国際数理科学協会会報

No.59/ 2008.9　　編集委員： 藤井正俊(委員長)、藤井淳一

目次

＊　名誉会員の推薦

8月12日大阪府立大学での研究会のさい、名誉会員の推薦が行われ、会員のかたより一名の会員が推薦されました。
選考基準は下記の通りです。
名誉会員選考基準

広く数理科学の研究に携わり、当協会に貢献があり、かつ下の各項目に該当する方。
下記３項を満たす方を理事会もしくは総会で報告の後、名誉会員とする。

（1）連続して１０年間以上会員であること。
（2）推薦される時点よりさかのぼって、５年間は会費を払っていること。
（3）会員の少なくとも５名の推薦があること。

選考された名誉会員は会費は免除され、SCMJ 掲載（予定を含む）論文等をネットを通じてみることができ、会報等の印刷物を受ける。

今回初めて一名推薦を得ましたが、現時点で催促をしていますが、上記（2）が満たされていません。満たされ次第、ご報告したいと思います。

なお、今回が初めてで基準についてご意見のある方はメール等でお知らせ下さい。次回からの選考に参考にさせて頂きます。
また、名誉会員に相応しい方がおられましたら、ご推薦下さい。

＊　自然数の確率分割

自然数の確率分割（Gibbs 分割から見た）

鹿児島大学名誉教授　大和　元

1. 序

有限集合または自然数の順序のついた確率分割或は順序のつかない確率分割に関する確率モデルが集団遺伝学、情報の伝達、ノンパラメトリックベイズ、組合せ論、個票開示等において自然な形で生じる。歴史的には集団遺伝学に関連して親から子へ伝わる遺伝子の重複の仕方を表す確率モデルを Ewens(1972) が導いたのが、近年に於けるこの分野の研究のきっかけを、特に集団遺伝学の研究者へ与えている。このモデルは数学的には自然数 n の順序の付かない確率分割の分布である。同じ頃、Antoniak (1974) はディリクレ過程を事前分布として同じ確率モデルを導いていたが、当時はあまり注意を引かなかった様である。Ewens(1972) 以前からも、一様分布で与えられる確率分割に関連する研究については行われて来ていた。例えば、統計学の分野では連続分布からの標本の順位が順列全体上の一様分布に従うと言う性質を利用した研究が種々なされてきていた。また、組合せ論の分野では順列全体上の一様分布はサイクル数の漸近的評価等に用いられている。Ewens(1972) のモデルを含む確率分割を Pitman(1995) は導いたが、Gnedin and Pitman (2006) による Gibbs 分割により、更に一般化された。本報告では、n 個の自然数の集合の順序付き分割を、Gibbs 分割により紹介し、その特別な場合として Ewens(1972) と Pitman(1995) によるモデルを与える。最後に、Pitman のモデルの新しい構成法を Kerov (2006) の考えに沿って紹介する。

2.Gibbs 分割

自然数の集合 $[n]=\{1,2,\cdots,n\}$ の順序付き分割を考える。例えば、k 個への分割を $\{A_1,\cdots,A_k\}$ とすると、それぞれの要素 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ に属する最小の整数の順序により並べるものとする。したがって、$1\in A_1$、A_1 に属さない最小の整数（$\in[n]$）は A_2 に属する、等々。$[n]$ のランダムな分割を Π_n で表すことにする。なお、Π_n の分布は、Π_{n+1} から $n+1$ を除くことによって得られる分割と同じ分布を持つものとする (consistency)。また、$|A|$ で集合 A の基数を表すことにする。したがって、$(|A_1|,|A_2|,\cdots,|A_k|)$ は自然数 n の順序付きの分割を与える。各 n について、Π_n の分布が $[n]=\{1,2,\cdots,n\}$ の全ての順列の下で不変であるとき、Π_n は exchangeable と言う。このとき、

$$P(\Pi_n=\{A_1,\cdots,A_k\})=p(|A_1|,\cdots,|A_k|) \tag{1}$$

と表せる。ただし、$1\le k\le n$ に対して、$p(c_1,\cdots,c_k)$ は自然数 n の分割 $(c_1,\cdots,c_k)$ の非負な関数で、変数 $c_1,\cdots,c_k$ に関して対称である。Π_n に $n+1$ を加えたものである Π_{n+1} との関係、および exchangeability により、

$$p(c_1,\cdots,c_k)=\sum_{j=1}^{k}p(c_1,\cdots,c_{j-1},c_j+1,c_{j+1},\cdots,c_k)+p(c_1,\cdots,c_k,1) \tag{2}$$

が成り立つ。

定義 1 (Gnedin and Pitman (2006)) W_j $(j=1,2,\cdots)$ と $V_{n,k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ は非負の定

数とする。n の全ての分割 $(c_1, \cdots, c_k)$ に対して、

$$p(c_1, \cdots, c_k) = V_{n,k} \prod_{j=1}^{k} W_{c_j} \tag{3}$$

で与えられるとき、自然数の集合 $[n]$ 上の exchangeable な確率分割 Π は Gibbs 形式の分割と言われる。

(3) 式は、$[n]$ の全ての順序付き分割についての和が 1 であることから、

$$B_{n,k}(W) = \sum_{\{A_1,\cdots,A_k\}} \prod_{j=1}^{k} W_{|A_j|} = \frac{n!}{k!} \sum_{(c_1,\cdots,c_k)} \prod_{j=1}^{k} \frac{W_{c_j}}{c_j!}$$

とおくと、

$$\sum_{k=1}^{n} V_{n,k} B_{n,k}(W) = 1$$

が、成り立つ。$B_{n,k}$ は変数 $W = (W_1, W_2, \cdots)$ の partial Bell polynomial である。(3) の分布は、$\gamma(> 0)$ に対して、$(V_{n,k}, W_j)$ を $(\gamma^{-n}, \gamma^j W_j)$ あるいは $(\gamma^{-k} V_{n,k}, \gamma W_j)$ へ変換しても分布は変わらない。$P(1) = V_{1,1} W_1 = 1$ も考慮して、$V_{1,1} = W_1 = 1$ と仮定する。一方、ある n に対して $V_{n,2} = 0$ のとき、性質 (2) から $[1], [2], \cdots, [n-1], [n]$ の各分割は全体 1 個のみからなる。これを除外して考えることとし、全ての n に対して、$V_{n,2} > 0$ と仮定する。また、(3) の右辺から見て、$W_j > 0 (j = 1, 2, \cdots)$ と仮定する。

さて、$r_j = W_{j+1}/W_j$ とおくと、(2) の関係から

$$V_{n,k} = V_{n+1,k} \sum_{j=1}^{k} r_{c_j} + V_{n+1,k+1}$$

が得られ、特に $k = 2$ のとき、

$$V_{n,2} = V_{n+1,2}(r_i + r_j) + V_{n+1,3}, \quad (1 \le i, j \le n,\ i + j = n)$$

仮定 $V_{n,2} > 0$ より、$r_i + r_j$ は $i + j$ にのみ依存し、$r_i + r_{i+2} = 2r_{i+1}$ より $r_{i+1} - r_i = r_{i+2} - r_{i+1}$。したがって、$r_{i+1} - r_i$ は定数であり、$r_j = bj - a (j = 1, 2, \cdots)$ の形で書ける。$j = 1, 2, \cdots$ について仮定 $W_j > 0$ より $r_j > 0$ であり、$b > a$ および $b \ge 0$ でなければならない。ここで、階乗積について次の記法を用いる；

$$x^{[k:\alpha]} = x(x+\alpha)\cdots(x+(k-1)\alpha),$$

$$x^{[k]} = x^{[k:1]} = x(x+1)\cdots(x+k-1), \quad x^{(k)} = x(x-1)\cdots(x-k+1)$$

上のことから、ある $b > a$ と $b \ge 0$ により

$$W_j = (b-a)^{[j-1:b]}, \quad j = 1, 2, \cdots$$

および

$$V_{n,k} = (bn - ak)V_{n+1,k} + V_{n+1,k+1}, \quad (1 \le k \le n)$$

と表せる。

ところで、$b = 0$ のとき、$W_j = (-a)^{j-1}$ であるが、$V_{n,k}$, W_j をそれぞれ $(-1/a)^{k-n}V_{n,k}$, $(-1/a)^{j-1}W_j$ で置き換えても、分布 (3) は変わらない。$W_j = 1 (j = 1, 2, \cdots)$ としても良いことなるが、このとき、Gibbs 分割 (3) は $p(c_1, \cdots, c_k) = V_{n,k}$ となり、分割数 k にのみ依存し、個々の分割の基数 $c_1, \cdots, c_k$ には依存しない分布となるので、この場合 $(b = 0)$ を除外することにする。

$$b > 0 \text{ に対し、} V_{n,k} \ \ W_{n,k} \ \text{ をそれぞれ } \left(\frac{1}{b}\right)^{k-n} V_{n,k} \ \left(\frac{1}{b}\right)^{j-1} W_j,$$

で置き換えても、分布 (3) は変わらないことに注意して、Gibbs 形式の分割を次のタイプに限って、以下考える。

定義 2 (Gnedin and Pitman (2006), Griffiths and Spanó (2007)) $-\infty < \alpha < 1$ とし、

$$W_j = (1 - \alpha)^{[j-1]}, \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

とおく。また、$V_{1,1} = 1$ で $V = (V_{n,k})$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ は

$$V_{n,k} = (n - \alpha k)V_{n+1,k} + V_{n+1,k+1} \tag{4}$$

を満たすとする。このとき、自然数の集合上の確率分割 Π はパラメータ (α, V) をもつ exchangeable な Gibbs 分割（$EGP(\alpha, V)$）と言う。

なお、$\alpha = 1 (a = b)$ と $\alpha = -\infty (b = 0)$ の場合は、それぞれ $W_1 = 1$, $W_2 = W_3 = \cdots = 0$ と $W_j = 1\,(j = 1, 2, \cdots)$ が対応し、これをここでは除外している。定義 2 の下で、(3) の分布は次の様に表される。

$$p(c_1, \cdots, c_k) = V_{n,k} \prod_{j=1}^{k} (1 - \alpha)^{[c_j - 1]} \tag{5}$$

3. 分布の逐次的構成と関連する分布

(5) で与えられる (1) の分布を逐次的に構成することが出来る（Griffiths and Spanò (2007)）：先ず $\Pi_1 = (1)$ とする。 引き続き次の様に生成される。$\{1, \cdots, n\}$ が分割された時点で、k 個の順序付き集合が生ずるとしそれを $\Pi_n = \{\Pi_{n1}, \cdots, \Pi_{nk}\}$ とする。次の自然数 $n + 1$ は、条件 $|\Pi_{n1}| = c_1, \cdots, |\Pi_{nk}| = c_k$ の下で、

$$\text{確率 } \frac{V_{n+1,k+1}}{V_{n,k}} \text{ で 新しい集合 } \Pi_{n+1,k+1} \text{ を始める}$$

または、各 $j = 1, \cdots, k$ に対して、

$$\text{確率 } \frac{c_j - \alpha}{n - \alpha k}\left(1 - \frac{V_{n+1,k+1}}{V_{n,k}}\right) \text{ で 集合 } \Pi_{n,j} \text{ に入る}$$

なお、(4) 式において左辺により両辺を割ると

$$1 = (n - k\alpha)\frac{V_{n+1,k}}{V_{n,k}} + \frac{V_{n+1,k+1}}{V_{n,k}}$$

右辺の第２項は、上で新しい集合を始める確率であるから、従来の集合に入る確率は

$$1 - \frac{V_{n+1,k+1}}{V_{n,k}} = (n - k\alpha)\frac{V_{n+1,k}}{V_{n,k}}$$

したがって、後者は別表現として次の様に述べられる。各 $j = 1, \cdots, k$ に対して、

$$\text{確率}\ \ (c_j - \alpha)\frac{V_{n+1,k}}{V_{n,k}}\ \ \text{で}\ \ \text{集合}\ \ \Pi_{n,j}\ \ \text{に入る}$$

この構成法では、従来の集合へはその基数のみに依存した確率で入るので、最初の $1, \cdots, c_1$ は Π_{n1} に入り、次の $c_1+1, \cdots, c_1+c_2$ は Π_{n2} に入る、等々を考えることにより n 個の自然数 $\{1, 2, \cdots, n\}$ の順序付き確率分割 $\{\Pi_{n1}, \cdots, \Pi_{nk}\}$ の分布 EGP (α, V) は

$$P\big(\{\Pi_{n1}, \cdots, \Pi_{nk}\} = \{\pi_{n1}, \cdots, \pi_{nk}\}\big) = V_{n,k}\prod_{j=1}^{k}(1-\alpha)^{[c_j-1]}, \quad c_j = |\pi_{nj}|\ \ (j = 1, \cdots, k)$$

すなわち、(5) 式が得られる。

なお、分割 Π_n の要素 $\Pi_{n1}, \cdots, \Pi_{nk}$ の基数を $C_1, \cdots, C_k$ とする。$(C_1, \cdots, C_k)$ は自然数 n の順序付き確率分割である。$c_1, \cdots, c_k > 0$ $(c_1 + \cdots + c_k = n)$ に対して、これを与える $[n]$ の分割の総数 $\binom{n-1}{c_1-1}\binom{n-c_1-1}{c_2-1}\cdots\binom{n-c_1-\cdots-c_{n-k}-1}{c_k-1}$ を乗ずることにより、自然数 n の順序付き確率分割 $(C_1, \cdots, C_k)$ の分布は次で与えられる：

$$P\big((C_1, \cdots, C_k) = (c_1, \cdots, c_k)\big) = n!V_{n,k}\prod_{j=1}^{k}\frac{(1-\alpha)^{[c_j-1]}}{(\sum_{j=i}^{k} c_j)(c_i-1)!}$$

次に、n の順序の付かないランダムな分割を考える。各 $j = 1, \ldots, n$ に対して、

$$M_j = |\ \{i : C_i = j, i = 1, \ldots, k\}\ |$$

とおく。$\{M_1, \ldots, M_n\}$ は自然数 n の順序の付かない確率分割である。ある $(m_1, \ldots, m_n)$ $(m_1, \cdots, m_n \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} jm_j = n)$ について、これを与える $[n]$ の分割の総数は $n!/\big[\prod_{j=1}^{n}(j!)^{m_j}m_j!\big]$ である。これを (4) に乗ずる事により、自然数 n の順序の付かない確率分割の分布を得る：

$$P\big((M_1, \cdots, M_n) = (m_1, \cdots, m_n)\big) = n!V_{n,k}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{(1-\alpha)^{[j-1]}}{j!}\right)^{m_j}\frac{1}{m_j!}$$

4. 分割数

なお、これまで k で表記してきた分割数が確率変数であることを示すため、今後は $\{1,\cdots,n\}$ の分割数を K_n で表す。K_n の確率分布は

$$P(K_n=k)=\sum_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)} V_{n,k}\prod_{j=1}^{k} W_{\lambda_j}=V_{n,k}B_{n,k}(W)$$

ここで、$W=(W_1,W_2,\cdots)$、 $W_j=(1-\alpha)^{[j-1]}$ $(j=1,2,\cdots)$ である。$B_{n,k}(W)$ の一般化されたスターリング数による表現 $B_{n,k}(W)=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_\alpha$ を用いると、K_n の確率分布は

$$P(K_n=k)=V_{n,k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_\alpha \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{6}$$

ここで、一般化されたスターリング数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_\alpha$ は $x^{[n]}=\sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_\alpha x^{[k:\alpha]}$ を満たす右辺の係数である。(1),(5),(6) から、条件 $K_n=k$ の下での Π_n の条件付分布が得られる。

$$P\big(\Pi_n=\{A_1,\cdots,A_k\}|K_n=k\big)=\prod_{j=1}^{k}(1-\alpha)^{[|A_j|-1]}\Big/\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_\alpha$$

この条件 $K_n=k$ の下での確率は $V_{n,k}$ を含んでいないので、今考えている定義2のタイプの Gibbs 分割について、K_n はパラメータ $V_{n,k}$ に対する十分統計量である。(Gnedin and Pitman (2006)。)

5. 例

(i) Ewens' sampling formula を与えるのは、 $\theta>0$ として、

$$V_{n,k}^{(0,\theta)}=\frac{\theta^k}{\theta^{[n]}}$$

n 個の自然数 $\{1,2,\cdots,n\}$ の順序付き確率分割 $\{\Pi_{n1},\cdots,\Pi_{nk}\}$ の分布は

$$P\big(\{\Pi_{n1},\cdots,\Pi_{nk}\}=\{\pi_{n1},\cdots,\pi_{nk}\}\big)=\frac{\theta^k}{\theta^{[n]}}\prod_{j=1}^{k}(c_j-1)!,\quad c_j=|\pi_{nj}|\ (j=1,\cdots,k)$$

n 個の自然数 $\{1,2,\cdots,n\}$ の順序付き確率分割 $(C_1,\cdots,C_k)$ の分布および K_n の分布は

$$P\big((C_1,\cdots,C_k)=(c_1,\cdots,c_k)\big)=\frac{\theta^k}{\theta^{[n]}}\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}(\sum_{j=i}^{k}c_i)}$$

$$P(K_n=k)=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{\theta^k}{\theta^{[n]}}\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

ここで、$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ は符号無し第1種スターリング数で、$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_\alpha$ $(\alpha=0)$。

ある $(m_1,\ldots,m_n)$ $(m_1,\cdots,m_n\geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} jm_j=n)$ について、自然数 n の順序の付かない確率分割の分布は

$$P\big((M_1,\cdots,M_n)=(m_1,\cdots,m_n)\big)=\frac{n!\theta^k}{\theta^{[n]}}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{m_j}m_j!}$$

で与えられる。これは、Ewens' sampling formula として良く知られている。

(ii) Pitman's sampling formula を与えるのは

$$V_{n,k}^{(\alpha,\theta)} = \frac{\theta^{[k:\alpha]}}{\theta^{[n]}}$$

ここで、$0 \leq \alpha < 1,\ \theta > -\alpha$ または、 $\alpha < 0, \theta = m|\alpha|$ (m は自然数)。

n 個の自然数 $\{1, 2, \cdots, n\}$ の順序付き確率分割 $\{\Pi_{n1}, \cdots, \Pi_{nk}\}$ の分布は $c_j = |\pi_{nj}|$ $(j = 1, \cdots, k)$ とおくと、

$$P(\{\Pi_{n1}, \cdots, \Pi_{nk}\} = \{\pi_{n1}, \cdots, \pi_{nk}\}) = \frac{\theta^{[k:\alpha]}}{\theta^{[n]}} \prod_{j=1}^{k} (1-\alpha)^{[c_j - 1]}$$

自然数 n の順序付き確率分割 $(C_1, \cdots, C_k)$ の分布および K_n の分布は

$$P((C_1, \cdots, C_k) = (c_1, \cdots, c_k)) = \frac{n!\theta^{[k:\alpha]}}{\theta^{[n]}} \prod_{i=1}^{k} \frac{(1-\alpha)^{[c_i-1]}}{(\sum_{j=i}^{k} c_j)(c_i - 1)!}$$

$$P(K_n = k) = \frac{\theta^{[k:\alpha]}}{\theta^{[n]}} c(n, k, \alpha)\alpha^{-k}$$

ここで、$c(n, k, \alpha) = (-1)^{n-k} C(n, k, \alpha)$ であり、 $C(n, k, \alpha)$ は C-number と言われ次の式で定義される。

$$(st)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} C(n, k, s) t^{(k)}$$

なお、$c(n, k, \alpha)\alpha^{-k}$ は一般化されたスターリング数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_\alpha$ に等しい。

ある $(m_1, \ldots, m_n)$ $(m_1, \cdots, m_n \geq 0, \sum_{j=1}^{n} j m_j = n)$ について、自然数 n の順序の付かない確率分割の分布は

$$P((M_1, \cdots, M_n) = (m_1, \cdots, m_n)) = \frac{n!\theta^{[k:\alpha]}}{\theta^{[n]}} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{(1-\alpha)^{[j-1]}}{j!} \right)^{m_j} \frac{1}{m_j!}$$

である。これは、Pitman's sampling formula として良く知られている。大和・渋谷 (2003) は Pitman's sampling formula について関連する文献と共に詳述している。

6. Pitman's sampling formula 再考

ところで、(5) で与えられる Gibbs 分割について、ある定数列 D_n があって $V_{n,k} = V_k / D_n$ と表されるときには Pitman's sampling formula に限ることが知られている（Gnedin and Pitman(2006), Corollary 4)。すなわち、(3) は

$$p(c_1, \cdots, c_k) = \frac{V_k}{D_n} \prod_{j=1}^{k} W_{c_j} \tag{7}$$

ここで、$W = (W_1, W_2, \cdots)$ の partial Bell polynomial $B_{n,k}(W)$ を用いると、
$\sum_{k=1}^{n} (V_k / D_n) B_{n,k}(W) = 1$, したがって

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} V_k B_{n,k}(W) \tag{8}$$

Pitman (2006), p.25 では (7) を Gibbs 分割と言っている。

(7) 式は $[n]$ の順序付分割の確率である。ここでは自然数の集合 $[n]$ の順序の付かない分割を考え、分割数が k であるとき、各分割の基数を $(S_1,\cdots,S_k)$ で表す。$(S_1,\cdots,S_k)$ は自然数 n の順序の付かない確率分割であり、与えられた $(S_1,\cdots,S_k)=(s_1,\cdots,s_k)$ に対し、$n!/\bigl[k!\prod_{j=1}^{k}s_j!\bigr]$ 個の $[n]$ の順序付き分割が対応する。$(S_1,\cdots,S_k)$ の分布は $1\le k\le n,\ 1\le s_1,\cdots,s_k\le n\ (s_1+\cdots+s_k=n)$ に対して

$$P\bigl((S_1,\cdots,S_k)=(s_1,\cdots,s_k)\bigr)=\frac{n!V_k}{k!D_n}\prod_{j=1}^{k}\frac{W_{s_j}}{s_j!} \tag{9}$$

この分布の興味深い導き方を、Kerov (2006) の考えにそって、Pitman (2002) により紹介する。まず、$V_1,V_2,\cdots$ および $W_1,W_2,\cdots$ に対して、それぞれ

$$V(z)=\sum_{n=1}^{\infty}V_nz^n/n!,\quad W(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}W_n\xi^n/n!$$

とおき、また正の整数を取る確率変数 $K,X_1,X_2,\cdots$ を考える。$X_1,X_2,\cdots$ は独立で、同じ確率母関数 $G_X(z)=E(z^X)=W(z\xi)/W(\xi)$ をもつとし、K はこれらと独立で確率母関数 $G_K(y)=E(y^K)=V(yW(\xi))/V(W(\xi))$ を持つとする。このとき、

$$P(X=n)=\frac{W_n}{n!W(\xi)}\xi^n\ (n=1,2,\cdots),\quad P(K=k)=\frac{V_kW(\xi)^k}{k!V(W(\xi))}\ (k=1,2,\cdots)$$

これより、$T_K=X_1+\cdots+X_K$ の確率母関数は

$$G_{T_K}(z)=E[G_X(z)]^K=G_K(G_X(z))=\frac{V(W(z\xi))}{V(W(\xi))} \tag{10}$$

ここで、$V(W(\xi))$ の展開式での $\xi^n/n!$ の係数は (8) で与えた D_n に等しい。すなわち、$V(W(\xi))=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\xi^n/n!$、したがって $V(W(z\xi))=\sum_{n=1}^{\infty}\xi^nD_nz^n/n!$。これと (10) 式より、

$$P(T_K=n)=\frac{\xi^nD_n}{n!V(W(\xi))} \tag{11}$$

一方、

$$P(X_1=s_1,\cdots,X_k=s_k)=P(X_1=s_1,\cdots,X_K=s_K,K=k)=\frac{\xi^nV_k}{V(W(\xi))k!}\prod_{j=1}^{k}\frac{W_{s_j}}{s_j!}$$

これを、(11) 式で辺々割ると条件付確率

$$P\bigl((X_1,\cdots,X_k)=(s_1,\cdots,s_k)|T_K=n\bigr)=\frac{n!V_k}{k!D_n}\prod_{j=1}^{k}\frac{W_{s_j}}{s_j!}$$

が得られる。これは、(9) の分布に等しい。

付記 以上は有限集合の確率分割に関連する研究の 1 部分を紹介するものである。渋谷 (2007) は Bell 多項式の立場から確率分割を捉え、色々な分割の分布を導くと同時に、多変量への拡張を行っている。なお、本研究は文部科学省科学研究費補助金（19300098、研究代表者：岡山商科大学・佐井至道）の援助を受けている。

参考文献

Antoniak, C. A. (1974), Mixtures of Dirichlet processes with applications to Bayesian nonparametric problems, *Ann. Statist.*, **2**, 1152-1174.

Ewens, W. J. (1972), The sampling theory of selectively neutral alleles, *Theoret. Popn. Biol.*, **3**, 87–112.

Griffiths, R. C. and Spanò, D. (2007), Record indicies and age-ordered frequencies in Exchangeable Gibbs Partitions, *Electronic Journal of Probability*, August 25, 1107–1130

Gnedin, A. and Pitman, J. (2006), Exchangeable Gibbs partitions and Stirling triangles, *J. of Mathematical Sciences*, **138**, No. 3, 5674–5685

Kerov, S. V. (2006), Coherent random allocationa, and the Ewens-Pitman formula, *J. of Mathematical Sciences*, **133**, No. 3, 5699–5709

Pitman, J. (1995), Exchangeable and partially exchangeable random partitions, *Prob. Theory relat. Fields*, **12**, 145–158.

Pitman, J. (2002), *Combinatorial stochastic processes*, Vol. 1875 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlab, Berlin Heidelberg.

渋谷　政昭 (2007), ベル多項式の拡張と応用、科研費研究集会 2007 年 1 月 10~11 日（於て金沢大学）予稿

大和 元・渋谷 政昭 (2003), ピットマン確率分割と関連する話題, 統計数理, 第 **51** 巻, 第 2 号, 351–372.

＊　国際数理科学協会２００８年度年会，研究集会

２００８年度年会，研究集会が８月１２日に大阪府立大学学術交流会館（中百舌鳥キャンパス）で開催されましたので，ご報告致します．

（１）研究部会「統計的推測と統計ファイナンス」
（関西学院大学商学部　地道正行，大阪大学大学院基礎工学研究科　熊谷悦生）
プログラム

午前の部
10:00〜11:00「統計的学習と線形モデル」
村上　卓(関西学院大学商学研究科)
11:00〜12:00「An Introduction of Cyber Security: A Machine Learning-based Approach」
宮本大輔(奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科)
午後の部
13:00〜14:00「尤度比統計量の弱収束」
藤井孝之(統計数理研究所)
14:00〜15:00「R Commander、HTA、初心者に優しいツール開発の提案」
舟尾暢男(武田薬品工業)
15:00〜16:00「アローの一般可能性定理に関する一考察」
熊谷悦生(大阪大学大学院基礎工学研究科)
16:00〜17:00「Asian option の近似的な価格付けについて」
林　利治(大阪府立大学大学院理学系研究科)

（２）研究部会「確率モデルと最適化」
（近畿大学経営学部　寺岡義伸，大阪府立大学大学院理学系研究科　北條仁志）
プログラム

13:30～13:50「鉄道事業における数理的計画問題」
奥山　亮（大阪府立大学大学院理学系研究科院生）
北條仁志（大阪府立大学大学院理学系研究科）
13:50～14:10「再配分を考慮に入れた新施設の配置」
白江彰之（大阪府立大学大学院理学系研究科院生）
北條仁志（大阪府立大学大学院理学系研究科）
14:20～15:00「Blotto ゲームについて」
寺岡義伸（近畿大学経営学部）
林　芳男（近畿大学経営学部）
15:10～15:50「大規模小売業及び小規模小売業における価格と立地競争に関する一考察」
川勝英史（流通科学大学情報学部経済情報学科）
三道弘明（大阪大学大学院経済学研究科）
16:00～16:40「プレーステーション３の価格設定に関する静学的分析」
三道弘明（大阪大学大学院経済学研究科）

この研究集会は，日本オペレーションズ・リサーチ学会「不確実性環境下での意思決定の理論と応用」研究部会（担当主査：菊田健作，幹事：川勝英史）と合同で開催されました.

＊　御寄付のお願い

Bylaws2007(July)の賛助会員制度(Contributing Member)が発足いたしました。御寄付頂いた方の御指示に従い、各基金による事業の推進を致します。一口１万円より何口でも、また一口未満の御寄付も有難くお受け致しております。

右記の郵便振替口座にてお受け致します。　**00960-3-206607　国際数理科学協会**

基金の使途について下記よりお選び下さい。
(I)ISMS 授賞基金
ISMS 賞、功力賞、北川賞についての授賞メダルの作製、受賞者への送付の費用等授賞に関する費用に支出
(II)国際研究交流基金
海外及び国内の研究集会参加 site の会場費、研究交流設備の使用料の支出
(Ⅲ)Notices(article)、SCMJ(Plaza)等への Invited Authors に対する通信費
(Ⅳ)ISMS 国際研究集会での Keynote Speaker の、出席 site までの交通費
(Ⅴ)使途に指定はしない
猶、御寄付の種類は、御寄付の累計額が
(1)50 万円(又は$5000)以上
(2)10 万円(又は$1000)以上
(3)5 万円(又は$500)以上
(4)1 万円(又は$100)以上
(5)1 万円(又は$100)未満
の 5 種類とし、感謝状を贈呈すると共に御氏名を(匿名希望の方は除き)www. 及び会報、Notices 欄に掲載させて頂きます。いままで、国際数理科学協会　数理科学推進基金に御寄付頂いた先生方に 厚く御礼申し上げます。

＊ Page Charge の大幅減額のお知らせ

今年一月より page chrge の改定がありました。**それは従来のものと大きく異なるものです。**そこで再**度掲載いたします。端的に言うと大幅な discout** です。従来の様に名称として page charge を用いてますが、**それは組版代及び別刷代（20 部）**であり、**特段投稿料というものではありません。**猶従来の

様に、審査は早く、掲載には時間を取らない協会の雑誌"Scientiae Mathematicae Japonicae"に是非投稿を御願いします。会員の方で御存知ない方もおられると思います。そこで、ここでその違いをお知らせします。

従来の page charge per printed page は下表の通りです。

	ISMS members	Non-members
Paper:P	¥3,850 (US$35, €28)	¥4,450(US$43, €35)
Tex:T	¥2,200 (US$18, €14)	¥2,800(US$26 €21)
ISMS style: Js	¥1,100 (US$8, €7)	¥1,700 (US$16 €14)

この度改定した新 page charge の表は下です。猶、論文が掲載される事が決まりましたら、連絡費、抜刷送料の事務処理として、一編について¥1,000 及び組版に次を請求させて頂きます。下の表を御覧になるとお解かりのように、投稿原稿の種類により随分と費用が異なりますので、出来れば協会指定の Js (ISMS style file) で投稿を御願い致します。また、会員になると更に **discout** があります。これを機会に皆様方の更なる投稿をお待ちしております。

＊ 機関会員募集

機関会員の特典としては

(1)本屋より SCMJ を購入すると、print 版 45,000 円であるが、機関会員になると、print 版 33,000 円で **online** も見ることができます。

(2)会員でない 2 名の方を準会員として登録することができます。これにより、page charge（別刷代金） が会員と同じ扱いになります。

	ISMS members	Non-members
p	¥ 3,500 (US$35, € 23)	¥ 4,000 (US$40, €27)
Tex	¥ 2,000 (US$20, € 14)	¥ 2,500 (US$25, €17)
LateX2e, LaTeX	¥ 700 (US$ 7, € 4)	¥ 1,000 (US$10, € 7)
Js (ISMS style file)	¥ 500 (US$ 5, € 3)	¥ 800 (US$ 8, € 5)

(3)上の準会員 2 名は online で SCMJ を見る事ができます。

(4) Net を用いて国際研究集会を催す時、アナウンス、アブストラクトの作成などお助けいたします。大学、研究所等が協会から SCMJ 誌の直接購入すると、今年から online も無料で見ることができるようになりました。

機関会員の申込用紙です。適当にお使い下さい。

上にも書きましたように、2006 年より発効の機関会員制度により各機関会員に所属の研究者 2 名を会費無料で準会員として登録しますと、準会員が SCMJ に accept された論文を掲載するときの page charge(別刷代金)は会員と同額とすることにしました。

この新しい制度の機関会員の P.R.を、日本国内外(BRICS 諸国など)400 大学に向けて、昨年 1 月から始めています。同時に今迄の SCMJ 投稿者で会員でない方、また、個人会員および(機関会員の)準会員加入の P.R.も始めています。

Application for Academic and Institutional Member of ISMS

Subscription of SCMJ	□Print ＋ Online (¥33,000, US$300)
University (Institution)	
Department	
Postal Address where SCMJ should be sent.	
E-mail address	
Person in charge	Name: Signature:
Payment Check one of the two.	□Bank transfer □Credit Card (Visa, Master)
Name of Associate Members	1. 2.

会員の特典としては(1)online で SCMJ をみることが出来ます。(2)論文の掲載時に page charge(別刷代金)が随分と安くなる。

(3) Net を用いて国際研究集会を催す時、アナウンス、アブストラクトの作成などお助けいたします。6,000 円を支払うと、hard-copy の SCMJ が一年を通じて手に入ります。

(4) 10 年間個人会員を続けると、国内会員は 70,000 円、外国会員は US$600、途上会員は US$500 を支払うと生涯会員となれます。

2008 年度からの会費

Categories	国内会員	海外会員	途上国会員
単年度 A 会員	¥9,000	US$75, €60	US$45, €36
3 年 A 会員	¥24,000	US$200, €160	US$117, €93
単年度 S 会員	¥5,000	US$40, €32	US$27, €21
3 年 S 会員	¥12,000	US$100, €80	US$71, €57
生涯会員	¥90,000	US$740, €592	US$616, €493

日本語が出来る方の入会の申込用紙です。また、英語版も書いて頂くことになります。近く net 上で申し込み可能となるようにしますので、入会しようとする方はそれをご利用下さい。

＊　正会員入会申込用紙

正会員入会申込書

<table>
<tr><td>氏名</td><td colspan="2"></td><td>英語名</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">次の２つのうち会報等を送付先とする方に○を付けてお書き下さい。</td></tr>
<tr><td>所属先住所</td><td colspan="4">〒</td></tr>
<tr><td>住所</td><td colspan="4">〒</td></tr>
<tr><td>専門分野</td><td colspan="4">表 f*より選んで○で囲って下さい
f-1, f-2, f-3, f-4, f-5, f-6, f-7, f-8, f-9, f-10, f-11, f-12, f-13, f-14</td></tr>
<tr><td rowspan="2">E-mail address</td><td rowspan="2" colspan="2"></td><td>電話番号</td><td></td></tr>
<tr><td>Fax 番号</td><td></td></tr>
<tr><td>会員区分
該当部分にチェック</td><td colspan="4">□A1 一般 1 年　□ A3 一般 3 年　□ S-A1 高齢者又は学生 1 年
□　S-A3 高齢者又は学生 3 年　□ 生涯会員</td></tr>
<tr><td>所属先の施設</td><td colspan="4">□ ビデオ会議可能　□ 遠隔会議可能　□ コンピューターセンター</td></tr>
<tr><td>所属先の通信システム</td><td colspan="4">□　ISDN　□ IP</td></tr>
<tr><td>所属大学等が機関会員</td><td colspan="4">□　会員である　□　会員でない</td></tr>
<tr><td colspan="5">SCMJ のプリント版の購入</td></tr>
<tr><td colspan="3">□　希望　1 年に付き
1 年会員 6,000 円、3 年会員 5,500 円**</td><td colspan="2">□ 希望しない</td></tr>
<tr><td>高齢会員を申し込む場合</td><td colspan="2">生年月日</td><td colspan="2">学生会員の場合は在学証を添付</td></tr>
<tr><td>日付</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="3">私は ISMS 会員になり、国際数理科学協会に送り状に記載された年会費を払います。ISMS 会員として受け取った Scientiae Mathematicae Japonicae のコピーは個人使用とし、機関、大学または図書館やその他の組織の中に置かず、閲覧目的で会員購読することもしません。</td><td>署名</td><td></td></tr>
</table>

* Notices from the ISMS March 2008 p.25 を御参照下さい。
**ただし、3 年間一括の場合は 15,000 円です。なお、来年より会費の改定を計画しております。
この申込みの内容は会との連絡以外には使用いたしません。

Application form for an individual member of ISMS

Family Name		First &Middle Name	

Check one of the following addresses to which "Notices from the ISMS" should be sent.	
Address of your institution (university)	□
Home address	□
Special fields*	f-1 f-2 f-3 f-4 f-5 f-6 f-7 f-8 f-9 f-10 f-11 f-12 f-13 f-14

E-mail address		Tel.	
		Fax	

Membership category** (Circle one)	A1, A3, SA1, SA3, F1, F3, SF1, SF3, D1, D3, SD1, SD3, AL, FL, DL

I wish to enroll as a member of ISMS and will pay to International Society for Mathematical Sciences the annual dues upon presentation of an invoice. Copies of Scientiae Mathematicae Japonicae received as an ISMS member will be for my personal use only and shall not be placed in institutional, university or other libraries or organizations, nor can membership subscriptions be used for library purposes.

Signature	

Check the facilities your institution has.	☐ Conference room(s) for video conference ☐ Computer center
Communication system of your institution	□ ISDN □ IP
Is your institution (university) an Institutional Member of ISMS?	□ Yes □ No
☐ I subscribe to the printed version of SCMJ.	□¥6,000 (US$60, €48) per year for those members of A1, SA1, F1, and SF1 , D1 and SD1. □¥5,500 (US$55. €44) per year for those members of A3, SA3, F3, SF3, D3, SD3, AL, FL, and DL. □In case A3, SA3, F3, SF3, D3, SD3, AL, FL, or DL members make the payment at a time in advance, the price for 3 years is ¥15,000 (US$150, €120).

For the aged member, write your birth year.		For the student member, student registration certificate should be attached.
Date of Application		

* Notices from the ISMS March 2008 p.25 を御参照下さい。

**Notices from the ISMS March 2008 p.28 を御参照下さい。

ISMS (JAMSの継続) 会員募集

ISMSの出版物：ISMSは、創刊より約60年、国際的に高い評価を得ているMathematica Japonica (M.J.)と、その姉妹誌で電子Journal とPaper誌とを持つ、Scientiae Mathematicae (SCM) とを発行してきました。両誌は合併して、"21世紀MJ/SCM New Series, Scientiae Mathematicae Japonicae (SCMJ) "として、電子版は2000年9月より発行してきました。印刷版は、1978年1月より、年間6冊、700～1200頁を出版しています。全体として230巻を超える、日本で最大量を誇る数理科学の雑誌です。その特長は、下の1)～7)です。

1) Editorial Board には、国内だけでなく、海外15カ国の著名な研究者40名が参加している。
2) 世界のresearch group に論文が紹介され、積極的な交流が推進されている。
3) Editorを窓口として直接論文を投稿できて、迅速なreferee及び出版が得られる。
4) 有名な数理科学者のoriginal paperや、研究に役立つsurveyが、毎号載せられている。
5) SCMJは、世界の有名数理科学者による、極めて興味あるexpository paperを、毎号International Plaza欄に掲載している。世界各国の図書館へ、広く配布されている。
6) 投稿論文は、accept後 (又は組版後) 待ち時間0で発行されます。
7) Mathematical Review, Zentralblatt に from cover to cover でreviewされている。

ISMSの研究集会：(1)研究仲間がゆっくり時間をかけて発表、討論をする、特色ある参集型研究集会が毎年行われ、非会員も含む多数の参加者の、活発な研究交流の場となっている。(2)ISMSには内外の著名な研究者が多数入っておられる。近いうちに内外を結ぶ高いlevelの研究会がonlineで行われる事を期待している。（本誌45号 3p及びNotices March 2006 9p を御参照下さい）

ISMSの学術賞：会員の優れた論文を広く世界に紹介し、更なる研究を奨励するために、ISMS賞、JAMS賞、Shimizu賞、Kunugui賞、Kitagawa賞を設けている。（詳しくは本誌45号2p会則13条を御参照下さい）

＜ISMSの会員の特典＞１．SCMJ電子版の購読 (print outも含む) 無料。２．SCMJ print版の少額での購読（下表１)。３．Page charge(別刷代金)のdiscount (下表２)。

＜機関購読会員の特典＞1. 機関内の 2 名の方を準会員として会費無料で登録することが出来る。２．準会員は会員と同じpage charge(別刷代金)のdiscountを受けることが出来る。

表１
【雑誌購読費】

	正会員（1年）	正会員（3年）	機関会員	定価
Print	¥6,000 US$ 60, €48	¥5,500* US$ 55, €44	¥33,000 US$ 300, €240	¥45,000 US$ 400, €320
Online	Free	Free		
Online+print	¥6,000 US$ 60, €48	¥5,500 US$ 55, €44	¥33,000 US$ 300, €240	¥45,000 US$ 400, €320

*３年会員のみ、雑誌購読費３年分前払いの場合は¥15,000になります。

著者の方には、SCMJを１冊送料込みで1,200円またはUS＄12で購入できます。

表２
【ページチャージ】

	ISMS members	Non-members
p	¥3,500 (US$35, € 23)	¥4,000 (US$40, €27)
Tex	¥2,000 (US$20, € 14)	¥2,500 (US$25, €17)
LateX2e, LaTeX	¥ 700 (US$ 7, € 4)	¥1,000 (US$10, € 7)
Js (ISMS style file)	¥ 500 (US$ 5, € 3)	¥ 800 (US$ 8, € 5)

別刷作成について、次の費用の分担をお願いします。原稿の組版についての連絡費、抜刷送料等の事務処理として、一編について¥1,000、及び上表の各原稿の種類による組版費を請求させて頂きます。
（2008年 Vol.67 から実施）

表３
【2008年の会費】

Categories	国内会員	海外会員	途上国会員
単年度A会員	¥9,000	US$ 75, €60	US$ 45 , €36
3年A会員	¥24,000	US$ 200, €160	US$ 117, €93
単年度S会員	¥5,000	US$ 40, €32	US$ 27, €21
3年S会員	¥12,000	US$ 100, €80	US$ 71, €57
生涯会員**	¥90,000	US$ 740, €592	US$ 616, €493

**過去10年以上、正会員であった方に限る。

A会員は正会員を指し、S会員は、学生会員と高齢会員(70歳以上)を指します。

国際数理科学協会
International Society for Mathematical Sciences
〒590-0075 堺市堺区南花田口町2-1-18 新堺東ビル内
Tel:(072)222-1850 / Fax: (072) 222-7987 URL:http://www.jams.or.jp