国際数理科学協会会報

No.66/ 2009. 11

編集委員： 藤井正俊 (委員長) 、藤井淳一

目次

＊ 一般社団法人国際数理科学協会定款(案)

協会の公益法人化を目指しています。これに申請するにはまず、法人化を法務局で認めてもらう必要があります。そのためには、今の会則では難しく、新たに定款を定める必要があります。そこで今までの会則を基に定款(案)を作ってみました。２，３の方にはご意見を伺いましたが、どなたからも異議はありませんでした。ここの案の案を近くの法務局の方に見てもらっていますので、書き方(道筋)では大きな誤りはないと信じています。
その公益法人を認めていただくと、メリットとして、寄付をして頂いた方の税の控除が認められることと、その他郵便料金について今も受けていますが、このたび制定されました新たな公益法人の設定により、そのメリットの持続があるかもしれません。なお、申請には登録免許税として 60,000 円かかります。公益法人の認定はこの協会の場合、大阪府が行うようです。その前に、法人を法務局で認めてもらう必要があります。
会則の大改定ですが、今の会則の変更に沿って進めたいと思います。細則(案)も用意はしていますが、法人認定の際は出す必要はないとのことで、取り敢えずこの定款(案)を良くお読みになって、ご意見を頂きたいと思います（pbls5@jams.jp）。書き直すべきものがあれば次回の会報に書き、それと同時に細則(案)も対応して修正し次回の会報にお知らせし、今の会則変更の規則に沿って次の時に皆様方のご意見を表決で決めたいと思います。
新たな法人への規則では、役員の会議への出席が厳格になっています。そのため人数を制限しました。

国際数理科学協会会長　　長尾　壽夫

一般社団法人　国際数理科学協会定款（案）

第１章　総則

（名称）
第１条　この法人は一般社団法人　国際数理科学協会といい、外国に対しては International Society for Mathematical Sciences（ISMS) という。
（事務所）
第２条　この法人は事務所を大阪府堺市堺区南花田口町 2-1-18 に置く。

第２章　目的および事業

（目的）
第３条　この法人は数理科学の研究、普及を促進し、研究者間の国際交流を盛んにし、数理科学の進歩発展に貢献することを目的とする。
（事業）
第４条　この法人は前条の目的を達成するため、次の事業を行う。
１）研究論文集 Scientiae Mathematicae Japonicae その他学術的資料の発行
２）学術的会合（年会、IVMS、研究集会）の開催
３）その他この法人の目的を達成するための事業

第３章　会員

（会員の種類）
第５条　この法人の会員は次のいずれかの号に該当するものとする。
１）個人会員
　（１）　正会員　数理科学またはこれと関連する学術の知識を有する者
　（２）　学生会員　上記の領域に関連する大学、大学院、これに準ずる学校の学生
　（３）　名誉会員　この法人の対象とする領域において特に功績がある者。選考基準は細則に定める
　（４）　準会員　機関会員に所属する機関会員により指名されたもの、この会員の特典等は細則に定める
２）機関会員　この法人の目的に積極的に賛同する公的機関及び法人
３）賛助会員　この法人の事業を後援する個人または団体
（経費の負担）
第６条 この法人の事業活動に経常的に生じる費用をあてるため、会員になったとき会費を納めなければならない。詳細は細則に定める。
（退会）
第７条　退会届を出した会員はいつでも退会することができる。
（除名）
第８条　次の会員は理事会の議を経て除名することが出来る。
１）会費を２年にわたり滞納した者
２）この法人の名誉を著しく傷つけ、または目的に反する行為をしたとき
３）その他除名すべき正当な事由があるとき
（会員資格の喪失）
第９条　前２条のほか、会員は次のいずれかに至ったときはその資格を失う。
１）理事会が同意したとき
２）会員が死亡、または解散したとき

第４章　役員および職員

(役員の種類)
第 10 条　この法人には、次の役員をおく。
　１）若干名の会員以外の理事を含めて、正会員、学生会員から選ばれた、理事　10 名以上 12 名以内（うち代表理事１名、代表副理事１名を含む）。担当分野などの詳細は細則で定める。
　２）監事　１名
(役員の選出)
第11条　　代表理事、理事、監事については、正会員、学生会員中から別に定める方法によって選任

し、総会において承認を受けるものとする。
２　理事、及び監事は兼任することは出来ない。
(役員の任務)
第 12 条　代表理事はこの法人の業務を総理し、この法人を代表する。
２　代表副理事は、代表理事を補佐し代表理事に事故があるとき、または欠けたとき職務を代行する。
第 13 条　理事は理事会を組織し、この定款に定めるもののほか、総会の決議事項以外の事項を決議し執行する。
第 14 条　監事はこの法人の業務および財産に関し次の各号に規定する職務を行う。
１）法人の財産状況を監査する。
２）理事会に出席し、理事の業務遂行の状況を監査報告する。なお、理事会での議決権は有しない。
３）前号の報告をするため必要があるときは、理事会または総会を招集する。
（民法上の社員）
第 15 条　全役員をもって、民法上の社員とする。
（役員の任期・欠員補充および解任）
第 16 条　この法人の役員の任期は２年とし、毎年その半数を改選する。理事は再任できない。
２．補充または増員した役員の任期は前任者または現任者の残任期間とする。
３．役員はその任期満了後でも後任者が就任するまではなおその職務を行う。
４．役員はこの法人としてふさわしくない行為のあった場合または特別の事情のある場合には、その任期中であっても理事現在数および社員現在数のそれぞれのその４分の３以上の決議により、代表理事がこれを解任することが出来る。
第 17 条　役員は無給とする。
第 18 条　代表理事が必要と認めるときは、理事会の承認を得て会務を従事する有給の職員を置くことができる。詳細は細則で定める。

第５章　　会　議

（会議の種類）
第 19 条　この法人の会議は総会および理事会とし、総会は通常総会および臨時総会とする。
２．総会は全役員をもって構成する。
３．理事会は全ての理事をもって構成する。
第 20 条　理事会は、年１回代表理事が招集する。ただし、代表理事または監事が必要と認めたとき、または理事現在数の２分の１以上から、会議の目的たる事項を示して理事会の招集を請求されたとき、３０日以内に臨時理事会を招集しなければならない。
２．理事会の議長は、代表理事とする。
第 21 条　理事会は理事現在数の３分の２以上出席しなければ議事を開き決議することが出来ない。ただし、当該議事につき、あらかじめメール等で意思表明したものは出席とみなし、議決に加える。
２．理事会の議事は、この定款に別段の定めがある場合を除き、出席理事の過半数で決し、同数のときは議長の決するところによる。
（総会の招集）
第 22 条　通常総会は、毎年１回事業年度終了後３ヶ月以内に代表理事が招集する。
２　理事会または監事が必要と認めたときは、代表理事はいつでも臨時総会を招集することが出来る。
３　代表理事は社員現有数の５分の１以上からの要求があったとき、そのときより２０日以内に臨時総会を招集しなければならない。
第23条　通常総会の議長は、代表理事とし、事故があるときは代表副理事が務め、それ以外は出席者の互選による。
第 24 条　総会の招集は少なくとも 10 日前に事項、日時、場所を現有社員に通知しなければならない。
(総会の審議事項)
第 25 条　次の事項は総会に提出してその承認を受けなければならない。
１）事業計画および収支予算
２）事業報告および収支決算
３）財産目録、貸借対照表および正味財産増減計算書
４）その他理事会で認められた事項
(総会の定足数)

第 26 条　総会は社員現在数の過半数が出席しなくては議事を開き、決議することは出来ない。ただし、あらかじめメールなどで意思表示したものはこの限りではない。
第27条　総会の議事内容は全会員に知らせなくてはならない。
第 28 条　総会および理事会の議事録は議長が作成し、議長及び当該会議で選ばれた出席者２名の以上が署名捺印の上保存する。

第６章　　資産および会計

（事業年度）
第 29 条　この法人の事業年度は毎年１月１日に始まり１２月３１日に終わる。
(資産)
第 30 条　この法人の資産は、次の通りである。
１）会費
２）事業に伴う収入
３）資産から生ずる収入
４）寄付金
５）その他の収入
第 31 条　この法人の資産は代表理事が管理する。
第 32 条　この法人の事業遂行に要する経費は資産を持って当てる。
（事業計画・予算）
第 33 条　この法人の事業計画およびこれに伴う収支予算は代表理事が編成し、理事会および総会の決議を得なければならない。事業計画を変更する場合も同様である。
（決算報告）
第 34 条　この法人の収支決算は代表理事が作成し、決算予算表、貸借対照表、および事業報告書ならびに会員の移動状況とともに監事の意見をつけて理事会および総会の承認を受けなければならない。

第７章　定款の変更ならびに解散

（定款の変更）
第 35 条　この定款は理事現在数および社員現在数のそれぞれ３分の２以上の決議を受けなければ変更することは出来ない。
（解散）
第 36 条　この法人の解散は理事現在数および社員現在数のそれぞれの３分の２以上の決議を受けなければならない。
第 37 条　この法人の解散に伴う残余財産は理事現在数および社員現在数のそれぞれの３分の２以上の決議を経て、この法人の目的に類似する公益法人に寄付するものとする。

第８章　公示の方法

第 38 条　この法人の公示は、官報に掲載する方法により行う。

＊　2010年研究集会開催

平成２２年度の研究集会は、８月２２－２３日に大阪大学吹田キャンパスで開催する予定です。会場責任者は、大阪大学大学院情報科学研究科の八木厚志氏です。分科会の開催を希望される責任者の方は、平成２２年5月３１日までに会場責任者 まで下記の事項を添えてお申込みください。 １．会議タイトル　２．責任者名 ３．責任者の所属・連絡先　４．希望日時　５．参加予定人数
申込み先　郵便の場合：５６５－０８７１　吹田市山田丘２－１　情報科学研究科情報数理学専攻八木厚志　宛 e-メールの場合：atsushi-yagi@ist.osaka-u.ac.jp

＊　研究集会の開催
研究部会「代数，論理，幾何と情報科学研究集会」を開催しました。場所：鳥取環境大学 日時：9 月 14 日から 15 日まで　講演数：8 件　参加者：20 名
尚，プログラムはhttp://sakura.math.kyushu-u.ac.jp/algi/20/program.html　をみて下さい。

＊ 寄稿

3 個以上の作用素の幾何平均について

中村　登 (富山高専)

1　はじめに

ヒルベルト空間上の (正値) 作用素（より正確には有界な非負線形作用素）の平均演算は作用素平均と呼ばれる。この作用素平均は R.J.Duffin 等の電気回路の設計問題及び W.Pusz − W.L.Woronowicz による量子力学的状態での混合状態の数学モデルの研究に端を発するもので、久保−安藤の解析的統一理論として 2 個の作用素の場合が 1980 年代に完成した。その後、この理論の応用と一般化の研究は多くの数学者 $([\mathbf{1}],[\mathbf{15}],[\mathbf{3}],[\mathbf{8}],etc.)$ によって論じられている。その中でも、2 個の作用素の幾何平均の一般化として、$k\ (\geq 3)$ 個の作用素の幾何平均が考えられるが、作用素の積の非可換性が要因となり、3 個の作用素の幾何平均の定義においてすら統一した理論が完成を見ていない。

$A,\ B$ を Hilbert 空間 H 上の正値作用素（あるいはある n についての $n\times n$ 正値行列）とする。安藤 [2] はその幾何平均 ($A\#B$ と記す）を (可逆性を仮定しないとき）

$$A\#B=\max\left\{X\geq 0;\begin{bmatrix} A & X\\ X & B\end{bmatrix}\geq 0\right\}$$

によって定義した。これは、$A,\ B$ が可逆のときには

$$A\#B=A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}\ (=B^{1/2}(B^{-1/2}AB^{-1/2})^{1/2}B^{1/2})$$

と表されるものである。これはまた、Riccati 方程式 $XA^{-1}X=B$ を考えるとき、この解 X としても得られるものである。さらに、$0\leq\alpha\leq 1$ に対して、上記の幾何平均の拡張としての加重幾何平均 $A\sharp_\alpha B$ が

$$A\sharp_\alpha B=A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{\alpha}A^{1/2}$$

と定義される [16]。

Hilbert 空間 H 上の、正値かつ可逆な作用素（あるいは $n\times n$ 正定値行列）の集合を Ω と置く。3 個の作用素 $A,B,C\in\Omega$ に対して、先の 2 個の作用素についての Riccati 型方程式の拡張としての 3 次方程式

$$X(A\sharp B)^{-1}X(A\sharp B)^{-1}X=C,$$

を考える。その解 $X=X_{A,B,C}\in\Omega$ が一意的に存在して

$$X=(A\sharp B)\sharp_{1/3}C(=C\sharp_{2/3}(A\sharp B)). \tag{1}$$

となる。もし、A,B,C が可換であるならば、$X=(ABC)^{1/3}$ となり、X は幾何平均の候補としてもよいと考えられる。しかし、このままでは、安藤−李− Mathias [3] が提唱する望ましい幾何平均として要求される 10 の性質 (以後性質 P1-P10 と呼ぶ) の一つである permutation-invariance の性質を持たない。この性質を補うために、安藤−李− Mathias [3] による対称化のための逐次近似 (symmetrization procedure) の手法を用い、次のような 3 個の作用素列を定義する：$\{A_n\},\{B_n\},\{C_n\}$ において、 $A_1=A,\ B_1=B,\ C_1=C$ とし、$n\geq 1$ に対して、($\lambda=2/3$ でもよいが、より一般化して) $\lambda\in(0,1]$ として、

$$\begin{cases} A_{n+1}=A_n\sharp_\lambda(B_n\sharp C_n),\\ B_{n+1}=B_n\sharp_\lambda(C_n\sharp A_n),\\ C_{n+1}=C_n\sharp_\lambda(A_n\sharp B_n)\end{cases}$$

とする。このとき、後に定義する Thompson metric に関して、3 個の作用素列は収束し共通の極限をもつ。そこでこの極限を作用素 A,B,C の幾何平均として定義し、$G_\lambda(=G_\lambda(A,B,C))$ で表すことにする。$\lambda=1$ のとき、$G_\lambda(=G_1)$

は、安藤－李－ Mathias [3] が示した幾何平均となり、$\lambda = 2/3,\ G_\lambda (= G_{2/3})$ は、中村 [19] が示した幾何平均になる。先に述べたように、性質 P1-P10 は、望ましい k 個の作用素（または行列）の幾何平均に対して要求されるべき条件であると考えられる。上記の幾何平均 G_λ は泉野－中村 [14] が示したものでこれらの性質 P1-P10 のすべてを満たす。性質 P1-P10 の記述についてはここでは割愛するが文献 [3] を参照してほしい。

本稿では、2 個の作用素の幾何平均を基にして、性質 P1-P10 のすべてを満たす k 個の作用素幾何平均を数学的帰納法により定義できることを示し、更にその拡張としての加重作用素幾何平均についても考察する。

2　3 個以上の作用素の幾何平均の定義

2 個の作用素 $A, B \in \Omega$ の Thompson metric は次のように定義される ([20], [4], [6])：

$$d(A,B) = \max\{\log M(A/B),\ \log M(B/A)\},$$

ただし、

$$M(A/B) = \inf\{\mu > 0 : A \le \mu B\}\ (=\| B^{-1/2}AB^{-1/2} \|).$$

このとき、Ω において、Thompson metric から導かれる位相は相対ノルム位相と同値であり、Ω は Thompson metric に関して完備となる。また、作用素列の収束を論ずるときに有用な基本的な不等式として、作用素 $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \Omega$ かつ実数 $\alpha \in (0,1)$ に対して、2 個の作用素の加重幾何平均についての次の不等式が成り立つ ([4], [6]):

$$d(A_1 \#_\alpha A_2, B_1 \#_\alpha B_2) \le (1-\alpha) d(A_1, B_1) + \alpha d(A_2, B_2). \tag{2}$$

ここで $k\ (\ge 2)$ 個の (Ω の中の) 作用素の幾何平均 $G(X_1, \ldots, X_k)$ に対し、次の不等式を考える:

$$d(G(X_1, \ldots, X_k), G(Y_1, \ldots, Y_k)) \le \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} d(X_i, X_i). \tag{3}$$

２個の作用素 $A_1, A_2 \in \Omega$ の幾何平均は $G(A_1, A_2) = A_1 \# A_2$ によって定義され、これは勿論、性質 P1-P10 のすべてを持っている。(また、$k=2$ での (3) を満たしている。）そこで、これを出発点として、順次帰納的に各 k についての k 個の作用素の幾何平均が定義される：

定理 2.1. $G(X_1, \ldots, X_k)$ $(k \ge 2)$ は、性質 P1-P10 と不等式 (3) を満たす k 個の作用素の幾何平均とする。$\lambda \in (0,1]$ とし、$(k+1)$ 個 の作用素列 $\{A_1^{(r)}\}, \ldots, \{A_{k+1}^{(r)}\}$ を次のように定義する：

$$\begin{cases} A_i^{(1)} = A_i \qquad (i = 1, \ldots, k+1), \\ A_i^{(r+1)} = A_i^{(r)} \#_\lambda G((A_j^{(r)})_{j \ne i}) (= A_i^{(r)} \#_\lambda G(A_1^{(r)}, \ldots, A_{i-1}^{(r)}, A_{i+1}^{(r)}, \ldots, A_{k+1}^{(r)})) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (r \ge 1,\ i = 1, \ldots, k+1). \end{cases}$$

このとき、(Thompson metric に関して) これらの作用素列の共通な極限が存在する。これを $G_\lambda(A_1, \ldots, A_{k+1})$ と記し、$(k+1)$ 個 の作用素 $A_1, \ldots, A_{k+1}$ の幾何平均と定義するとき、これは、$(k+1)$ 個 の作用素について、性質 P1-P10 を持ち、また

$$d(G_\lambda(A_1, \ldots, A_{k+1}), G_\lambda(B_1, \ldots, B_{k+1})) \le \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} d(A_i, B_i). \tag{4}$$

を満たす。

例 2.2. 行列 A, B, C を次のようにとったときの, $\lambda = 1/3, 1/2, 2/3, 1$ についての G_λ の比較：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 0.2 \end{bmatrix},\quad A_2 = \begin{bmatrix} 4.1 & 4.9 \\ 4.9 & 6.1 \end{bmatrix},\quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

このとき、数値計算 (10^{-6} 未満切り捨て) により、次の値を得る：

$$G_{1/3}=\begin{bmatrix} 1.647\ 283 & 0.613\ 823 \\ 0.613\ 823 & 0.835\ 787 \end{bmatrix}(=A_1^{(r)}=A_2^{(r)}=A_3^{(r)},\ r\geq 24),$$
$$G_{1/2}=\begin{bmatrix} 1.649\ 909 & 0.615\ 737 \\ 0.615\ 737 & 0.835\ 883 \end{bmatrix}(=A_1^{(r)}=A_2^{(r)}=A_3^{(r)},\ r\geq 13),$$
$$G_{2/3}=\begin{bmatrix} 1.660\ 083 & 0.623\ 133 \\ 0.623\ 133 & 0.836\ 280 \end{bmatrix}(=A_1^{(r)}=A_2^{(r)}=A_3^{(r)},\ r\geq 4),$$

$$G_1=\begin{bmatrix} 1.697\ 082 & 0.649\ 788 \\ 0.649\ 788 & 0.838\ 040 \end{bmatrix}(=A_1^{(r)}=A_2^{(r)}=A_3^{(r)},\ r\geq 24).$$

定理 2.1 のように $G(A_1,A_2)=A_1\#A_2$ を出発点として 逐次的に構成される幾何平均を

$$G_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell}=(G_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{\ell-1}})_{\lambda_\ell}$$

と記すと便利である。こうすると、$G_{1^{(1)},\ldots,1^{(k-2)}}$ ($1^{(i)}$ は i 番目の１) は 安藤－李－ Mathias [3] によって与えられた k 個の作用素の幾何平均であり、$G_{\frac{2}{3},\ldots,\frac{k-1}{k}}$ は [14] で泉野-中村が与えたものである。

例 2.3.

$$A_1=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix},\quad A_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

とすると、$r\geq 4$ に対して数値計算 (10^{-6} 未満切り捨て) により次を得る：

$$G_{\frac{2}{3},\frac{3}{4}}(A_1,A_2,A_3,A_4)=\begin{bmatrix} 1.412\ 693 & 0.706\ 627 \\ 0.706\ 627 & 1.033\ 191 \end{bmatrix}(=A_1^{(r)}=A_2^{(r)}=A_3^{(r)}=A_4^{(r)}).$$

幾何平均の他の定義との比較については [19] を参照してほしい。そこでは、安藤-李-Mathias [3]、幸崎 [15]、Anderson-Morley-Trapp [1] が定義した幾何平均について紹介し、本稿で定義したものとの数値計算による比較が示してある。

3　3 個以上の作用素の加重幾何平均とその性質

ここでは 2 個の作用素の加重幾何平均の拡張として、2 つの型の k (≥ 3) 個の作用素の加重幾何平均を導入する。性質 P1-P10 を満たす k 個の作用素すべての幾何平均の集合を G(k) で表すことにする。

先の性質 P1-P10 を基に、望ましい加重幾何平均であるための条件として、$\alpha_1,\ldots,\alpha_k\geq 0$ かつ $\sum_{j=1}^k\alpha_j=1$ を満たす k 個の非負実数の組 $w=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ － k 加重と呼ぶことにする－を加重にもつ k 個の作用素 $A_1,\ldots,A_k\in\Omega$ の加重幾何平均 $\widetilde{G}=G(w;A_1,\ldots,A_k)=G(\alpha_1,\ldots,\alpha_k\ ;A_1,\ldots,A_k)$ に対し、(P1-P10 に平行した）次の 10 の性質 PW1 － PW10 を持つことが期待される：

PW1 Consistency with scalars. 全ての A_i が互いに可換ならば $\widetilde{G}=A_1^{\alpha_1}\cdots A_k^{\alpha_k}$.

PW2 Joint homogeneity. $G(w;a_1A_1,...,a_kA_k)=a_1^{\alpha_1}\cdots a_k^{\alpha_k}\widetilde{G}$.

PW3 Permutation-invariance. 全ての置換 $\pi\in\mathbf{S(k)}$ (k 文字の置換群) に対し

$$\widetilde{G}=G(\pi(w;A_1,...,A_k))=G(\pi(w);\pi(A_1,...,A_k)).$$

PW4 Monotonicity. $(A_1, ..., A_k) \mapsto G(w; A_1, A_2, \ldots, A_k)$ は、monotone. つまり $A_i \geq B_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ ならば $G(w; A_1, A_2, \ldots, A_k) \geq G(w; B_1, B_2, \ldots, B_k)$.

PW5 Continuity from above. $(\{A_1^{(n)}\}, \{A_2^{(n)}\}, \ldots, \{A_k^{(n)}\}) \downarrow (A_1, A_2, \ldots, A_k)$ ならば $G(w; A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_k^{(n)}) \downarrow G(w; A_1, A_2, \ldots, A_k)$.

PW6 Congruence invariance. 可逆な S に対し,

$$G(w; S^*A_1S, S^*A_2S, \ldots, S^*A_kS) = S^*G(w; A_1, A_2, \ldots, A_k)S.$$

PW7 Joint concavity. $(A_1, A_2, \ldots, A_k) \mapsto G(w; A_1, A_2, \ldots, A_k)$ が jointly concave:

$$G(w; \lambda A_1 + (1-\lambda)A_1', \ldots, \lambda A_k + (1-\lambda)A_k') \geq \lambda G(w; A_1, A_2, \ldots, A_k) + (1-\lambda)G(w; A_1', A_2', \ldots, A_k') \quad (\lambda \in [0,1]).$$

PW8 Self-duality. $G(w; A_1, A_2, \ldots, A_k)^* \ \left(:= G(w; A_1^{-1}, A_2^{-1}, \ldots, A_k^{-1})^{-1}\right) = G(w; A_1, A_2, \ldots, A_k)$.

PW9 ($A_1, A_2, \ldots, A_k$ が行列のとき) **Determinant identity.**

$$\det G(w; A_1, A_2, \ldots, A_k) = (\det A_1)^{\alpha_1} \cdots (\det A_k)^{\alpha_k}.$$

PW10 The arithmetic-geometric-harmonic mean inequaility.

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i \geq \widetilde{G} \geq \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i^{-1}\right)^{-1}.$$

ここでは、2 つの型の k 個の作用素の加重幾何平均を定義する。1 つ目の平均は、加重が等しい (non-weight の) 幾何平均を使うことによって間接的に作られる型（以後第 1 型と呼ぶ) の加重幾何平均であり、2 つ目の平均は、symmetrization procedure を使うことによって直接的に作られる型 (以後第 2 型と呼ぶ) の加重幾何平均である。第１型の加重幾何平均は要求される上記の 10 の性質 PW1-PW10 のすべてを満たす。第２型の加重幾何平均は、性質の一つである permutation-invariance (PW3) を満たさないが、PW3 に関連する弱い条件を満たす。第 1 型は間接的に作られるので、k が大きくなると計算量が膨大となるが、この点、第２型は直接的に作られるので計算量がそれほど多くならない。

3.1 第 1 型 k 個の作用素の加重幾何平均

2 個の作用素 $A_1,\ A_2 \in \Omega$ と $\alpha_1 \in [0,1],\ \alpha_2 = 1 - \alpha_1$ を満たす実数 α_1, α_2 に対して、加重幾何平均：

$$(\tilde{G} =) A_1 \#_{\alpha_2} A_2 = G(\alpha_1, \alpha_2; A_1, A_2).$$

が定義されるが、このとき、

$$G(\alpha_1, \alpha_2; A_1, A_2) = A_2 \#_{\alpha_1} A_1 = G(\alpha_2, \alpha_1; A_2, A_1)$$

は、よく知られた性質である。このことは $\tilde{G}$ が permutation-invariance をもつ加重幾何平均であることを意味する。そこで、3 個以上の作用素の加重幾何平均についても permutation-invariance の性質 (PW3) を持つものを

定義したい訳である。$k\ (\geq 2)$ 個の作用素の加重幾何平均の構成について、次がいえる。

定理 3.1.1. $v = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ を k 加重、つまり、各 $\lambda_i \geq 0$ かつ $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$ とし、$G(v; X_1, \ldots, X_k) = (G(\lambda_1, \ldots, \lambda_k\ ; X_1, \ldots, X_k)$ が性質 PW1-PW10 を満たす k 個の (Ω の中の) 作用素の加重幾何平均であると仮定する。$A_1, \ldots, A_{k+1} \in \Omega,\ w = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1})$ を $(k+1)$ 加重とする。(一般性を失うことなく各 i について $0 < \alpha_i < 1$ としてよい。) このとき、次のように B_i を定義する：

$$B_i = A_i \#_{1-\alpha_i} G\left(\left(\frac{\alpha_j}{1-\alpha_i}\right)_{j\neq i}\ ; (A_j)_{j\neq i}\right).$$

このとき、$\Gamma \in \mathbf{G(k)}$ を一つ選んで、

$$(\widetilde{G} =) G_\Gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}\ ; A_1, \ldots, A_{k+1}) = \Gamma(B_1, \ldots, B_{k+1})$$

と定義すると、次の (i)-(ii) を満たすような "望ましい加重幾何平均" を得る:

(i) $(k+1)$ 個の作用素に対して $\widetilde{G}$ は性質 PW1-PW10 をすべて満たす。

(ii) $\Gamma = G_{\frac{2}{3}, \ldots, \frac{k}{k+1}}$ であるならば、次が成り立つ (G_Γ は Γ の拡張であることを示している。)：

$$G_\Gamma(1/(k+1), \ldots, 1/(k+1)\ ; A_1, \ldots, A_{k+1}) = \Gamma(A_1, \ldots, A_{k+1}).$$

3.2 第 2 型 k 個の作用素の加重幾何平均

k 個の作用素 $A_1, \ldots, A_k \in \Omega$ と k 加重 $w = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ (各 i について $0 < \alpha_i < 1$) について、"先加重幾何平均 "とでもいうべきものを次のように定義する：

$$g(w; A_1, \ldots, A_k) = g(\alpha_1, \ldots, \alpha_k\ ; A_1, \ldots, A_k) := A_1 \#_{x_1} (A_2 \#_{x_2} \cdots (A_{k-1} \#_{x_{k-1}} A_k \overbrace{) \cdots)}^{k-2}. \tag{5}$$

ここで、上記の $x_1, \ldots, x_{k-1}$ は下の方程式を満たすものである：

$$\begin{cases} 1 - x_1 = \alpha_1, \\ x_1(1 - x_2) = \alpha_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ x_1 \cdots x_{k-2}(1 - x_{k-1}) = \alpha_{k-1}, \\ x_1 \cdots x_{k-1} = \alpha_k. \end{cases}$$

このとき、次の (i),(ii) がいえる：

(i) $A_1, \ldots, A_k$ が互いに可換であるならば、$g(w; A_1, \ldots, A_k) = A_1^{\alpha_1} \cdots A_k^{\alpha_k}$.

(ii) $$g(w; A_1, \ldots, A_k) := A_1 \#_{1-\alpha_1} \left(g\left(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}, \ldots, \frac{\alpha_k}{1-\alpha_1}\ ; A_2, \ldots, A_k\right)\right).$$

以下 Hilbert 空間の作用素の場合のみを考える。 作用素列 $\{X_n\}$ が X に強収束 (strongly converge) するとは、$n \to \infty$ のとき、$\| (X_n - X)x \| \to 0\ \forall x \in H$ が成り立つことをいい、$X_n \to_s X$ と表すことにする。次の補題は、定理 3.2.2 で作用素列の収束を示すために非常に有用なものである。

補題 3.2.1. $0 < mI \leq A_i \leq MI\ \ (i = 1, \ldots, k)$ となる正値作用素列を $\{A_1^{(n)}\}, \ldots, \{A_k^{(n)}\}$ とし、各 h_i を $0 < h_i < 1$ かつ $\sum_{i=1}^{k} h_i = 1$ を満たす実数とする。$n \to \infty$ のとき、

$$E_n := \sum_{i=1}^{k} h_i A_i^{(n)} - g(h_1, \ldots, h_k\ ; A_1^{(n)}, \ldots, A_k^{(n)}) \to_s 0,$$

であるならば、すべての i, j $(i \neq j)$ に対して、$A_i^{(n)} - A_j^{(n)} \to_s 0$.

定理 3.2.2. $A_1, \ldots, A_k$ を Ω 上の k 個の作用素とし、$S = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\} \subset \mathbf{S(k)}$ とする。$w = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ を k 加重、各 i について $0 < \alpha_i < 1$ とする。また、k 個の作用素列 $\{A_1^{(r)}\}, \ldots, \{A_k^{(r)}\}$ を次のように定義する：

$$\begin{cases} A_i^{(1)} = A_i \quad (i = 1, \ldots, k),\ (r \geq 1), \\ A_1^{(r+1)} = g(\pi_1(w; A_1, \ldots, A_k)) = g(\alpha_{\pi_1(1)}, \ldots, \alpha_{\pi_1(k)}\ ; A_{\pi_1(1)}, \ldots, A_{\pi_1(k)}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ A_k^{(r+1)} = g(\pi_k(w; A_1, \ldots, A_k)) = g(\alpha_{\pi_k(1)}, \ldots, \alpha_{\pi_k(k)}\ ; A_{\pi_k(1)}, \ldots, A_{\pi_k(k)}). \end{cases} \tag{6}$$

このとき、k 個の作用素列 (6) は共通の極限に強収束する。これを

$$G_S = G_S(w; A_1, \ldots, A_k) \tag{7}$$

と記し、S についての $A_1, \ldots, A_k$ の加重幾何平均と定義する。このとき、G_S について、次の (i)-(ii) が成り立つ：

(i) G_S は PW3 を除くすべての性質 PW1-PW10 を満たす。

(ii) $\sigma \in S$ が

$$(\sigma\pi_1, \ldots, \sigma\pi_k) = (\pi_{\sigma(1)}, \ldots, \pi_{\sigma(k)})$$

を満たすとき、G_S は σ に関して permutation-invariant である。

注意 3.2.3. 2 個の作用素の加重幾何平均から逐次的な構成により、(5) のような ”先加重幾何平均 ”を作り、これを出発点として（上記定理 3.2.2 で定義したような）第 2 型の加重幾何平均 (7) を得た。しかし、やや異なった出発点をもとに加重幾何平均を構成することもできる。例えば、$k = 4$ の場合、4 個の実数を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 > 0, \sum \alpha_i = 1$ とし、これによる加重 $w = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ を持つ 4 個の作用素 $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \Omega$ の加重幾何平均を得る場合、その出発点として次のような 5 種類の ”先加重幾何平均 ”の作り方が考えられる:

$$\begin{aligned}
G^{[1]} &= g^{[1]}(w; A_1, A_2, A_3, A_4) = \left((A_1 \#_{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}} A_2) \#_{\frac{\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}} A_3\right) \#_{\alpha_4} A_4, \\
G^{[2]} &= g^{[2]}(w; A_1, A_2, A_3, A_4) = \left(A_1 \#_{\frac{\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}} (A_2 \#_{\frac{\alpha_3}{\alpha_2+\alpha_3}} A_3)\right) \#_{\alpha_4} A_4, \\
G^{[3]} &= g^{[3]}(w; A_1, A_2, A_3, A_4) = \left(A_1 \#_{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}} A_2\right) \#_{\alpha_3+\alpha_4} \left(A_3 \#_{\frac{\alpha_4}{\alpha_3+\alpha_4}} A_4\right), \\
G^{[4]} &= g^{[4]}(w; A_1, A_2, A_3, A_4) = A_1 \#_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} \left((A_2 \#_{\frac{\alpha_3}{\alpha_2+\alpha_3}} A_3) \#_{\frac{\alpha_4}{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}} A_4\right), \\
G^{[5]} &= g^{[5]}(w; A_1, A_2, A_3, A_4) = A_1 \#_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} \left(A_2 \#_{\frac{\alpha_3+\alpha_4}{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}} (A_3 \#_{\frac{\alpha_4}{\alpha_3+\alpha_4}} A_4)\right).
\end{aligned}$$

先に定義した ”先加重幾何平均 ”(5) は $k = 4$ としたとき上記の $G^{[5]}$ の型となる。容易にわかることであるが、上記の各々の $G^{[i]}$ は、すべての A_i が可換であるならば、いずれも $A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} A_3^{\alpha_3} A_4^{\alpha_4}$ となる。

参考文献

[1] W.N.Anderson, Jr., T.D.Morley and G.E.Trapp, **Symmetric function means of positive operators, Linear Alg. Appl., 60 (1984), 129-143.**

[2] T. Ando, *Topics on operator inequalities*, **Lecture notes, Hokkaido Univ., Sapporo, 1978.**

[3] T.Ando, C.-K.Li and R.Mathias, **Geometric means, Linear Algebra Appl., 385 (2004), 305-334.**

[4] E.Andruchow, G.Corach and D.Stojanoff, **Geometrical significance of the Löwner-Heinz inequality, Proc. Amer. Math. Soc., 128 (1999), 1031-1037.**

[5] J.E.Cohen and R.D.Nussbaum, **Arithmetic-geometric means of positivematrices, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 101 (1987), 209-219.**

[6] G.Corach, H.Porta and L.Recht, **Convexity of the geodestic distance on spaces of positive operators, Illinois J. Math., 38 (1994), 87-94.**

[7] B.Q.Feng and A.Tonge, **Geometric means and Hadamard products, Math. Inequalities Appl., 8 (2005), 559-564.**

[8] J.I.Fujii, M.Fujii, M.Nakamura, J.Pečarić and Y.Seo, **A reverse inequality for the weighted geometric mean due to Lawson-Lim, Linear Alg. Appl., 427 (2007), 272-284.**

[9] J.I.Fujii and T.Furuta, **An operator version of the Wilf-Diaz-Metcalf inequality, Nihonkai Math. J., 9 (1998), 47-52.**

[10] J.I.Fujii, M.Nakamura, J.Pečarić and Y.Seo, **Bounds for the ratio and difference between parallel sum and series via Mond-Pečarić method, Math. Inequal. Appl., 9 (2006), 749-759.**

[11] M.Fujii, S.Izumino, R.Nakamoto and Y.Seo, **Operator inequalities related to Cauchy-schwarz and Hölder-McCarthy inequalities, Nihonkai Math. J., 8 (1997), 117-122.**

[12] M.Fujii, J.F.Jiang and E.Kamei, **A geometrical structure in the Furuta inequality II, Nihonkai Math. J., 8 (1997), 37-46.**

[13] T.Furuta, J.Mićić, J.Pečarić and Y.Seo, *Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, **Monographs in Inequalities I, Element, Zagreb, 2005.**

[14] S.Izumino and N.Nakamura, **Geometric means of positive operators II, Sci. Math. Japon., 69 No.1 (2009), 35-44.**

[15] H.Kosaki, *Geometric mean of several positive operators*, **1984.**

[16] F.Kubo and T.Ando, **Means of positive linear operators, Math. Ann., 246 (1980), 205-224.**

[17] J.Lawson and Y.Lim, **The geometric mean, matrices, metrics and more, Math. Asso. Amer., 108 (2001), 797-812.**

[18] N.Nakamura, **Geometric operator mean induced from the Riccati equation, Sci. Math. Japon., 66 (2007), 83-87.**

[19] N.Nakamura, **Geometric means of positive operators, Kyungpook Math. J., 49 (2009), 167-181.**

[20] R.D.Nussbaum, **Hilbert's projective metric and iterated nonlinear maps, Mem. Amer. Math. Soc., 75 (391) (1988).**

＊ 雑誌の案内

会員の属する大学等で、最近数学関係の雑誌は大学の法人化などで手に入れるのが経済的に困難なところもあるのではないでしょうか。ここ協会には諸外国より、有名な雑誌が送られてきています。例えば、次の様な雑誌です。

(1) Acta Scientiarum Mathematicarum
(2) Annali scuola normale superiore－pisa－classe di scienze
(3) Annals de L'Institut Fourier
(4) Annals of Mathematics
(5) Bollettino Unione Mathematica Italiana （sezione A , B ）
(6) Bulletin of the Australian Mathematical Society
(7) Canadian Jounal of Mathematics
(8) Colloquium Mathematicum
(9) Communications on pure and Applied Mathematics
(10) Indiana University Mathematics Journal
(11) Journal of the London Mathematical Society
(12) Memoirs of the American Mathematical Society
(13) Monatshefte fur Mathematik
(14) Portugaliae Mathematica
(15) Proceedings of the Japan Academy （series A , B)
(16) Quarterly of Applied mathematics
(17) Revista Mathematica Iberoamericana
(18) Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquee
(19) Serdica Mathematical Journal
(20) Tohoku Mathematical Journal 東北数学雑誌

その他、多くの外国からの寄贈があります。また、日本で発行の著名な雑誌もあります。もし、先生の教室でこれらの雑誌に興味がありましたら、協会宛ご連絡下さい。研究に役立てることを希望いたします。

＊ 機関会員募集

機関会員の特典としては

(1)本屋より SCMJ を購入すると､print 版 45,000 円ですが､機関会員になると､print 版 33,000 円で **online も見ることができます。**

(2)会員でない 2 名の方を準会員（会費不要）として登録することができます。これにより、page charge ⑴別刷代金⑴ が会員と同じ扱いになります。

(3)上の準会員 2 名は online で SCMJ を見る事ができます。

(4) Net を用いて国際研究集会を催す時､アナウンス､アブストラクトの作成などお助けいたします。

大学、研究所等が協会から SCMJ 誌の直接購入すると、今年から online も無料で見ることができるようになりました。機関会員の申込用紙です。適当にお使い下さい。

上にも書きましたように、2006 年より発効の機関会員制度により各機関会員に所属の研究者 2 名を

会費無料で準会員として登録しますと、準会員が SCMJ に accept された論文を掲載するときの page charge（別刷代金）は会員と同額とすることにしました。

この新しい制度の機関会員の P.R.を、日本国内外（BRICS 諸国など）400 大学に向けて、昨年 1 月から始めています。同時に今迄の SCMJ 投稿者で会員でない方、また、個人会員および（機関会員の）準会員加入の P.R.も始めています。

＊ Application for Academic and Institutional Member of ISMS

Subscription of SCMJ	□Print ＋ Online (¥33,000, US$300)
University (Institution)	
Department	
Postal Address where SCMJ should be sent.	
E-mail address	
Person in charge	Name: Signature:
Payment Check one of the two.	□Bank transfer □Credit Card (Visa, Master)
Name of Associate Members	1.
	2.

正会員の特典としては(1)online で SCMJ をみることが出来ます。(2)論文の掲載時に page charge(別刷代金)が随分と安くなる。
(3) Net を用いて国際研究集会を催す時、アナウンス、アブストラクトの作成などお助けいたします。
6,000 円を支払うと、hard-copy の SCMJ が一年を通じて手に入ります。
(4) 10 年間個人会員を続けると、国内会員は 70,000 円、外国会員は US$600、途上会員は US$500 を支払うと生涯会員となれます。

2008 年度からの会費

Categories	国内会員	海外会員	途上国会員
単年度 A 会員	¥9,000	US$75, €60	US$117, €93
3 年 A 会員	¥24,000	US$200, €160	US$117, €93
単年度 S 会員	¥5,000	US$40, €32	US$27, €21
3 年 S 会員	¥12,000	US$100, €80	US$71, €57
生涯会員	¥90,000	US$740, €592	US$616, €493

日本語が出来る方の入会の申込用紙です。また、英語版も書いて頂くことになります。近く Net 上で申し込み可能となるようにしますので、入会しようとする方はそれをご利用下さい。

＊　正会員申込用紙

正会員入会申込書

<table>
<tr><td>氏名</td><td colspan="2"></td><td>英語名</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="6">次の２つのうち会報等を送付先とする方に○を付けてお書き下さい。</td></tr>
<tr><td>所属先
住所</td><td colspan="5">〒</td></tr>
<tr><td>住所</td><td colspan="5">〒</td></tr>
<tr><td>専門分野</td><td colspan="5">表 f *より選んで○で囲って下さい
f-1, f-2, f-3, f-4, f-5, f-6, f-7, f-8, f-9, f-10, f-11, f-12, f-13, f-14</td></tr>
<tr><td rowspan="2">E-mail
address</td><td colspan="2" rowspan="2"></td><td>電話番号</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Fax 番号</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>会員区分
該当部分にチェック</td><td colspan="5">□A1 一般 1 年　□ A3 一般 3 年　□ S-A1 高齢者又は学生 1 年
□　S-A3 高齢者又は学生 3 年　□ 生涯会員</td></tr>
<tr><td>所属先の
施設</td><td colspan="5">□ ビデオ会議可能　□ 遠隔会議可能　□ コンピューターセンター</td></tr>
<tr><td>所属先の
通信システム</td><td colspan="5">□　ISDN　□ IP</td></tr>
<tr><td>所属大学等が
機関会員</td><td colspan="5">□　会員である　□　会員でない</td></tr>
<tr><td colspan="6">SCMJ のプリント版の購入</td></tr>
<tr><td colspan="3">□　希望　1 年に付き
１年会員 9,000 円、3 年会員 8,000 円**</td><td colspan="3">□ 希望しない</td></tr>
<tr><td>高齢会員を申し込む場合</td><td colspan="2">生年月日</td><td colspan="3">学生会員の場合は在学証を添付</td></tr>
<tr><td>日付</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="3">私は ISMS 会員になり、国際数理科学協会に送り状に記載された年会費を払います。ISMS 会員として受け取った Scientiae Mathematicae Japonicae のコピーは個人使用とし、機関、大学または図書館やその他の組織の中に置かず、閲覧目的で会員購読することもしません。</td><td>署名</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

* Notices from the ISMS March 2008 p.25 を御参照下さい。**ただし、３年間一括の場合は 24,000 円です。
この申込みの内容は会との連絡以外には使用いたしません。

Application form for an individual member of ISMS

Family Name		First &Middle Name	
Check one of the following addresses to which "Notices from the ISMS" should be sent.			
Address of your institution (university)	□		
Home address	□		
Special fields*	f-1 f-2 f-3 f-4 f-5 f-6 f-7 f-8 f-9 f-10 f-11 f-12 f-13 f-14		
E-mail address		Tel.	
		Fax	
Membership category** (Circle one)	A1, A3, SA1, SA3, F1, F3, SF1, SF3, D1, D3, SD1, SD3, AL, FL, DL		
Check the facilities your institution has.	☐ Conference room(s) for video conference ☐ Computer center		
Communication system of your institution	□ ISDN □ IP		
Is your institution (university) an Institutional Member of ISMS?	□ Yes □ No		
☐ I subscribe to the printed version of SCMJ.	□¥6,000 (US$60, €48) per year for those members of A1, SA1, F1, and SF1 , D1 and SD1. □¥5,500 (US$55. €44) per year for those members of A3, SA3, F3, SF3, D3, SD3, AL, FL, and DL. □In case A3, SA3, F3, SF3, D3, SD3, AL, FL, or DL members make the payment at a time in advance, the price for 3 years is ¥15,000 (US$150, €120).		
For the aged member, write your birth year.		For the student member, student registration certificate should be attached.	
Date of Application			
I wish to enroll as a member of ISMS and will pay to International Society for Mathematical Sciences the annual dues upon presentation of an invoice. Copies of Scientiae Mathematicae Japonicae received as an ISMS member will be for my personal use only and shall not be placed in institutional, university or other libraries or organizations, nor can membership subscriptions be used for library purposes.			
Signature			

* Notices from the ISMS March 2008 p.25 を御参照下さい。
**Notices from the ISMS March 2008 p.28 を御参照下さい。

ISMS (JAMS の継続) 会員募集

ISMS の出版物：ISMS は、創刊より約 60 年、国際的に高い評価を得ている Mathematica Japonica (M.J.)と、その姉妹誌で電子 Journal と Paper 誌とを持つ、Scientiae Mathematicae (SCM) とを発行してきました。両誌は合併して、“21 世紀 MJ/SCM New Series, Scientiae Mathematicae Japonicae (SCMJ) ”として、電子版は 2000 年 9 月より発行してきました。印刷版は、1978 年 1 月より、年間 6 冊、700～1200 頁を出版しています。全体として 230 巻を超える、日本で最大量を誇る数理科学の雑誌です。その特長は、下の 1)～７)です。

1) Editorial Board には、国内だけでなく、海外 15 カ国の著名な研究者 40 名が参加している。
2) 世界の research group に論文が紹介され、積極的な交流が推進されている。
3) Editor を窓口として直接論文を投稿できて、迅速な referee 及び出版が得られる。
4) 有名な数理科学者の original paper や、研究に役立つ survey が、毎号載せられている。
5) SCMJ は、世界の有名数理科学者による、極めて興味ある expository paper を、毎号 International Plaza 欄に掲載している。世界各国の図書館へ、広く配布されている。
6) 投稿論文は、accept 後 (又は組版後) 待ち時間０で発行されます。
7) Mathematical Review, Zentralblatt に from cover to cover で review されている。

ISMS の研究集会：(1)研究仲間がゆっくり時間をかけて発表、討論をする、特色ある参集型研究集会が毎年行われ、非会員も含む多数の参加者の、活発な研究交流の場となっている。(2)ISMS には内外の著名な研究者が多数入っておられる。近いうちに内外を結ぶ高い level の研究会が online で行われる事を期待している。（本誌 45 号 3p 及び Notices March 2006 9p を御参照下さい）

ISMS の学術賞：会員の優れた論文を広く世界に紹介し、更なる研究を奨励するために、ISMS 賞、JAMS 賞、Shimizu 賞、Kunugui 賞、Kitagawa 賞を設けている。（詳しくは本誌 45 号 2p 会則 13 条を御参照下さい）

＜ISMS の会員の特典＞１．SCMJ 電子版の購読 (print out も含む) 無料。２．SCMJ print 版の少額での購読 (下表１)。３．Page charge(別刷代金)の discount (下表２)。

＜機関購読会員の特典＞1. 機関内の 2 名の方を準会員として会費無料で登録することが出来る。２．準会員は会員と同じ page charge(別刷代金)の discount を受けることが出来る。

表１
【雑誌購読費】

	正会員（1 年）	正会員（3 年）	機関会員	定価
Print	¥ 6,000 US$ 60, €48	¥ 5,500* US$ 55, €44	¥ 33,000 US$ 300, €240	¥ 45,000 US$ 400, €320
Online	Free	Free		
Online+print	¥ 6,000 US$ 60, €48	¥ 5,500 US$ 55, €44	¥ 33,000 US$ 300, €240	¥ 45,000 US$ 400, €320

*３年会員のみ、雑誌購読費 3 年分前払いの場合は￥15,000 になります。
著者の方には、SCMJ を１冊送料込みで 1,200 円または US＄12 で購入できます。

表２
【ページチャージ】

	ISMS members	Non-members
p	¥ 3,500 (US$35, € 23)	¥ 4,000 (US$40, €27)
Tex	¥ 2,000 (US$20, € 14)	¥ 2,500 (US$25, €17)
LateX2e, LaTeX	¥ 700 (US$ 7, € 4)	¥ 1,000 (US$10, € 7)
Js (ISMS style file)	¥ 500 (US$ 5, € 3)	¥ 800 (US$ 8, € 5)

別刷作成について、次の費用の分担をお願いします。原稿の組版についての連絡費、抜刷送料等の事務処理として、一編について¥ 1,000、及び上表の各原稿の種類による組版費を請求させて頂きます。
（2008 年 Vol.67 から実施）

表３
【2008 年の会費】

Categories	国内会員	海外会員	途上国会員
単年度 A 会員	¥9,000	US$ 75, €60	US$ 45 , €36
3 年 A 会員	¥24,000	US$ 200, €160	US$ 117, €93
単年度 S 会員	¥5,000	US$ 40, €32	US$ 27, €21
3 年 S 会員	¥12,000	US$ 100, €80	US$ 71, €57
生涯会員**	¥90,000	US$ 740, €592	US$ 616, €493

**過去 10 年以上、正会員であった方に限る。
A 会員は正会員を指し、S 会員は、学生会員と高齢会員(70 歳以上)を指します。

国際数理科学協会
International Society for Mathematical Sciences
〒590-0075 堺市堺区南花田口町 2-1-18 新堺東ビル内
Tel：(072)222-1850 / Fax：(072) 222-7987 URL：http://www.jams.or.jp