1953), 21–24 (in Russian).

[43] Y. Ziqiu and H. J. K. Junnila, *On a special metric*, Houston J. Math. **26** (2000), 877-882.

国際数理科学協会会員の皆様

国際数理科学協会 代表理事
寺岡義伸

今年も後 2ヶ月となりました。会員の皆様におかれましては、お忙しい中にも充実された研究生活を送っておられることとお慶び申し上げます。突然で驚かれたかと思いますが、数理科学の学術誌 Scientiae Mathematicae Japonicae（略して SCMJ 誌）を発行しております国際理科学協会から、会員の皆様へ、直接、お知らせさせていただきます。

原稿の集まりが悪く、発行が遅れておりましたが、SCMJ 誌 Vol.75 No.2 (August 2012) が、まもなく発行されます。この号から、SCMJ 誌を国際数理科学協会会員の皆様に配布させていただくことに致しました。

本協会では、(1 年会員の場合）年会費として 6000 円頂いておりますが、この会費には、本協会のジャーナルである SCMJ 誌代が含まれておらず、SCMJ 誌を購読したい場合は別に購読料 4000 円を頂くことになっておりました。このため、会員である特典は、電子ジャーナルをホームページに立ち上げると、直ちにに見ることが出来ること、日本人の会員に限ってですが、会報が 2ヶ月毎に読めること、年会が 8 月に開催されること、ぐらいとなっております。　また、多くの会員に聞きますと「会費に追加 4000 円支払って SCMJ 誌を購読するのは負担が大きくなるが、どんな雑誌になって出ているのか、現物が見たい」とか「会費の中に SCMJ 誌の代金も含まれていると思っていたが、別に購読料があり、いつの間にか SCMJ 誌を送ってこなくなった」と言った声が返ってきました。

本協会の最大の売り物は、1948 年に清水辰二郎先生が刊行された Mathematica Japonica にあります。このジャーナルを支えるために、後から設立された組織が日本数理科学協会でした。

そこで、“年会費はそのまま 6000 円にしておいて、会員用の購読料は廃止して、 SCMJ 誌を会員全員に配布（郵送）することを原則とする。ただし、配布を希望しない方へは配布しない”、このように変更させていただくことにしました。既に、購読料を頂いた方へは、返却するか、来年度の会費納入時に清算させていただきます。(この件については、後日、事務の水落より、あらかじめ購読料を頂いた方へ、個別にご連絡致しますので、返金等のご指示を頂きたいと思います。)

ある程度まとめて印刷しますので、印刷総費用は変わらないそうです。売れなかった SCMJ 誌は事務所内に保管されるだけです。最近は、バックナンバーをほしがる機関も無くなったようです。

このような理由から、SCMJ 誌 Vol.75 No.2 (August 2012) を会員の皆様に送らせていただきます。電子ジャーナルを見れば良いから要らないと思われた方は、SCMJ 誌を数理科学を専攻する多くの研究者に知ってもらうために、利用していただければ幸いです。