一般社団法人
国際数理科学協会会報

No.82/2012.7

編集委員： 藤井淳一（委員長）

目次

年会関係３件： 2012年度研究集会プログラム１

2012年度国際数理科学協会年次大会
「統計的推測と統計ファイナンス」分科会研究集会

世話人：地道 正行（関西学院大学 商学部）

連絡先：熊谷 悦生（大阪大学 基礎工学研究科）

日時：2012年8月25日(土) 10:00〜16:30

場所：大阪府立大学 なかもずキャンパス A13棟 228講義室

アクセス：`http://www.osakafu-u.ac.jp/access/`

プログラム

【午前の部】

10:00〜10:30 庄谷 友吾 (大阪府立大学 大学院 理学系研究科)

『Cox回帰モデルにおける nested case-control データに基づく生存時間解析』

10:30〜11:00 畑中 悠作 (大阪府立大学 大学院 理学系研究科)

『Cox回帰モデルにおける回帰パラメータの推定法の比較』

11:00〜11:45 宮本 大輔 (東京大学 情報基盤センター)

『難読化された JavaScript コードのクラスタリングによる分類』

【午後の部】

13:00〜13:40 熊谷 悦生 (大阪大学 基礎工学研究科)

『On Divergence Measures and Jensen Difference』

13:40〜14:20 地道 正行 (関西学院大学 商学部)

『線形基底関数モデルにおける実行可能型一般化リッジ回帰推定量の正確モーメント』

14:20〜15:05 藤井 孝之 (大阪大学 金融・保険教育研究センター)
『ジャンプ型マルコフ過程のノンパラメトリック推定』

15:05〜15:15 休憩

15:15〜16:15 林 利治 (大阪府立大学 理学系研究科)
『特性関数を用いたボラティリティの推定法について』

2012 年度研究集会プログラム 2

国際数理科学協会 2012 年度年会 「確率モデルと最適化」分科会研究集会

世話人：菊田 健作（兵庫県立大学 経営学部）

日時：2012 年 8 月 25 日 (土)13:00〜17:30
場所：西宮市大学交流センター 講義室 2
アクセス：http://www.nishi.or.jp/homepage/daigaku/info/index.html

プログラム

13:00〜14:00 中西 真悟（大阪工業大学 工学部, 大阪大学 大学院 経済学研究科）
『手数料を考慮した繰返しコイン投げの賭けにおける勝者の総獲得賞金と試行回数の関係』

14:00〜15:00 *西原 理（大阪大学 大学院 経済学研究科）
芝田 隆志（首都大学東京 大学院 社会科学研究科）
『Investment timing with fixed and proportional costs of external financing』

15:00〜15:10 休憩

15:10〜16:10 堀口 正之（神奈川大学 理学部）
『推移法則が未知のマルコフ決定過程について』

16:10〜17:10 玉置 光司（愛知大学 経営学部）
『秘書問題の最近の動向』 年会特別講演

この研究集会は、日本オペレーションズ・リサーチ学会「不確実性環境下での意思決定科学」研究部会　主査：三道 弘明（大阪大学）幹事：小出 武（甲南大学）、北條 仁志（大阪府立大学）との共催で開催されます。

2012年度研究集会3

2012年度国際数理科学協会年次大会
「代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会（ALGI）」分科会研究集会

代表者：西澤弘毅（鳥取環境大学)、古澤仁（鹿児島大学）

日時：2012年9月6日（木）～9月78日（金）

場所：九州工業大学情報工学部（福岡県飯塚市）

研究部会「代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会（ALGI)」は２００５年以降，毎年，年会とは別の時期に開催させて頂いております．今年度の開催時期と場所を上記のように決めましたので，ご報告申し上げます。

尚，詳細については，決まり次第，研究集会のホームページ

http://sakura.math.kyushu-u.ac.jp/algi/index.html

に掲載する予定です。

以上，よろしくお願いします。

＊寄稿

Vector lattice 上の解析学

日本大学工学部 (非常勤講師)　川﨑敏治

1　はじめに

解析学と言うと、皆さんはどの様なものをイメージされるであろうか。通常は、実数上で定義された実数値関数の微積分ではないだろうか。研究されている分野によって、定義域及び値域を有限次元空間に、複素数に、無限次元空間に、多様体に、と拡張されたものを念頭に置かれる方もいらっしゃるだろう。偏微分方程式等を研究されている方は弱微分や Bochner 積分等を、又、非線形解析を研究されている方は劣微分等をイメージされるかもしれない。又、ベクトル値測度論や積分論を研究されている方は、定義域が可測空間で値域が線形空間、等となるかもしれない。

本文では、定義域、値域共に線形空間（特に、無限次元の場合）の微積分及び（非線形解析学分野から）不動点定理に限定して述べさせて戴こうかと思っている。通常、無限次元空間上で解析を行う場合、その空間には線形位相（特に、内積やノルムやセミノルムの族や準ノルム、等）を仮定、もしくは導入可能かを検討すると思う。私は、学生時代から積分論、特に、ベクトル値積分を専攻してきたのであるが、積分論を展開する上では必ずしも位相が必要な訳ではなく、収束構造がハッキリしていれば十分なのではなかろうかと考えていた。又、Lebesgue 積分を学べば測度についても学ぶ訳であるが、本当に欲しいのは null set なのではないだろうかとも思っていた。そう考えれば、積分は、“ ある集合上 ”での積分という形だけでなく、この点からこの点まで積分するという形でも定義出来るかもしれない。その為には、“ 区間 ”という概念があれば良い。即ち、順序集合上で微積分が展開できないだろうかと考えた。更に、線形性は必要であるし、任意の二元に対し上限や下限があった方が都合が良かったので、斯くして vector lattice 上で考えてみようかと思い至った次第である。

振り返ってみると二十年近く上記の様な感じで研究を続けてきたのであるが、とある先生よりもし興味があるなら国際数理科学協会会報へ寄稿してみませんかとお声を掛けて戴いたこともあり、私自身も今までのことを振り返ってみる良い機会かと思い書かせて戴くことにした。最初にお断りしておくが、vector lattice 上の解析学とは言っても、上記の如く私の研究してきた分野は解析学のごく一部である。学生時代から興味のあった積分論と、ここ近年行なってきた不動点定理の二点のみしか述べられない。何分にも殆ど一人で細々と行なってきたものなので、私も余り多岐に亘っては述べられる程の知見を有していない故ご容赦願いたい。そして、もし興味を持って戴けたのであれば、他領域においてもこの様な結果が得られている、等の情報を戴ければ幸いです。

2　準備

　まずは、ご存じの方もいらっしゃるとは思うが vector lattice とはどの様なものかについて述べておきたいと思う。簡単に言うと、vector lattice とは、以下を満たすものを言う。

- 線形空間である。
- Lattice である。即ち、順序集合であり、且つ、任意の二元 x, y に対し、それらの上限（以下、$x \vee y$ と書く）及び下限（以下、$x \wedge y$ と書く）が存在する。
- 線形性と順序の間に、以下の様な関係がある。

  (LO1)　任意の三元 x, y, z に対し、$x \leq y$ ならば $x + z \leq y + z$ が成り立つ。

  (LO2)　任意の二元 x, y 及び任意の正数 α に対し、$x \leq y$ ならば $\alpha x \leq \alpha y$ が成り立つ。

Vector lattice は Riesz 空間とも呼ばれているが、永年、vector lattice という名称を使ってきたので本文ではこれを使わせて戴こうかと思う。Vector lattice の日本語訳はベクトル束になるのであるが、これだと vector bundle を連想される方もいらっしゃると思うので英語表記のままとしたい。尚、順序だけでなく lattice であることを使うメリットの一つは、絶対値が定義できることにある。任意の元 x に対し、$|x| = x \vee (-x)$ で x の絶対値が定義される。解析を行う上で、この絶対値が（実数値でないのが難点であるが）ノルムの様な役割を担ってくれる。

　その他、幾つかの用語を定義しておこう。Vector lattice の部分集合 A が上に有界であるとは、ある元 x が存在し、任意の $a \in A$ に対し $a \leq x$ が成り立つことである。下に有界も同様に定義される。Vector lattice が完備であるとは、任意の有界部分集合 A に対し、上限（$\bigvee A$ と書く）及び下限（$\bigwedge A$ と書く）が存在することである。Vector lattice が Archimedean であるとは、任意の自然数 n に対し $0 \leq nx \leq y$ が成り立っているならば $x = 0$ となることである。部分集合 S が solid であるとは、$x \in S$ 且つ $|y| \leq |x|$ ならば $y \in S$ が成り立つことである。部分空間 I が ideal であるとは、I が solid でもあることを言う。Ideal B が band であるとは、$A \subset B$ 且つ $\bigvee A$ が存在するならば $\bigvee A \in B$ が成り立つことである。部分集合 A に対し、A を含む最小の solid、ideal、band が存在する。これらを、それぞれ $S(A)$、$I(A)$、$B(A)$ と書く。二つの元 x, y が互いに直交するとは、$|x| \wedge |y| = 0$ が成り立つことであり、これを $x \perp y$ と書く。部分集合 A に対し、A の任意の元と直交する元の全体を $A^\perp$ と書く。Band B が projection band であるとは、$B \oplus B^\perp$（直和）が全体空間になることである。Vector lattice が principal projection property を満たすとは、任意の元 x に対し $B(\{x\})$ が projection band となることである。Vector lattice が完備であれば、principal projection property を満たし、principal projection property を満たす空間は Archimedean であることが知られている [29, Theorem 25.1]。元 e が unit であるとは、任意の正の元 x に対し $x \wedge e > 0$ が成り立つことである。Vector lattice においては、正の二元 x, y の下限 $x \wedge y$ が必ずしも正になるとは限らない為、unit の存在は多くの箇所で仮定する必要がある。Vector lattice X の unit の全体を $\mathcal{K}_X$ と書くことにする。

3 Vector lattice 上の微分

この節では、vector lattice 上の写像に関する微分を考えてみたい。即ち、X, Y を二つの vector lattice、D を X の部分集合、f を D から Y への写像とするとき、D から $\mathcal{L}(X,Y)$（X から Y への線形写像で有界集合を有界集合に写すものの全体）への写像 f' を定義してみよう。線形空間から線形空間への写像に対する微分と言えば、真っ先に思い付くのは Fréchet 微分（又は Gâteau 微分）であろう。そこで、以下の様な定義を考えてみた。まずは、開集合の定義から始めなければいけない。

定義 3.1. X を unit を持つ vector lattice とする。

部分集合 D が開集合であるとは、任意の $x \in D$ 及び任意の $e \in \mathcal{K}_X$ に対し、$\varepsilon \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}$ が存在し $[x - \varepsilon e, x + \varepsilon e] \subset D$ が成り立つことである。開集合の全体を $\mathcal{O}_X$ と書くことにする。

次に、収束構造を以下のように定めよう。X を unit を持つ vector lattice、Y を完備な vector lattice、$\mathcal{U}^s_Y(\mathcal{K}_X, \geq)$ を以下の条件を満たす様な $\{v_e \mid e \in \mathcal{K}_X\}$ の全体とする。

(U1) $v_e \in Y$ 且つ $v_e > 0$。

$(\mathrm{U2})^d$ $e_1 \geq e_2$ ならば $v_{e_1} \geq v_{e_2}$。

$(\mathrm{U3})^s$ 任意の $e \in \mathcal{K}_X$ に対し、$\theta(e) \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}$ が存在し $v_{\theta(e)e} \leq \frac{1}{2} v_e$ が成り立つ。

定義 3.2. X を unit を持つ vector lattice、Y を完備な vector lattice、$x \in D \in \mathcal{O}_X$、$F$ を D から Y への写像とする。

F が x で右側微分可能であるとは、以下の条件を満たす様な $l \in \mathcal{L}(X,Y)$ が存在することである。

(R) $\{w^+_{x,e}\} \in \mathcal{U}^s_{\mathcal{L}(X,Y)}(\mathcal{K}_X, \geq)$ が存在し、任意の $e \in \mathcal{K}_X$ に対し $\delta^+_x \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}$ が存在し、$0 < h \leq \delta^+_x e$ となる様な任意の $h \in X$ に対し $|F(x+h) - F(x) - l(h)| \leq w^+_{x,e}(h)$ が成り立つ。

この時、$o\text{-}D^+F(x) = l$ と書く。F が x で左側微分可能であるとは、以下の条件を満たす様な $l \in \mathcal{L}(X,Y)$ が存在することである。

(L) $\{w^-_{x,e}\} \in \mathcal{U}^s_{\mathcal{L}(X,Y)}(\mathcal{K}_X, \geq)$ が存在し、任意の $e \in \mathcal{K}_X$ に対し $\delta^-_x \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}$ が存在し、$0 < h \leq \delta^-_x e$ を満たす様な任意の $h \in X$ に対し $|F(x) - F(x-h) - l(h)| \leq w^-_{x,e}(h)$ が成り立つ。

この時、$o\text{-}D^-F(x) = l$ と書く。F が x で微分可能であるとは、$o\text{-}D^+F(x) = o\text{-}D^-F(x)$ が成り立つことであり、この時、$o\text{-}DF(x) = o\text{-}D^+F(x) = o\text{-}D^-F(x)$ と書く。

A を D の部分集合、F を A の任意の元で微分可能な D から Y への写像とする。F が A 上で一様に微分可能であるとは、$\{w_e\} \in \mathcal{U}^s_{\mathcal{L}(X,Y)}(\mathcal{K}_X, \geq)$ が存在し、任意の $x \in A$ 及び任意の $e \in \mathcal{K}_X$ に対し、$\rho^{\pm}(x,e) \in \mathcal{K}_X$ が存在し $w^{\pm}_{x,\rho^{\pm}(x,e)} \leq w_e$ が成り立つことである。

以上のように微分を定めると、線形性等の性質が容易に確かめられる。

4 Vector lattice 上の積分

この節では、vector lattice 上の積分について考えてみたい。積分というと、多くの方は Lebesgue 積分を思い描くことと思う。本文ではベクトル値積分を考えているので、Bochner 積分 [4]、Birkhoff 積分若しくは Pettis 積分等を考える方もいるかもしれない。これらは、測度に基づく積分なので Lebesgue 的な積分、即ち、長さ・面積・体積等の拡張概念である。これとは別に、積分は微分の逆演算としての側面も持っている。Newton や Leibniz 的な考え方である。ご存知のように、Lebesgue 積分は、実数値の場合でさえ“ 導関数が Lebesgue 積分可能とは限らない ”という意味で不完全である。それ故に、Perron 積分や Denjoy 積分や Henstock-Kurzweil 積分等が考えられてきた。これらは、それぞれ独立に定義された訳であるが、実数値の場合には同値であることが知られている [27, 28]。本文でもこれらの積分を考えることとしたい。

Denjoy 積分は、前節で定義した微分の逆演算として定義する。まず、写像が連続及び一般絶対連続であることを以下のように定義する。尚、以下、定義域側の空間には、区間関数 q（即ち、$\mathcal{I}$ を区間の全体とするとき q は $\mathcal{I}$ から $[0,\infty)$ への関数）の存在を仮定する。又、部分集合 N が null set であるとは、任意の $e \in \mathcal{K}_X$ 及び任意の $\varepsilon \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}$ に対し、$\{I_k \mid I_k \in \mathcal{I}_X, k = 1, 2, \ldots\}$ が存在し、以下を満たすものと定義する。

(N1) $N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^e$

(N2) $\sum_{k=1}^{\infty} q(I_k) \leq \varepsilon$

ここで、区間 $[a, b]$ に対し

$$[a,b]^e = \{x \mid \varepsilon \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}} \text{が存在し } x - a \geq \varepsilon e \text{ 及び } b - x \geq \varepsilon e \text{ が成り立つ}\}$$

で定義する。

定義 4.1. X を unit を持つ vector lattice、Y を vector lattice、$x_0 \in D \subset X$、F を D から Y への写像とする。

F が x_0 で連続であるとは、以下を満たすことである。

(C) $\{v_e\} \in \mathcal{U}_Y^s(\mathcal{K}_X, \geq)$ が存在し、任意の $e \in \mathcal{K}_X$ に対し $\delta \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}$ が存在し、$0 < x - x_0 \leq \delta e$ 又は $0 < x_0 - x \leq \delta e$ を満たす様な任意の $x \in D$ に対し $|F(x) - F(x_0)| \leq v_e$ が成り立つ。

$\mathbf{C}(D, Y)$ を D の任意の元で連続である様な写像の全体とする。F が一般絶対連続であるとは、以下を満たすことである。

(ACG) $\bigcup_{p=1}^{\infty} E_p = D$ を満たす様な $\{E_p \mid E_p \subset D, p = 1, 2, \ldots\}$ 及び $\{v_e\} \in \mathcal{U}_Y^s(\mathcal{K}_X, \geq)$ が存在し、任意の自然数 p 及び任意の $e \in \mathcal{K}_X$ に対し $\delta \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}$ が存在し、$x_{1,k} < x_{2,k}$ 且つ $x_{1,k} \in E_p$ 又は

$x_{2,k} \in E_p$ $(k=1,\dots,K)$ を満たす様な任意の $x_{1,k}, x_{2,k} \in D$ に対し

$$\sum_{k=1}^{K} q([x_{1,k}, x_{2,k}]) \leq \delta \text{ならば} \sum_{k=1}^{K} |F(x_{2,k}) - F(x_{1,k})| \leq v_e$$

が成り立つ。

$\mathbf{ACG}(D,Y)$ を一般絶対連続な写像の全体とする。

$\mathcal{CO}_X$ を開集合であり且つ connected なものの全体とする。又、「はじめに」でも述べたように、区間の概念があれば此処から此処まで積分するということに意味が出て来る。順序があるので、小さな元から大きな元までの積分は問題なく定義できる。しかし、順序集合内には比較不能な元同士もある。これらの元に関しても、此処から此処まで積分するという操作を定めたい。紙面の関係で詳しくは述べないが、始点 a と終点 b を比較可能な有限個の中継点を経由して接続したものの全体を $\langle a|b\rangle$ と書くことにして、これを区間の拡張概念と定める。

定義 4.2. X を unit を持つ vector lattice、Y を完備な vector lattice、$D \in \mathcal{CO}_X$、f を D から $\mathcal{L}(X,Y)$ への写像とする。

$a, b \in D$ とする。f が $\langle a|b\rangle$ 上で Denjoy 積分可能で、F がその Denjoy 不定積分であるとは、$F \in \mathbf{ACG}(D,Y) \cap \mathbf{C}(D,Y)$ が存在し、殆ど至る処の $x \in \langle a|b\rangle$ に対し一様に o-$DF(x) = f(x)$ が成り立つことである。任意の $a, b \in D$ に対し、f が $\langle a|b\rangle$ 上で Denjoy 積分可能である時、f は D 上で Denjoy 積分可能であると言い、

$$F(x) = o\text{-}(D^*) \int f(x)dx$$

と書く。次の値

$$F(b) - F(a) = o\text{-}(D^*) \int_a^b f(x)dx$$

を $\langle a|b\rangle$ 上の f の Denjoy 積分という。$(\mathbf{D}^*)(\langle a|b\rangle, Y)$ 及び $(\mathbf{D}^*)(D,Y)$ をそれぞれ、$\langle a|b\rangle$ 上の Denjoy 積分可能な写像の全体、D 上の Denjoy 積分可能な写像の全体とする。

上記の定義が意味を持つ為には、o-$(D^*) \int_a^b f(x)dx$ が一意に定まることを示さなければならない。これに関しては、次の定理が成り立つことが分かっている。

定理 4.1. X を *unit* を持つ *vector lattice*、Y を完備な *vector lattice*、$a, b \in D \in \mathcal{CO}_X$、$f$ を $\langle a|b\rangle$ 上で積分可能な D から $\mathcal{L}(X,Y)$ への写像とする。

このとき、f の不定積分は（定数の差を除いて）一意に定まる。

次に、Henstock-Kurzweil 積分の定義に移ろう。ここでは、gauge δ 及び δ-fine division という概念が必要である。

定義 4.3. X を unit を持つ vector lattice、$D \subset X$ とする。

$D \times \mathcal{K}_X$ から $(0,\infty)$ への関数 δ を gauge と言う。Δ_X を gauge の全体とする。

定義 4.4. X を unit を持つ vector lattice、$\xi \in D \subset X$、$\delta \in \Delta_X$ とする。

次の様な部分集合

$$O_D(\xi,\delta) = \left(\bigcup_{e\in\mathcal{K}_X} [\xi - \delta(\xi,e)e, \xi + \delta(\xi,e)e]^e \right) \cap D$$

を D 内の ξ の δ-neighborhood と言う。特に $D = X$ の場合は簡単に $O(\xi,\delta)$ と書く。

X を unit を持つ vector lattice、$|\mathcal{K}_X|$ を $|x| \in \mathcal{K}_X$ を満たす様な x の全体とする。$x \in |\mathcal{K}_X|$ に対し、$x_+^\perp = \{0 \vee x\}^\perp$, $x_-^\perp = \{0 \vee (-x)\}^\perp$,

$$Q(x) = \{x_1 \mid x_1 \in |\mathcal{K}_X|,\ (x_1)_+^\perp = x_+^\perp,\ (x_1)_-^\perp = x_-^\perp\},$$

$$\overline{Q}(x) = \left(\bigcup_{x_1,x_2\in Q(x)} [0\wedge x_1, 0 \vee x_2] \right) \setminus \{0\}$$

と定義する。

定義 4.5. X を unit を持つ vector lattice、$a,b \in D \in \mathcal{CO}_X$、$\delta \in \Delta_X$ とする。

$a \neq b$ の場合、(NOL) 及び (DF) を満たす様な次の様な集合

$$\left\{ (\langle x_{k-1}|x_k\rangle, \xi_k) \ \middle|\ \begin{array}{l} x_k \in \langle a|b\rangle\ (k=0,\dots,K), x_0 = a, x_K = b, \\ \xi_k \in D\ (k=1,\dots,K) \end{array} \right\}$$

を $\langle a|b\rangle$ の δ-fine division と言う。ここで、

(NOL) $x \in |\mathcal{K}_X|$ が存在し、任意の $k = 1,\dots,K$ に対し $x_k - x_{k-1} \in \overline{Q}(x)$ が成り立つ。

(DF) 任意の $k = 1,\dots,K$ に対し $\xi_k \in \langle x_{k-1}|x_k\rangle \subset O_D(\xi_k,\delta)$ が成り立つ。

$a = b$ の場合、(DF) を満たす様な $\{(\langle a|a\rangle, \xi)\}$ を $\langle a|b\rangle$ の δ-fine division と言う。

以上の準備の下に、Henstock-Kurzweil 積分が以下のように定義される。

定義 4.6. X を unit を持つ vector lattice、Y を完備な vector lattice、$D \in \mathcal{CO}_X$、f を D から $\mathcal{L}(X,Y)$ への写像とする。

$a,b \in D$ に対し、f が $\langle a|b\rangle$ 上で Henstock-Kurzweil 積分可能であるとは、$I(f;a,b) \in Y$ 及び $\{v_e\} \in \mathcal{U}_Y^s(\mathcal{K}_X,\geq)$ が存在し、任意の $e \in \mathcal{K}_X$ に対し $\delta \in \Delta_X$ が存在し、任意の δ-fine division $\{(\langle x_{k-1}|x_k\rangle,\xi_k) \mid k = 1,\dots,K\}$ of $\langle a|b\rangle$ に対し

$$\left| \sum_{k=1}^K f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - I(f;a,b) \right| \leq v_e$$

が成り立つことである。$I(f;a,b)$ を f の $\langle a|b\rangle$ 上の Henstock-Kurzweil 積分と言い

$$I(f;a,b) = o\text{-}(HK)\int_a^b f(x)dx$$

と書く。任意の $a,b \in D$ に対し f が $\langle a|b\rangle$ 上で Henstock-Kurzweil 積分可能であるならば、D 上で Henstock-Kurzweil 積分可能であると言う。$\mathbf{(HK)}(\langle a|b\rangle, Y)$ 及び $\mathbf{(HK)}(D,Y)$ をそれぞれ、$\langle a|b\rangle$ 上の Henstock-Kurzweil 積分可能な写像の全体、D 上の Henstock-Kurzweil 積分可能な写像の全体とする。$F_a(x) = I(f;a,x) = o\text{-}(HK)\int_a^x f(x)dx$ によって定まる D から Y への写像 F_a を f の Henstock-Kurzweil 不定積分と言う。

定義域、値域共に実数全体の場合には、Denjoy 積分と Henstock-Kurzweil 積分は一致する。上記の二つの積分の間の関係はどうであろうか。以下が成り立つことが分かっている。$\mathcal{L}(X,Y)$ に対し以下の様な条件を考える。

(CB) 以下を満たす様な $\{l_n \mid n = 1,2,\ldots\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ が存在する。

- (CB1) $n_1 < n_2$ ならば $l_{n_1} \leq l_{n_2}$ である。
- (CB2) 任意の $l \in \mathcal{L}(X,Y)$ に対し、自然数 n が存在し $|l| \leq l_n$ が成り立つ。
- (CB3) $\{\varepsilon_n\} \subset \mathcal{K}_{\mathbf{R}}$ が存在し $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n l_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ が成り立つ。

定理 4.2. X を *principal projection property* を満たす様な *unit* を持つ *vector lattice*、Y を完備な *vector lattice*、$a,b \in D \in \mathcal{CO}_X$ を $a < b$ 又は $a > b$ とする。

このとき、任意の $f \in \mathbf{(D^*)}(\langle a|b\rangle, Y)$ に対し、$g \in \mathbf{(HK)}(\langle a|b\rangle, Y)$ が存在し、殆ど至る処の $x \in \langle a|b\rangle$ に対し $g(x) = f(x)$ 且つ

$$o\text{-}(HK)\int_a^b g(x)dx = o\text{-}(D^*)\int_a^b f(x)dx$$

が成り立つ。更に、$X = \mathbf{R}$ 且つ $\mathcal{L}(X,Y)$ が (CB) を満たすならば、

$$\mathbf{(D^*)}(\langle a|b\rangle, Y) \subset \mathbf{(HK)}(\langle a|b\rangle, Y)$$

が成り立つ。

5 Vector lattice 上の不動点定理

この節では、vector lattice 上の不動点定理について考えてみたい。順序集合上の不動点定理と言えば、通常は順序に関連した不動点定理、例えば、有名なものとして次の Bourbaki-Kneser の不動点定理がある。

定理 5.1. X を任意の鎖が上限を持つ様な順序集合、f を X から X への写像で任意の $x \in X$ に対し $x \leq f(x)$ が成り立つとする。

このとき、f は不動点を持つ。

この様な定理は色々応用もあるとは思うのだが、より解析的な不動点定理、例えば、Schauder-Tychonoff の不動点定理 [34,37]（Brouwer の不動点定理 [5] の無限次元版）の vector lattice 版は作れないだろうか。これが、実は可能であって、以下の定理が示せる。

定理 5.2. X を *unit* を持つ *Hausdorff Archimedean vector lattice*、K を X の *compact convex* 部分集合、f を K から K への連続写像とし、X から $\mathbf{R}$ への準同型写像（$\mathbf{R}$ も *vector lattice* と考える）g が存在し

(H2)^s　$x > 0$ である様な任意の $x \in X$ に対し $g(x) > 0$

が成り立つことを仮定する。

このとき、f は不動点を持つ。

この定理では、Hausdorff とか compact とか（連続は定義 4.1 で既に定義した）、位相の用語が使われている。Vector lattice には位相が無かったのでは？　と不審に思われるかもしれない。しかし、定義 3.1 で既に開集合を定義していることを思い出して戴きたい。この定義は、微分を定義する為に、ある元の十分近くの元も含まれている様な集合が必要であった為導入したものであるが、それがそのまま開集合の公理を満たし、依って位相が定義出来てしまうのである。この位相に依って、Hausdorff や compact と言う用語が意味を持って来る。しかし、残念なことに、この位相は線形位相であるかどうか不明（私の力不足もあり未解決）である。

さて、不動点定理には他にも色々ある。例えば、非拡大写像に関するものである [26]。K から K への写像 f が非拡大であるとは、任意の $x, y \in K$ に対し $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ が成り立つことである。これに対しは、以下の定理が示せる。X を unit を持つ Hausdorff Archimedean vector lattice、K を X の部分集合とする。K が normal structure を持つとは、K の少なくとも二元を含む様な任意の compact convex 部分集合に対し、$x \in K$ が存在し

$$\bigvee_{y \in K} |x - y| < \bigvee_{x, y \in K} |x - y|$$

が成り立つことである。

定理 5.3. X を *unit* を持つ *Hausdorff Archimedean vector lattice*、K を X の *compact convex* 部分集合、f を K から K への非拡大写像とする。K は *normal structure* を持つと仮定する。

このとき、f は不動点を持つ。

6　おわりに

Vector lattice 上の微積分及び不動点定理について書かせて戴いた。前節の様な形の不動点定理については私の知る限り無かったと思う。興味の方が先行して考えてみた定理ではあるが、通常の Banach 空間や局所凸空間で成り立つ定理が vector lattice に関してもほぼ同様の形で成り立つのは面白いのではないだろうか。

微積分に関しても興味が先行していたのは事実であるが、他に全く研究がされていなかった訳ではない。私の知る限りであるが、抽象空間（区間の概念が導入された位相空間の様なもの？）から vector lattice への写像の Henstock-Kurzweil 積分に関する論文は [30] で先行的な研究が行なわれている。その後、偶然にも私とほぼ同時期に、実数から vector lattice への写像の Henstock-Kurzweil 積分と gauge に関連した微分を絡めた微積分理論が発表されている [2]。その後も、vector lattice の収束構造を二重点列による収束に限定してではあるが収束定理等を綺麗に纏めた [3,31] 等の結果も出て来ている。しかし、まだ発展途上の感があり、今後の更なる発展に期待したい。

無限次元での解析学と言うと、どうしても線形位相の存在を仮定してしまいがちである。解析学の中にも順序を考える必要がある場合が度々あるが、その場合も線形位相空間に適当な convex cone の存在を仮定しそれから得られる順序を考える等、まず線形位相空間ありきで考えることが多いのではないだろうか。しかし、今まで見てきたように、順序だけであっても行える解析はある。必要があれば、定義 3.1 の様に逆に位相を定義も出来る。この様に、逆方面から考え直してみるのも意外に面白いのではないかと思うのだが如何だろうか。

参考文献

[1] A. Alexiewicz, *On Denjoy integrals of abstract functions*, Towarzysewo Naukowe Warszawskie (Soc. Sci. Lett. Varsovie C. R. Cl. III. Sci. Math. Phys.) **41** (1948), 97–129.

[2] A. Boccuto, *Differential and integral calculus in Riesz spaces*, Tatra Mountains Mathematical Publications **14** (1998), 293–323.

[3] A. Boccuto, B. Riečan, and M. Vrábelová, *Kurzweil-Henstock Integral in Riesz Spaces*, Bentham Science Publishers, Sharjah, 2009.

[4] S. Bochner, *Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind*, Fundamenta Mathematicae **20** (1933), 262–276.

[5] L. E. J. Brouwer, *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen **71** (1912), 97–115.

[6] F. E. Browder, *The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces*, Mathematische Annalen **177** (1968), 283–301.

[7] R. Cristescu, *Topological Vector Spaces*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977.

[8] K. Fan, *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem*, Mathematische Annalen **142** (1961), 305–310.

[9] M. Federson, *The fundamental theorem of calculus for multidimensional Banach space-valued Henstock vector integrals*, Real Analysis Exchange **25** (2000), no. 1, 469–480.

[10] D. H. Fremlin, *The Henstock and McShane integrals of vector-valued functions*, Illinois Journal of Mathematics **38** (1994), no. 3, 471–479.

[11] R. Henstock, *Generalized integrals of vector-valued functions*, Proceedings of the London Mathematical Society. Third Series **19** (1969), 509–536.

[12] S. Izumi, *An abstract integral (X)*, Proceedings of the Imperial Academy of Japan **18** (1942), no. 9, 543–547.

[13] S. Izumi, G. Sunouchi, M. Orihara, and M. Kasahara, *Denjoy integrals, I-II*, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan **17** (1943), 102–120, 329–353 (in Japanese).

[14] T. Kawasaki, *Order derivative of operators in vector lattices*, Mathematica Japonica **46** (1997), no. 1, 79–84.

[15] ———, *On Newton integration in vector spaces*, Mathematica Japonica **46** (1997), no. 1, 85–90.

[16] ———, *Order Lebesgue integration in vector lattices*, Mathematica Japonica **48** (1998), no. 1, 13–17.

[17] ———, *Approximately order derivatives in vector lattices*, Mathematica Japonica **49** (1999), no. 2, 229–239.

[18] ———, *Order derivative and order Newton integral of operators in vector lattices*, Far East Journal of Mathematical Sciences **1** (1999), no. 6, 903–926.

[19] ———, *Uniquely determinedness of the approximately order derivative*, Scientiae Mathematicae Japonicae Online **7** (2002), 333–336.

[20] ———, *Uniquely determinedness of the approximately order derivative*, Scientiae Mathematicae Japonicae **57** (2003), no. 2, 373–376.

[21] ———, *Denjoy integral and Henstock-Kurzweil integral in vector lattices, I, II*, Czechoslovak Mathematical Journal **59** (2009), no. 2, 381–399, 401–417.

[22] ———, *Minimax theorem in a vector lattice*, Nonlinear Mathematics for Uncertainly and its Applications (S. Akashi, Y. Kimura, and T. Tanaka, eds.), Yokohama Publishers, Yokohama, 2010, pp. 99–103.

[23] ———, *Fixed point theorems for nonexpansive mappings in a vector lattice*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis **12** (2011), no. 2, 351–358.

[24] T. Kawasaki, M. Toyoda, and T. Watanabe, *Takahashi's and Fan-Browder's fixed point theorems in a vector lattice*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis **10** (2009), no. 3, 455–461.

[25] ———, *Schauder-Tychonoff's fixed point theorem in a vector lattice*, Fixed Point Theory **11** (2009), no. 1, 37–44.

[26] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, The American Mathematical Monthly **72** (1965), no. 9, 1004–1006.

[27] Y. Kubota, *Theory of the Integral*, Maki, Tokyo, 1977 (in Japanese).

[28] P.-Y. Lee, *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, World Scientific, Singapore, 1989.

[29] W. A. J. Luxemburg and A. C. Zaanen, *Riesz Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[30] P. McGill, *Integration in vector lattices*, Journal of the London Mathematical Societyy. Second Series **11** (1975), 347–360.

[31] B. Riečan and T. Neubrunn, *Integral, Measure, and Ordering*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[32] P. Romanovski, *Intégrale de Denjoy dans les espaces abstraits*, Recueil Mathématique (Matematicheskii Sbornik) N. S. **9** (1941), no. 1, 67–120.

[33] H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 1974.

[34] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funkionalräumen*, Studia Mathematica **2** (1930), 171–180.

[35] W. Takahashi, *Fixed point, minimax, and Hahn-Banach theorems*, Proceedings of the Symposium on Pure Mathematics **45** (1986), no. 2, 419–427.

[36] ———, *Nonlinear Functional Analysis. Fixed Points Theory and its Applications*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[37] A. Tychonoff, *Ein Fixpunktsatz*, Mathematische Annalen **111** (1935), 767–776.

[38] B. Z. Vulikh, *Introduction to the Theory of Partially Orderd Spaces*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1967.

＊　正会員申込用紙

正会員入会申込書

氏名		英語名	
次の 2 つのうち会報等を送付先とする方に◦を付けてお書きください			
所属先 住所	〒		
住所	〒		
専門分野	表 f *より選んで〇で囲って下さい f-1, f-2, f-3, f-4, f-5, f-6, f-7, f-8, f-9, f-10, f-11, f-12, f-13, f-14		
E-mail address		電話番号	
		Fax 番号	
会員区分 該当部分に チェック	☐ A1 一般 1 年　☐ A3 一般 3 年　☐ S-A1 高齢者又は学生 1 年 ☐ S-A3 高齢者又は学生 3 年　☐ 生涯会員		
所属先の システム	☐ ビデオ会議可能　☐ 遠隔会議可能　☐ コンピューターセンター		
所属先の 施設	☐ ISDN　☐ IP		
所属大学等が 機関委員	☐ 会員である　☐ 会員でない		
SCMJ のプリント版の購入			
☐ 希望 1 年会員 3,000 円、3 年会員 8,000 円**〔前払い〕		☐ 希望しない	
高齢会員を 申し込む場合	生年月日		学生会員の場合は在学証を添付
日付			
私は ISMS 会員になり、国際数理科学協会に送り状に記載された年会費を払います。ISMS 会員として受け取った Scientiae Mathematicae Japonicae のコピーは個人使用とし、機関、大学または図書館やその他の組織の中に置かず、閲覧目的で会員購読することもしません。		署 名	

＊ Notices from the ISMS March 2008 p.25 を御参照下さい。**ただし、3 年間一括の場合は 8,000 円です。この申込みの内容は会との連絡以外には使用いたしません。

Application form for an individual member of ISMS

<table>
<tr><td>Family Name</td><td colspan="2"></td><td>First & Middle Name</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="6">Check one of the following addresses to which “ Notices from the ISMS ” should be sent.</td></tr>
<tr><td>Address of your institution (university)</td><td colspan="5">☐</td></tr>
<tr><td>Home address</td><td colspan="5">☐</td></tr>
<tr><td>Special fields*</td><td colspan="5">f-1 f-2 f-3 f-4 f-5 f-6 f-7 f-8 f-9 f-10 f-11 f-12 f-13 f-14</td></tr>
<tr><td rowspan="2">E-mail address</td><td colspan="2" rowspan="2"></td><td>Tel.</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Fax</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Membership category** (Circle one)</td><td colspan="5">A1, A3, SA1, SA3, F1, F3, SF1, SF3, D1, D3, SD1, SD3, AL, FL, DL</td></tr>
<tr><td>Check the facilities your institution has.</td><td colspan="5">☐ Conference room(s) for video conference
☐ Computer center</td></tr>
<tr><td>Communication system of your institution</td><td colspan="5">☐ ISDN ☐ IP</td></tr>
<tr><td colspan="2">Is your institution (university) an Institutional Member of ISMS?</td><td colspan="4">☐ Yes ☐ No</td></tr>
<tr><td>☐ I subscribe to the printed version of SCMJ.</td><td colspan="5">☐ ¥3,000 (US$37, €27) per year for those members of A1, SA1, F1, and SF1 , D1 and SD1.
☐ ¥2,700 (US$34, €25) per year for those members of A3, SA3, F3, SF3, D3, SD3, AL, FL, and DL.
☐ In case A3, SA3, F3, SF3, D3, SD3, AL, FL, or DL members make the payment at a time in advance, the price for 3 years is ¥8,000 (US$100, €73).</td></tr>
<tr><td>For the aged member, write your birth year.</td><td colspan="2"></td><td colspan="3">For the student member, student registration certificate should be attached.</td></tr>
<tr><td>Date of Application</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="6">I wish to enroll as a member of ISMS and will pay to International Society for Mathematical Sciences the annual dues upon presentation of an invoice. Copies of Scientiae Mathematicae Japonicae received as an ISMS member will be for my personal use only and shall not be placed in institutional, university or other libraries or organizations, nor can membership subscriptions be used for library purposes.</td></tr>
<tr><td>Signature</td><td colspan="5"></td></tr>
</table>

* See “Notices from the ISMS March 2008 p.25”.
** See “Notices from the ISMS March 2008 p.28”.

ISMS (JAMS の継続) 会員募集

ISMS の出版物：ISMS は、創刊より約 60 年、国際的に高い評価を得ている Mathematica Japonica (M.J.) と、その姉妹誌で電子 Journal と Paper 誌とを持つ、Scientiae Mathematicae (SCM) とを発行してきました。両誌は合併して、"21 世紀 MJ/SCM New Series, Scientiae Mathematicae Japonicae (SCMJ) "として、電子版は 2000 年 9 月より発行してきました。印刷版は、1978 年 1 月より、年間 6 冊、700～1200 頁を出版していましたが、最近の諸般の事情により本年からは年 3 回発行となりました。なお、全体として 260 巻を超える、日本で最大量を誇る数理科学の雑誌です。その特長は、下の 1)～8) です。

1) Editorial Board には、国内だけでなく、海外 15 カ国の著名な研究者 40 名が参加している。
2) 世界の research group に論文が紹介され、積極的な交流が推進されている。
3) Editor を窓口として直接論文を投稿できて、迅速な referee 及び出版が得られる。
4) 有名な数理科学者の original paper や、研究に役立つ survey が、毎号載せられている。
5) SCMJ は、世界の有名数理科学者による、極めて興味ある expository paper を、毎号 International Plaza 欄に掲載している。世界各国の図書館へ、広く配布されている。
6) 投稿論文は、accept 後 (又は組版後) 待ち時間 0 で発行されます。
7) 別刷作成について、ページ数に無関係に一編について 100 (US$ 1) でお分けいたします。
8) Mathematical Reviews, Zentralblatt に from cover to cover で review されている。

ISMS の研究集会：(1) 研究仲間がゆっくり時間をかけて発表、討論をする、特色ある参集型研究集会が毎年行われ、非会員も含む多数の参加者の、活発な研究交流の場となっている。(2)ISMS には内外の著名な研究者が多数入っておられる。近いうちに内外を結ぶ高い level の研究会が online で行われる事を期待している。（本誌 45 号 3p 及び Notices March 2006 9p を御参照下さい）ISMS の学術賞：会員の優れた論文を広く世界に紹介し、更なる研究を奨励するために、ISMS 賞、JAMS 賞、Shimizu 賞、Kunugui 賞、Kitagawa 賞を設けている。（詳しくは本誌 45 号 2p 会則 13 条を御参照下さい）

＜ISMS の会員の特典＞１．SCMJ 電子版の購読 (print out も含む) 無料。２．SCMJ print 版の少額での購読 (下表１)。＜機関購読会員の特典＞ 1．機関内の 2 名の方を準会員として会費無料でほぼ会員と同じ権利を持つものとして登録することが出来る。

表１
【雑誌購読費】

	正会員（1 年）	正会員（3 年）	機関会員	定価
Print	￥3,000 US$ 37, €27	￥2,700* US$ 34, €25	￥ 18,000 US$225,€164	￥ 23,000 US$288,€210
Online	Free	Free		
Online+ print	￥3,000 US$37, €27	￥ 2,700 US$34, €25	￥ 18,000 US$225,€164	￥ 23,000 US$288,€210

* ３年会員のみ、雑誌購読費 3 年分前払いの場合は￥8,000 (US$ 100, €73) になります。
著者の方には、SCMJ を１冊送料込みで 1,000 円または US＄12 で購入できます。

表２
【2012 年の会費】

Categories	国内会員	海外会員	途上国会員
単年度 A 会員	￥6,000	US$ 75, €55	US$ 45 , €33
3 年 A 会員	￥16,000	US$ 200, €147	US$ 120, €88
単年度 S 会員	￥4,000	US$ 50, €37	US$ 30, €22
3 年 S 会員	￥10,000	US$125, €92	US$ 74, €54
生涯会員**	￥60,000	US$ 750, €550	US$ 440, €323

**過去 10 年以上、正会員であった方に限る。
A 会員は正会員を指し、S 会員は、学生会員と高齢会員 (70 歳以上) を指します。

国際数理科学協会
International Society for Mathematical Sciences

〒 590-0075　堺市堺区南花田口町 2-1-18 新堺東ビル内
Tel：(072)222-1850 /　Fax：(072) 222-7987　　URL：http://www.jams.or.jp