国際数理科学協会会報

No.56/ 2008.3

編集委員長 藤井正俊

丘本正先生追悼特集

* 研究業績一覧

丘本正氏は平成 18 年 12 月 14 日 83 歳で他界されました。当協会は先生には随分前から大変お世話になりここ数年は名誉編集委員として協会編集の雑誌 “Scienticae Mathematicae Japonicae”に大変ご貢献頂き、また大阪大学を支持大学として経済的に当協会を支えて頂きました。

たまたま広島大学で平成 20 年 1 月 16 日から 18 日まで研究集会が開催された際、主催者が先生の業績を偲んだ講演時間として半日を割いて与えられておりましたので、そこでの講演をこの協会の会報に掲載しても良いとのご意向を頂きました。少し遅くはなりましたが、3 名の方の原稿をここに掲載し先生の追悼としたいと思います。種々ご協力頂きました方々に厚く御礼を申します。

はじめに研究業績一覧を書き、その後、アルハベット順に3名の方の原稿を掲載いたします。

丘本正氏　研究業績一覧

論文

I.　　統計的推測理論

I-1. On a non-parametric test, Osaka Math. J. 4, 77-85 (1952).
I-2. Unbiasedness in the test of goodness of fit, Osaka Math. J. 4, 211-214 (1952).
I-3. Some combinatorial tests of goodness of fit, Osaka Math. J. 4, 215-228 (1952).
I-4. カイ 2 乗分布の漸近正規性、統計学会会報、50-52 (1953).
I-5. On a certain type of matrices, with an application to experiment design, Osaka Math J. 6, 73-82 (1954).
I-6. 順序統計量と累積度数の関係、　大阪統計談話会報告、1, 18-19 (1955).

I-7. 母数の入っている場合のカイ 2 乗適合度検定法、大阪統計談話会報告、1, 23-25 (1955).
I-8. パラメトリック ω 2 検定法、大阪統計談話会報告、1, 37-39 (1955).
I-9. Fit of a Poisson distribution by the index of dispersion, Osaka Math. J. 7, 1-13 (1955).
I-10. Some inequalities relating to the partial sum of binomial probabilities, Ann. Inst. Statist. Math. 10, 29-35 (1958).
I-11. A convergence theorem for discrete probability distributions, Ann. Inst. Statist. Math. 11, 107-112 (1959).
I-12. An inequality for a weighted sum of χ 2 variates, Bull. Math. Statist. 9, 69-70 (1960).
I-13. Test of independence in intraclass 2x2 tables (with G. Ishii), Biometrika, 48, 181-190 (1961).
I-14. χ2 変量の荷重和の分布に対する一般 χ 2 級数展開、大阪統計談話会報告、6, 1-8 (1962).
I-15. Chi-square statistic based on the pooled frequencies of several observations, Biometrika, 50, 524-528 (1963).
I-16. 不変性と十分統計量に関するノート、大阪統計談話会報告、8, 227-231 (1964).
I-17. Birth-rank problem for incomplete families, Japan J. Human Gen., 10, 13-16 (1965).

II. 判別分析

II-1. Discrimination for variance matrices, Osaka Math. J. 13, 1-39. (1961).
II-2. An asymptotic expansion for the distribution of the linear discriminant function, Ann. Math. Statist., 34, 1286-1301 (1963).
II-3. The classification statistic W* in covariate discriminant analysis, (with Memon, A.Z.) Ann. Math. Statist. 41, 1491-1499 (1970)
II-4. Asymptotic expansion of the distribution of the Z statistic in discriminant analysis, (with Memon, A.Z.) J. Multivar. Anal., 1, 294-307 (1971)
II-5. Estimation of the probabilities of misclassification for a linear discriminant function in the univariate case, (with Sedransk, N.) Ann. Inst. Statist. Math. 23, 419-435 (1971).
II-6. An artificial numerical model for Hayashi's second method of quantification, Otemon Econ. Stud., 23, 1-7 (1990)
II-7. 数量化法第 2 類の人工的データ、日本統計学会誌、22, 95-101 (1992)
II-8. Contributions of variates and items in canonical discriminant analysis of type-mixed data, Math. Japon., 49, 151-158 (1999)

III. 多変量解析

III-1. Minimaization of eigenvalues of a matrix and optimality of principal components, (with Kanazawa, M.) Ann. Math. Statist. 39, 67-71 (1968)
III-2. A note on the non-null distribution of the Wilks statistic in MANOVA, (with Asoh, Y.H.) Ann. Inst. Statist. Math. 21, 67-71 (1969)
III-3. Optimality of principal components, Multivariate Analysis (ed. Krishnaiah, P.R.) 2, 673-685, Academic Press, (1969)
III-4. Partial orderings of permutations and monotonicity of a rank correlation statistic, (with Yanagimoto, T.) Ann. Inst. Statist. Math. 21, 489-506 (1969)
III-5. Four techniques of principal component analysis, J. Japan Statist. Soc., 2, 63-69. (1972)

III-6. 数量化理論第４類と主座標分析法、(戸田準と共著) 日本統計学会誌、３、41-53 (1973)
III-7. Distinctness of the eigenvalues of a quadratic form in a multivariate sample, Ann. Statist., 1, 763-765 (1973)
III-8. Basic properties of categorical canonical correlation analysis, (with Endo, H.) J. Japan Statist. Soc., 4, 15-23 (1973)
III-9. An asymptotic theory of categorical correlation analysis, (with Endo, H.) J. Japan Statist. Soc., 5, 1-8 (1974)
III-10. Perturbation of a matrix function and its application to multivariate analysis, (with Fujikoshi, Y.) J. Japan Statist. Soc., 6, 33-37 (1976)
III-11. Asymptotic normality in Monte Carlo integration, Math. Computation, 30, 831-837 (1976)
III-12. Random model and fixed model of principal component analysis, Essays in Prob. Statist. (ed. by Ikeda, S. et al.), 339-351 (1976)
III-13. Bisection method for Monte Carlo integration, (with Takahashi, R.) Math. Japon., 22, 403-411 (1977)
III-14. Optimality of multidimensional representation in Hayashi's fourth method of quantification, (with Isogai, T.) J. Japan Statist. Soc., 8, 63-69 (1978)
III-15. A generalization of the ridge function theorem, (with Kawai, N.) Math. Japon., 24, 175-178 (1979)
III-16. Canonical factor analysis in the random model, (with Aoyanagi, H.) Math. Japon., 24, 541-547 (1979)
III-17. Linear prediction in factor analysis model, (Isogawa, Y.) Biometrika, 67, 482-484 (1980)
III-18. Asymptotic confidence regions for a linear structural relationship, (with Isogawa, Y.) J. Japan Statist. Soc., 11, 119-126 (1981)
III-19. Statistical data processing systems, Scientific Information System in Japan, (with Asano, C. and Nakagawa,T.) (ed by Inose, H.), 119-126, North Holland (1981)
III-20. Maximum likelihood method in the Brown-Fereday model of multivariate structural relationship, (with Isogawa, Y.) Math. Japon., 28, 173-180 (1983)
III-21. Asymptotic theory of Brown-Fereday's method in linear structural relationship, J. Japan Statist. Soc., 13, 53-56 (1983)
III-22. A simple Marquadt algorithm for the nonlinear least-square problem, (with Ihara, M.) Statist. Prob. Letters, 1, 301-305 (1983)
III-23. A new algorithm for the least-square solution in factor analysis, (with Ihara, M.) Psychometrika, 48, 597-605 (1983)
III-24. Large sample theory for a linear functional relationship, (with Isogawa, Y.) J. Kobe Univ. Commerce, 35, 335-350 (1984)
III-25. Partial Gauss-Newton algorithm for least-squares and maximum likelihood methods in factor analysis, (with Ihara, M.) J. Japan Statist. Soc., 14, 137-144 (1984)
III-26. Experimental comparison of least-squares and maximum likelihood methods in factor analysis, (with Ihara, M) Statist. Prob. Letters, 3, 287-293 (1985)
III-27. Early-step estimators in least-squares factor analysis, Math. Japon., 33, 565-576 (1988)
III-28. The number-of-factors problem in least-squares factor analysis with a random loading model, J. Japan Soc. Comp. Statist., 1, 1-15 (1988)
III-29. 多変量解析諸手法のモデル再現性に関する数値実験、行動計量学、18, 47-55 (1991)

IV. 対応分析、数量化法

IV-1. 数量化法第３類の人工的データ、行動計量学、19, 75-82 (1992)

IV-2. 数量化法第 3 類の諸問題、日本統計学会誌、22, 229-239 (1992)
IV-3. 数量化法第 3 類における人工的データ、追手門経済・経営研究、1, 1-18, (1 994)
IV-4. The Guttman effect of a linear trait in Hayashi's third method of quantification, Math. Japon., 39, 523-535 (1994)
IV-5. Correspondence analysis of an artificial disk data, J. Japan Statist. Soc., 24, 157-168 (1994)
IV-6. Correspondence analysis of an artificial torus data, Behaviormetrika, 21, 149-161 (1994)
IV-7. Correspondence analysis of some artificial data with multiple circular structure, Math. Japon., 42, 201-212 (1995)
IV-8. Spharical trait in correspondence analysis of artificial data, (with Endo, H.) J. Japan Statist. Soc., 25, 183-191 (1995)
IV-9. Correspondence analysis of artificial data based on a non-regular symmetric polyhedron, Math. Japon., 44, 61-66 (1996)

総　説

1. わが国の統計学の現状についての所感、統計研究通信、7、7-10 (1964)
2. 数理統計学の博士課程大学院の現状と問題点、日本統計学会誌、11, 72-80 (1981)

著　書

１．因子分析の基礎、日科技連出版社、1986
２．パソコン統計学入門、　共立出版、1989

訳　書

１．因子分析法、日科技連出版社、1970, (D.N. Lawley and A.E. Maxwell 著、Factor analysis as a statistical method)
２．ノンパラメトリック統計学、日科技連出版社、1974, (J. Hajek 著、A course in nonparametric statistics)
３．統計的多変量データ解析、日科技連出版社、1979, (R. Gnanadesikan 著、Method from statistical data analysis of multivariate observations)

分担執筆

１．現代統計学大辞典、（中山伊知郎編）、東洋経済新報社、1962, 211-218

判別分析における丘本先生の貢献と最近の発展

中央大　藤越康祝

1　はしがき

丘本先生の代表作の 1 つは, 線形判別関数 W の漸近展開の導出である (Okamoto (1963)). これと関連して, Z 統計量, および, 共変量がある場合の線形判別関数 W^* の漸近展開も導出している (Memon and Okamoto (1970), Memon and Okamoto (1971)). 判別分析におけるこの他の研究成果として, 共分散行列に関する判別問題 (Okamoto (1961)), および 1 次元の場合における線形判別関数 W の条件付誤判別確率の推定問題を論じている (Sedransk and Okamoto (1971)).

本論文では, まず, 上記の研究のうち主要な成果とそれらに関連した結果を紹介する. 次に, 漸近展開の誤差評価, 高次元枠組みでの漸近近似, さらには, 高次元特有の判別法, など最近の発展を概観する.

2　丘本先生の主要な成果と関連結果

同一の共分散行列をもつ 2 つの正規母集団 $\Pi_1 : N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma), \Pi_2 : N_p(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma)$ に関する判別問題を考える. 各母集団からの大きさ N_i の標本

$$\Pi_i;\ \boldsymbol{x}_{i1}, \boldsymbol{x}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{iN_i},\ i = 1, 2$$

にもとづく標本平均ベクトルを $\bar{\boldsymbol{x}}_1, \bar{\boldsymbol{x}}_2$ とし, 合併標本共分散行列を S とする. また, 全標本数を $N = N_1 + N_2$ とし, $n = N - 2 \geq p$ とする. このとき, 線形判別法は, 線形判別関数

$$W = (\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_2)' S^{-1} \left\{ \boldsymbol{x} - \frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{x}}_1 + \bar{\boldsymbol{x}}_2) \right\}$$

を用いて, 通常は

$$W \geq 0 \Rightarrow\ \boldsymbol{x} \in \Pi_1; \quad W < 0 \Rightarrow\ \boldsymbol{x} \in \Pi_2$$

と判定する.

大標本漸近的枠組;

$$\mathrm{A1}: N_1 \to \infty,\ N_2 \to \infty,\ N_1/N_2 \to c(\text{正数})$$

のもとで, $\boldsymbol{x}$ が Π_1 に属するとき, W は $N((1/2)\Delta^2, \Delta^2)$ に分布収束する. ここに, Δ^2 はマハラノビスの距離の 2 乗であって, $\Delta^2 = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)$ である. このとき, Okamoto (1963) では, 極限分布の結果を拡張した漸近展開

$$\begin{aligned} P_1(u;\Delta) &= \mathrm{P}\left(\frac{W-\frac{1}{2}\Delta^2}{\Delta} \le u \mid \Pi_1\right) \\ &= \Phi(u) + \phi(u)\left\{\frac{1}{N_1}a_1 + \frac{1}{N_2}a_2 + \frac{1}{n}a_3\right\} + O_2 \end{aligned}$$

を導出している. ここに, Φ, ϕ はそれぞれ $N(0,1)$ の分布関数, 密度関数である. また, 係数 a_i は

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2}\Delta^2\{u^3 + (p-3)u - p\Delta\}, \\ a_2 &= -\frac{1}{2}\Delta^2\{u^3 + 2\Delta u^2 + (p-3+\Delta^2)u + (p-2)\Delta\}, \\ a_3 &= -\frac{1}{4}\{4u^3 + 4\Delta u^2 + (6p-6+\Delta^2)u + (2p-1)\Delta\} \end{aligned}$$

として与えられる. 論文では O_2 の項も求められ, 漸近展開近似による残差項 (あるいは誤差項) は O_3 として与えられている.

当時, このような漸近展開の導出は, 代表的多変量検定の尤度比統計量の帰無分布と平均ベクトルの有意性に関するホテリング統計量に対して与えられていたに過ぎなかった. 前者は Box (1949) により, 後者は Siotani (1957), Ito (1960) によって求められた. 丘本による方法は, 塩谷等によって用いられた微分作用素の方法を拡充発展させるものであるが, 判別の分野での漸近展開として最初の成果であると共に, 得られた結果の有用性も高く, その後の発展には大きく影響を与えている. 一般に漸近展開の導出の多くは特性関数を展開し, それを形式的に反転させる方法によっていて, 誤差項のオーダー評価はこの時点では厳密には与えられていなかった.

上記の漸近展開公式において, $u = -(1/2)\Delta$ とおいたもの, すなわち, $P_1(-(1/2)\Delta;\Delta)$ は, 本来 Π_1 に属するものを誤って Π_2 に属すると判定する誤判別確率になる. また, $\boldsymbol{x}$ が Π_2 に属するときも同様な結果が得られるので, 誤判別確率の漸近展開を与えたことにもなっている.

別な判別法として，尤度比に基づく Z-判別法がある．これは２次関数

$$Z = \frac{1}{2}\left[\frac{N_2}{N_2+1}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}_2)'S^{-1}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}_2) - \frac{N_1}{N_1+1}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}_1)'S^{-1}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}_1)\right]$$

を考え，Z の値が正か負によて，$\boldsymbol{x}$ を Π_1 あるいは Π_2 に属すると判定する方法である．Memon and Okamoto (1971) では，W の場合と同様な方法で Z 統計量の漸近展開を与えている．

このような丘本による成果と関連して，Anderson (1973) は，スチューデント化された線形判別関数の分布，すなわち

$$\mathrm{P}\left(\frac{W-\frac{1}{2}D^2}{D} \le u \mid \Pi_1\right)$$

の漸近展開を与えている．ここに，D は標本マハラノビスの距離であって，$D^2 = (\bar{\boldsymbol{x}}_1-\bar{\boldsymbol{x}}_2)'S^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}_1-\bar{\boldsymbol{x}}_2)$ である．Anderson (1973) において，漸近展開の妥当性，すなわち，残差項のオーダー評価が証明されていることを注意したい．この論文では，丘本による W の漸近展開の妥当性も同様に示せることにも言及している．Siotani and Wang (1977) では，W と Z に対して，O_3 の項までの漸近展開を与えている．

p 次元主変量 $\boldsymbol{x}$ に加え q 次元共変量 $\boldsymbol{y}$ がある判別問題は

$$\Pi_i : N_{p+q}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_i \\ \boldsymbol{\eta}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}\right), \quad i = 1, 2$$

の判別問題である．$(p+q)$ 次元のマハラノビス距離の２乗は $\Delta^2 = (\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_2)'(\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_2)$ で，$\Delta^2 \ge \Delta_1^2 = (\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_2)'\Sigma_{11}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_2)$ であるので共変量 $\boldsymbol{y}$ を用いることの有効性が示唆される．このような場合の線形判別は

$$W^* = (\bar{\boldsymbol{x}}_1^* - \bar{\boldsymbol{x}}_2^*)'(S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21})^{-1}\left\{\boldsymbol{x}^* - \frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{x}}_1^* + \bar{\boldsymbol{x}}_2^*)\right\}$$

で定義される (Cochran and Bliss (1948))．ここに，$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x} - \hat{B}\boldsymbol{y}$, $\bar{\boldsymbol{x}}_i^* = \bar{\boldsymbol{x}}_i - \hat{B}\bar{\boldsymbol{y}}_i$, $i = 1, 2$, $\hat{B} = S_{12}S_{22}^{-1}$, $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ と $\bar{\boldsymbol{y}}_i$ は標本平均，さらに，S は合併共分散行列で，

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22}\end{pmatrix}, \quad S_{12} : p \times q$$

と分割している．Memon and Okamoto (1970) では，W^* の漸近展開を与え，その方法が有効になる場合を示している．

3　高次元漸近的枠組での近似

一般に, 大標本の枠組での近似の精度は次元が大きくなるにつれて悪くなる. これを克服する方法として, 標本数に加え次元数も大きいとした高次元漸近的枠組;

$$\mathrm{A2} : N_i \to \infty,\ N_i/p \to c_i(\text{正数}),\ i = 1, 2$$

のもでの近似が研究されている.

高次元の枠組のもとでロシアの研究者 Deev (1970), Rudys (1972) などによる線形判別関数に関する結果がある. 線形判別関数や 2 次判別関数を含むクラスについては Fujikoshi and Seo (1998) の研究がある.

線形判別関数によって, 本来 Π_1 に属するものを誤って Π_2 に属すると判別する誤判別確率は

$$\begin{aligned} e(2|1) &= \mathrm{P}(W < 0 | \boldsymbol{x} \in \Pi_1) \\ &= \mathrm{E}[\Phi(V^{-1/2}U)] \end{aligned}$$

と表せる. ここに,

$$\begin{aligned} V &= (\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_2)' S^{-1} \Sigma S^{-1} (\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_2), \\ U &= (\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_2)' S^{-1} (\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \boldsymbol{\mu}_1) - \frac{1}{2} D^2. \end{aligned}$$

同様に, 本来 Π_2 に属するものを誤って Π_1 に属すると判別する誤判別確率を $e(1|2)$ とすると, 高次元漸近的枠組のもとで

$$e(2|1) \simeq \Phi(\gamma(2|1)), \quad e(1|2) \simeq \Phi(\gamma(1|2))$$

のように近似される. ここに

$$\gamma = \gamma(2|1) = -\frac{1}{2}\left(1 - pN^{-1}\right)^{1/2} \frac{\Delta^2 + p(N_1 - N_2)(N_1 N_2)^{-1}}{\sqrt{\Delta^2 + pN(N_1 N_2)^{-1}}}.$$

$\gamma(1|2)$ は $\gamma(2|1)$ において, N_1 と N_2 を入れかえればよい. これらの漸近近似公式の精度は, Wyman et al. (1990), Fujikoshi and Seo (1998) によって数値的に調べられている. 実際, O_1 の項まで用いた丘本の漸近展開と上記漸近近似の数値的比較は, たとえば, 次のように与えられる. $N_1 = N_2 = N/2$ とし, $e(2|1)$ の値 (事前確率を等

しいとしたときの誤判別率になる) を次の場合:

$$N = 10, 20, 50, 100, 200; \quad p = 2, 3, 5, 10, 15, 20$$
$$\Delta = 1.05, 1.68, 2.56, 3.29$$

で $N-2>p$ を満たす 104 通りについて調べる. 数値実検により真値を求め, 絶対誤差の平均について次の結果が報告されている (Wyman et al. (1990)). 次元 p が大きいとして得られる近似公式の精度は著しく良く, また, p が小さいときにも有効げあることは注目されてよい.

表 1. 近似の精度

Δ	Okamoto	Raudys
1.05	0.0211	0.0020
1.68	0.0037	0.0019
2.56	0.0069	0.0017
3.29	0.0102	0.0018
平均	0.0104	0.0019

また, Fujikoshi (2000) では, 高次元漸近近似に対して, 次のような誤差限界を導出している.

$$|P(W \le 0|\boldsymbol{x} \in \Pi_1) - \Phi(\gamma)| \le B_2$$

ここに

$$B_2 = \beta_{2,0} v_0^{-1} \mathrm{Var}(U) + \beta_{2,1} v_0^{-3/2} \{\mathrm{Var}(U) \cdot \mathrm{Var}(V)\}^{1/2} + \beta_{2,2} v_0^{-2} \mathrm{Var}(V).$$

$v_0 = \mathrm{E}(V)$, $\beta_{2,0} < 0.12$, $\beta_{2,1} < 0.2$, $\beta_{2,0} < 1.1$. 誤差限界は, p, N_1, N_2, Δ に依存している. 表 2 において, いくつかの場合について上界を与えている.

表 2. 誤差限界 B_2 の上界

p	N_1	N_2	B_2:$\Delta = 1.68$	B_2:$\Delta = 2.56$
5	75	75	0.0605	0.0522
10	75	75	0.0606	0.0540
30	30	30	0.0958	0.0691
30	60	60	0.0633	0.0400
30	100	100	0.0222	0.0121

2 次関数 Z による判別は

$$D_i^2 = (1+N_i)^{-1}(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}_i)' S^{-1} (\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}_i), \ i = 1, 2$$

とおくとき,

$$D_1^2 < D_2^2 \Rightarrow \boldsymbol{x} \in G_1; \quad D_1^2 > D_2^2 \Rightarrow \boldsymbol{x} \in G_2$$

と判定する方法と同値である．この判別法は, $N_1 = N_2$ の場合には線形判別関数による方法になる．誤判別確率の高次元漸近近似は Fujikoshi and Seo (1998) によって与えられている．

4 高次元判別法

$p > n$ の場合には, S が特異になるため, 線形判別関数 W を直接利用することはできなくなる．このため, 何らかの修正が必要である．Saranadasa (1993) は, 多変量 1 元配置の考えに基づく判別法を提案している．判別すべき観測値 $\boldsymbol{x}$ が Π_i に属するとしたときの群内変動行列を W_i とすると,

$$W_i = nS + \frac{N_i}{N_i + 1}(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}_i)(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}_i)'$$

と表せる．トレース基準を用いると,

$$\mathrm{tr}W_1 < \mathrm{tr}W_2$$

ならば, $\boldsymbol{x}$ を Π_1 と判別する．この判別法は

$$T = N_2(N_2+1)^{-1}(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}_2)'(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}_2) - N_1(N_1+1)^{-1}(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}_1)'(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}_1).$$

とするとき, $T \geq 0 (< 0)$ ならば, $\boldsymbol{x}$ を $\Pi_1(\Pi_2)$ と判別することと同値である．この方法は S に依存していない．高次元枠組:

$$\mathrm{A3}: p \to \infty, \ N_i (i = 1, 2) \text{ は固定}$$

のもとで, T の漸近分布が求められている．(Saranadasa (1993)).

Loh (1997) は, Friedman (1989) の正則化判別解析法の考えに沿って, 次の形の適応型リッジ判別関数

$$W_\lambda = (\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_2)'(S + \lambda I)^{-1}\left\{\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{x}}_1 + \bar{\boldsymbol{x}}_2)\right\}$$

について考察している．ここに, $\lambda = \lambda(\bar{\boldsymbol{x}}_1, \bar{\boldsymbol{x}}_2, S)$ で, λ は滑らかな関数である．このとき, 大標本のもとで誤判別確率を漸近的に評価することができるが, 高次元の枠組みでの評価は与えれていない．

Srivastava (2007) は, S の逆行列の代わりにムーアペンローズ逆行列を用いることを提案している. S のスペクトル分解あるいは特異値分解を

$$S = HLH', \quad H'H = I_k, \quad L = \mathrm{diag}(\ell_1, \ldots, \ell_k), \quad \ell_1 \geq \ldots \geq \ell_k > 0$$

とする. ここに, L の対角要素は S の固有値で, H の列ベクトルは長さ 1 の固有ベクトルである. このとき, S のムーアペンローズ逆行列は

$$S^+ = HL^{-1}H'$$

によって定義される. 判別関数は

$$W^+ = (\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_2)'S^+ \left\{ \boldsymbol{x} - \frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{x}}_1 + \bar{\boldsymbol{x}}_2) \right\}$$

として定義される. また, 2 次の判別関数は

$$D_i^{+2} = (1 + N_i)^{-1}(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}_i)'S^+(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}_i), \ i = 1, 2$$

と定義し,

$$D_1^{+2} < D_2^{+2} \Rightarrow \ \boldsymbol{x} \in \Pi_1; \quad D_1^{+2} > D_2^{+2} \Rightarrow \ \boldsymbol{x} \in \Pi_2$$

と判別すればよい. Srivastava (2007) は $\lim_{N_i \to \infty} \lim_{p \to \infty}$ のもとで誤判別確率の漸近的評価を与えている. 一方, Yamada (2007) は Fujikoshi (2000) を利用して, $\Sigma = I_p$ の場合に A2 のもとでの漸近近似とその誤差限界を導出している.

高次元小標本データ $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ を p 次元空間における n 個のベクトルあるいは点とみなすことにする. このとき, 通常の漸近理論とは異なって, 標本数 n を固定し, 次元数 p を大きくした場合, すなわち A3 のもとで高次元小標本データベクトルの漸近的挙動に関心がある. Hall et al. (2005) は, 条件

(i) すべての成分に関して, 4 次モーメントは一様有界,

(ii) $\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \mathrm{Var}(x_k) \to \sigma^2$,

(iii) ρ mixing 条件;

$$\sup_{|i-j| \geq r} |\mathrm{E}(x_i x_j)| \leq \rho(r) \to 0 \text{ as } r \to \infty$$

のもとで, これらの n 個の点は正則な単体の頂点に近づき, ランダムネスは頂点間の回転に集約されることを示している. これらの性質は, 2群の判別問題に応用できる. 2つの p 次元母集団 Π_1, Π_2 における変数をそれぞれ $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ とする. $\boldsymbol{x}$ は上記の条件をみたし, 同様に $\boldsymbol{y}$ もその条件をみたすとする. ただし, (ii) におけるパラメータ σ^2 は τ^2 とする. さらに, 2群は

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\{\mathrm{E}(x_k)-\mathrm{E}(y_k)\}^2 \to \mu^2$$

をみたしているとする. 今 $\boldsymbol{x}$ についての大きさ n の標本 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ と, $\boldsymbol{y}$ についての大きさ m の標本 $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m$ が与えられいるとする. このとき, $\sigma^2/n \geq \tau^2/m$ を仮定すると,

$$\mu^2 > \sigma^2/n - \tau^2/m$$

の場合, 新しい Π_1 からのデータが線形な超平面によって正しく分類される確率は $p \to \infty$ のとき 1 に収束する.

各群の確率分布が複雑な非正規分布をしている場合の判別法の1つとして, サポートベクターマシン法がある（詳しくは Hastie, Buja and Tibshirani (1994) などを参照）. これは p 次元多変量変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_p)'$ から新たな変数 $h_1(\boldsymbol{x}), \ldots, h_m(\boldsymbol{x})$ を構成し, これらの1次式

$$b_0 + b_1 h_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + b_m h_m(\boldsymbol{x})$$

をもとにした判別法である. ここで, 係数 $b_0, b_1, \ldots, b_m$ は初期データをできるだけ分離する考え方の1つであるマージン基準にもとづいて数値的に決められる. このような判別法における変数の数は m であって, 高次元になると考えられる. したがって, 上記のような判別に関する高次元漸近的結果をサポートベクターマシン法へ応用することが期待される.

References

[1] ANDERSON, T. W. (1973). An asymptotic expansion of the distribution of the Studentized classification statistic W. *Ann. Statist.*, **1**, 964-972.

[2] BOX, G. E. P. (1949). A general distribution theory for a class of likelihood criteria. *Biometrika*, **36**, 317-346.

[3] COCHRAN, W. G. and BLISS, C. I. (1948). Discriminant functions with covariance. *Ann. Math. Statistics*, **19**, 151-176.

[4] DEEV, A. D. (1970). Representation of statistics of discriminant analysis and asymptotic expansions when space dimensions are comparable with sample size. *Soviet Math. Dokl.* **11**, 1547-1550.

[5] FRIEDMAN, J. H. (1989). Reguralized discriminant analysis. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **84**, 165-175.

[6] FUJIKOSHI, Y. and SEO, T. (1998). Asymptotic approximations for EPMC's of the linear and the quadratic discriminant functions when the samples sizes and the dimension are large. *Statist. Anal. Random Arrays* **6** , 269-280.

[7] FUJIKOSHI, Y. (2000). Error bounds for asymptotic approximations of the linear discriminant function when the sample size and dimensionality are large. *J. Multivariate Anal.*, **73**, 1-17.

[8] HALL, P., MARRON, J, S. and NEEMAN, A. (2005). Geometric representation of high dimension, low sample size data. *J. R. Statist. Soc. B*, **67**, 427-444.

[9] HASTIE, T. , BUJA, A. and TIBSHIRANI, R. (1994). Flexible discriminant analysis by optimal scoring. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **89**, no. 428, 1255-1270.

[10] ITO, K. (1960). Asymptotic formulae for the distribution of Hotelling's generalized ${T_0}^2$ statistic. II. *Ann. Math. Statist.*, **31**, 1148-1153.

[11] LOH, W. L. (1997). Linear discrimination with adaptive rige classification rules. *J. Multivariate Anal.*, **62**, 169-180.

[12] MEMON, A.Z. and OKAMOTO, M. (1970). The classification statistic W^* in covariate discriminant analysis. *Ann. Math. Statist.*, **41**,1491-1499.

[13] MEMON, A. Z. and OKAMOTO, M. (1971). Asymptotic expansion of the distribution of the Z statistic in discriminant analysis. *J. Multivariate Anal.*, **1**, 294-307.

[14] OKAMOTO, M. (1963). An asymptotic expansion for the distribution of the linear discriminant function. *Ann. Math. Statist.*, **34**, 1286-1301.

[15] OKAMOTO, M. (1961). Discrimination for variance matrices. *Osaka Math. J.*, **13**, 1-39.

[16] RAUDYS, S. (1972). On the amount of priori information in designing the classification algorithm. *Tech, Cybern.* **4**,168-174(in Russian).

[17] SARANADASA, H. (1993). Asymptotic expansion of the misclassification probabilities of D- and A- criteria for discrimination from two high dimensional populations using the theory of large dimensional random matrix. *J. Multivariate Anal.*, **46**, 154-174.

[18] SEDRANSK, N. and OKAMOTO, M. (1971). Estimation of the probabilities of misclassification for a linear discriminant function in the univariate case. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **23**, 419-435.

[19] SIOTANI, M. (1957). Note on the utilization of the generalized Student ratio in the analysis of variance or dispersion. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **9**, 157-171.

[20] SIOTANI, M. and WANG, R. H. (1977). Asymptotic expansions for error rates and comparison of the W-procedure and the Z-procedure in discriminant analysis. Multivariate Analysis-IV (P. R. Krishnaiah, ed.), North-Holland, Amsterdam, 523-545.

[21] SRIVASTAVA, M. (2007). Multivariate theory for analyzing high dimensional data. *J. Japan Statist. Soc.*, **37**, no. 1, 53-86.

[22] WYMAN, F. J., YOUNG, D. M. and TURNER, D. W. (1990). A comparison of asymptotic error rate expansions for the sample linear discriminant function. *Pattern Recognition* **23**, 775-783.

[23] YAMADA, T. (2007). Asymptotic properties of the EPMC for the linear classifixation of high-dimensional data when the common covariance is the identity matrix. (submitted).

多変量解析における漸近展開: 微分作用素の使用の観点から

柿沢佳秀 (北海道大学大学院経済学研究科), 岩下登志也 (東京理科大学理工学部)

1. はじめに

近年高次元データ解析と理論が盛んに論じられているが, 本稿では次元数 p を任意に固定する. 文献上で統計量の分布の漸近展開導出のために微分作用素の使用を提示したのは, Welch(1947a,b) による単変量な分散不均一設定が起源とされる. その後 James(1951,1954) が Welch 法を多変量設定に拡張した. Welch-James 法のアイディアは, 統計量が独立な確率行列 $\mathbf{Z}$ と $\mathbf{S}$ の関数 $g(\mathbf{Z},\mathbf{S})$ としてあらわされ, かつ, $\nu\mathbf{S} \sim W_p(\nu,\mathbf{\Sigma})$ を仮定した場合, Siotani et al.(1985; Section 4.5) により以下の形式へまとめられている.

(a) 分布関数について $P[g(\mathbf{Z},\mathbf{S}) \le c] = E_{\mathrm{S}}[P\{g(\mathbf{Z},\mathbf{\Lambda}) \le c|\mathbf{\Lambda}=\mathbf{S}\}]$,

(b) 特性関数について $E[\mathrm{e}^{itg(\mathbf{Z},\mathbf{S})}] = E_{\mathrm{S}}[E(\mathrm{e}^{itg(\mathbf{Z},\mathbf{\Lambda})}|\mathbf{\Lambda}=\mathbf{S})] \equiv E_{\mathrm{S}}[\phi(t:\mathbf{S})]$

はいずれも $\mathbf{S}$ の関数 $f(\mathbf{S})$ の期待値計算に帰着され, もし $f(\mathbf{\Lambda})$ が解析的であればテイラー展開 $f(\mathbf{S}) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}\{(\mathrm{S}-\Sigma)\partial\}}f(\mathbf{\Lambda})|_{\Lambda=\Sigma}$ により, 微分作用素 $\boldsymbol{\partial} = (\frac{1}{2}(1+\delta_{jk})\frac{\partial}{\partial\lambda_{jk}})$ を引数とする積率母関数 $\theta = |\mathbf{I}_p - (2/\nu)\mathbf{\Sigma}\boldsymbol{\partial}|^{-\nu/2}\exp(-\mathbf{\Sigma}\boldsymbol{\partial}) \approx 1 + \frac{1}{\nu}\,\mathrm{tr}\{(\mathbf{\Sigma}\boldsymbol{\partial})^2\}$ を通じて $E[f(\mathbf{S})] = \theta f(\mathbf{\Lambda})|_{\Lambda=\Sigma}$ のように公式化される. この種のアイディアは正規多変量統計量の漸近展開導出 (多くの場合は (b) を有限項で打ち切りそれを反転する) でしばしば使用され, 考察対象のタイプ毎に付随する微分作用素を引数とする積率母関数から公式が作られていることに注意する.

本稿では Welch-James 法を動機とした微分作用素による漸近展開導出法について, 正規多変量線形回帰の線形仮説の3つの統計量 (2節) と W,Z-判別関数 (3節; 丘本先生の結果を中心に) を例にあげて概説する[1]. 最後に, 非正規多変量線形回帰の進展 (4節) について述べる. なお, 漸近展開の正当化については, 独立な確率ベクトルの和に関する Bhattacharya and Rao(1976) を基礎として保証される[2]ことを注意しておく.

取りあげた内容は限定されていることをお断りしたい. また, 執筆者の調査不足で2節から4節に関わる (微分作用素を使用した) 文献が欠落している場合もありますので, その場合はご教授お願いいたします. 紙面の制限から漸近展開の詳細はそれぞれの文献を参照されたい.

[1] 多変量正規の分散推測に関する諸統計量は Wishart 行列の関数となり, 1960 年代から 1970 年代に杉浦, 長尾, 藤越の論文に微分作用素の使用が見られることも記しておく (Bilodeau and Brenner(1999; Section 8.8) には Wishart 行列の固有値の分布の漸近展開について Sugiura の微分作用素があげられている).

[2] 統計量を確率展開したとき, 主要項が線形量である場合は Bhattacharya and Ghosh(1978), 主要項が2次形式量である場合は Chandra and Ghosh(1980) のオリジナル文献, 及び, Skovgaard(1981), Bhattacharya and Denker(1990; Part 1) を参照のこと.

2. 正規多変量線形回帰の線形仮説の T_{LR}, T_{LH}, T_{BNP} の漸近展開

2.1. 正規 MANOVA の線形仮説

正規多変量線形回帰 (あるいは MANOVA) モデル $\mathbf{Y} = \mathbf{X\Theta} + \mathbf{U}$ において線形仮説 $\mathbf{B\Theta} = \mathbf{O}_{r\times p}$ を考える. ここに, 既知な $N \times q$ 計画行列 $\mathbf{X}$ のランクは q, 既知な線形制約の $r \times q$ 行列 $\mathbf{B}$ のランクは $r(\leq q)$, そして $q \times p$ 係数行列 $\mathbf{\Theta}$ は未知母数とする. 正規性 $\mathrm{vec}(\mathbf{U}') \sim N_{pN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{\Sigma})$ すなわち, $\mathbf{U}'$ $(p \times N)$ の i 列を $\mathbf{u}_i$ とおいたとき $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_N \sim$ iid $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ を仮定する. このとき仮説による平方和行列 $\mathbf{H}_Y = \mathbf{Y}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}'\{\mathbf{B}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}'\}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \sim W_p(r, \mathbf{\Sigma})$ (帰無仮説の下) と残差平方和行列 $\mathbf{E}_Y = \mathbf{Y}'\{\mathbf{I}_N - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\}\mathbf{Y} \sim W_p(N-q, \mathbf{\Sigma})$ は独立である. $\mathbf{H}_Y\mathbf{E}_Y^{-1}$ の固有値から定義される 3 つの統計量 (i) Wilks の尤度比 $T_{LR} = -(N-q)\log(|\mathbf{E}_Y|/|\mathbf{E}_Y + \mathbf{H}_Y|)$, (ii) Lawley-Hotelling のトレース $T_{LH} = (N-q)\mathrm{tr}(\mathbf{H}_Y\mathbf{E}_Y^{-1})$, (iii) Bartlett-Nanda-Pillai のトレース $T_{BNP} = (N-q)\mathrm{tr}\{\mathbf{H}_Y(\mathbf{E}_Y + \mathbf{H}_Y)^{-1}\}$ の分布関数を何らかの意味で近似すること, 特に χ^2-漸近展開を求めることは重要である. 3 つの統計量の分布の漸近展開を正規性の下で導出する手法は複数存在する[3)]が, ここでは微分作用素の使用に焦点をおく.

Siotani(1956,1971) と Ito(1956,1960) は独立に Welch-James 法を応用し, T_{LH} の分布の帰無あるいは局所対立仮説の下での漸近展開を次の方針で計算した. T_{LH} の分布論は正準型 (例えば Bilodeau and Brenner(1999; Section 9.3) を参照) で考えたとき 1 節の定式化において $r \times p$ 確率行列 $\mathbf{Z}$ の正規性 $\mathrm{vec}(\mathbf{Z}') \sim N_{rp}(\mathrm{vec}(\mathbf{M}'), \mathbf{I}_r \times \mathbf{\Sigma})$ かつ, $g(\mathbf{Z}, \mathbf{S}) = \mathrm{tr}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Z})$ の場合にほかならず, (b) の特性関数計算は

$$\phi(t:\mathbf{\Lambda}) = \frac{\exp[-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{M}'\mathbf{M}) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\{(\mathbf{\Sigma}^{-1} - 2\mathrm{i}t\mathbf{\Lambda}^{-1})^{-1}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{M}'\mathbf{M}\mathbf{\Sigma}^{-1}\}]}{|\mathbf{\Sigma}|^{r/2}|\mathbf{\Sigma}^{-1} - 2\mathrm{i}t\mathbf{\Lambda}^{-1}|^{r/2}}$$

に対応する. なお, オリジナルの Siotani や Ito の計算は θ の作用に対する摂動法 (James 論文の貢献) によるので, 詳細は文献を読まれたい.

Welch-James 法は $T_{LH} = \mathrm{tr}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Z})$ の特性関数計算に適した方法と言えるが, T_{LR}, T_{BNP} も扱うことができる. 実際, $T_{LR} = -\nu\log(|\nu\mathbf{S}|/|\nu\mathbf{S} + \mathbf{Z}'\mathbf{Z}|)$, $T_{BNP} = \nu\mathrm{tr}\{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\nu\mathbf{S} + \mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\}$ が $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\nu\mathbf{S})^{-1}$ の固有値 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{\min(p,r)} > \lambda_{\min(p,r)+1} = \cdots = \lambda_p = 0$ の滑らかな関数 $\psi(\cdot)$ の和 $T_\psi = \nu\sum_{j=1}^{p}\psi(\lambda_j)$ として定義され[4)], $E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tT_\psi}] \approx E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tT_{LH}}] + \frac{\mathrm{i}t\psi''(0)}{2\nu}E[\mathrm{tr}\{(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{S}^{-1})^2\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tT_{LH}}]$

---

3) Muirhead(1982; Chapter 10), Siotani(1989) などに多くの文献が引用されている. 執筆者の知る限り, Fujikoshi(1970) が局所対立仮説の下で 3 つの統計量の検出力の漸近展開を導出したオリジナルであり, Anderson(1984,2003; Chapter 8) が理論的考察を与えた.

4) 明らかに T_{LR}, T_{LH}, T_{BNP} は $\psi(x) = \log(1+x), x, 1 - 1/(1+x)$ の場合として議論できる. なお, これらの関数 $\psi(x)$ は $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$ を満たすから $T_\psi \approx T_{LH} + \frac{\psi''(0)}{2\nu}\mathrm{tr}\{(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{S}^{-1})^2\}$.

の第２項を追加計算すればよい.

2.2. 正規 GMANOVA の一般化線形仮説

正規多変量一般化線形回帰モデル (GMANOVA の他, Potthoff and Roy(1964) モデル, 成長曲線モデル (GCM) など別名は多い) $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\Xi}\mathbf{A} + \mathbf{U}$ において一般化線形仮説 $\mathbf{B}\boldsymbol{\Xi}\mathbf{C} = \mathbf{O}_{r\times s}$ を考える. ここに, 既知な $N \times q$ 計画行列 $\mathbf{X}$ のランクは q, $m \times p$ 計画行列 $\mathbf{A}$ のランクは $m(\leq p)$, 既知な線形制約の $r \times q$ 行列 $\mathbf{B}$ と $m \times s$ 行列 $\mathbf{C}$ のランクはそれぞれ $r(\leq q)$ と $s(\leq m)$, そして $q \times m$ 係数行列 $\boldsymbol{\Xi}$ は未知母数とする. $\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Sigma}$ の最尤推定量は様々な方法で求められた (詳細は Siotani et al.(1985; Section 7.5), Kollo and von Rosen(2004; Section 4.1.2) などを参照). 特に, Gleser and Olkin(1970) は正準型 $\mathrm{vec}(\mathbf{Z}') \sim N_{pN}(E[\mathrm{vec}(\mathbf{Z}')], \mathbf{I}_N \times \boldsymbol{\Sigma})$,

$$E[\mathbf{Z}] = E\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} \\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{11,r\times(m-s)} & \boldsymbol{\xi}_{12,r\times s} & \mathbf{O}_{r\times(p-m)} \\ \boldsymbol{\xi}_{21,(q-r)\times(m-s)} & \boldsymbol{\xi}_{22,(q-r)\times s} & \mathbf{O}_{(q-r)\times(p-m)} \\ \mathbf{O}_{(N-q)\times(m-s)} & \mathbf{O}_{(N-q)\times s} & \mathbf{O}_{(N-q)\times(p-m)} \end{bmatrix}$$

における $\boldsymbol{\xi}_{12} = \mathbf{O}_{r\times s}$ の尤度比統計量が $T^\circ_{LR} = -(N-q)\log(|\mathbf{E}^\circ|/|\mathbf{E}^\circ + \mathbf{H}^\circ|)$ で与えられることを示した. ここに, $\mathbf{W}_{ij} = \mathbf{Z}'_{3i}\mathbf{Z}_{3j}$ とおくとき $\mathbf{E}^\circ = \mathbf{W}_{22} - \mathbf{W}_{23}\mathbf{W}_{33}^{-1}\mathbf{W}_{32}$, $\mathbf{H}^\circ = (\mathbf{Z}_{12} - \mathbf{Z}_{13}\mathbf{W}_{33}^{-1}\mathbf{W}_{32})'(\mathbf{I}_r + \mathbf{Z}_{13}\mathbf{W}_{33}^{-1}\mathbf{Z}'_{13})^{-1}(\mathbf{Z}_{12} - \mathbf{Z}_{13}\mathbf{W}_{33}^{-1}\mathbf{W}_{32})$. Fujikoshi(1973,1974) は $\mathbf{Z}_{13}$, $\mathbf{W}_{33}$ を条件付けたときの GMANOVA 統計量 T°_{LR}, $T^\circ_{LH} = (N-q)\mathrm{tr}\{\mathbf{H}^\circ(\mathbf{E}^\circ)^{-1}\}$, $T^\circ_{BNP} = (N-q)\mathrm{tr}\{\mathbf{H}^\circ(\mathbf{E}^\circ + \mathbf{H}^\circ)^{-1}\}$ の局所対立仮説 $\boldsymbol{\xi}_{12} \neq \mathbf{O}_{r\times s}$ (より正確には非心行列 $\boldsymbol{\Sigma}_{22\cdot 3}^{-1/2}\boldsymbol{\xi}'_{12}\boldsymbol{\xi}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22\cdot 3}^{-1/2}$ が $O(1)$ である場合) の分布論が MANOVA の非心ケースして扱えることを利用し, $E[\mathrm{e}^{itT^\circ_\#}|\mathbf{Z}_{13}, \mathbf{W}_{33}] \equiv \phi_\#(t : \mathbf{Z}_{13}, \mathbf{W}_{33})$ の期待値計算 $E_{\mathrm{Z}_{13}}E_{\mathrm{W}_{33}}[\phi_\#(t : \mathbf{Z}_{13}, \mathbf{W}_{33})]$ に対して Welch-James 法を適用した. なお, 行列演算から容易に確認できることであるが, 正準型ではなく元のモデルの言葉であらわすとき (i) $T^\circ_{LR} = -(N-q)\log(|\mathbf{E}^\circ_Y|/|\mathbf{E}^\circ_Y + \mathbf{H}^\circ_Y|)$, (ii) $T^\circ_{LH} = (N-q)\mathrm{tr}\{\mathbf{H}^\circ_Y(\mathbf{E}^\circ_Y)^{-1}\}$, (iii) $T^\circ_{BNP} = (N-q)\mathrm{tr}\{\mathbf{H}^\circ_Y(\mathbf{E}^\circ_Y + \mathbf{H}^\circ_Y)^{-1}\}$ に注意する. ここに, $\mathbf{H}^\circ_Y = (\mathbf{B}\widehat{\boldsymbol{\Xi}}_Y\mathbf{C})'(\mathbf{B}\mathbf{R}_Y\mathbf{B}')^{-1}(\mathbf{B}\widehat{\boldsymbol{\Xi}}_Y\mathbf{C})$, $\mathbf{E}^\circ_Y = \mathbf{C}'(\mathbf{A}\mathbf{E}_Y^{-1}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{C}$, $\mathbf{E}_Y = \mathbf{Y}'\{\mathbf{I}_N - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\}\mathbf{Y}$, $\widehat{\boldsymbol{\Xi}}_Y = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{E}_Y^{-1}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{E}_Y^{-1}\mathbf{A}')^{-1}$ 及び,

$$\mathbf{R}_Y = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\{\mathbf{E}_Y^{-1} - \mathbf{E}_Y^{-1}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{E}_Y^{-1}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E}_Y^{-1}\}\mathbf{Y}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}.$$

3. 多変量正規母集団の判別関数の漸近展開 (丘本先生の結果を中心として)

初期標本 $\mathbf{x}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{N_1}^{(1)} \sim$ iid $N_p(\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{x}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)} \sim$ iid $N_p(\boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma})$ が利用される２群 Π_1 と Π_2 のいずれかへ新たに独立に観測された p 変量ベクトル $\mathbf{x}_*$ を判別する問題を考える. なお分散不均一な２群 $\Pi_1 : N_p(\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma}^{(1)})$ と $\Pi_2 : N_p(\boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma}^{(2)})$ の判別, 及び, 平均ベクトルと分散行列

の一部が2群 Π_1 と Π_2 に共通に含まれるなどその他の設定での先行研究もある．下記の2小節は Anderson(1984, 2003; Chapter 6), Siotani et al.(1985, Chapter 9) 及び判別分析のテキストである McLachlan(1992) に基づくが, Siotani(1982) や若木 (1997) も参照されたい．

3.1. W-判別方式

W-判別方式 (Wald(1944), Anderson(1951)) では $W \geq c$ ならば $\mathbf{x}_*$ を Π_1 に判別し, $W < c$ ならば $\mathbf{x}_*$ を Π_2 に判別する．ここに,

$$W = \left[\mathbf{x}_* - \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{x}}^{(1)} + \overline{\mathbf{x}}^{(2)})\right]' \mathbf{S}_{pool}^{-1}(\overline{\mathbf{x}}^{(1)} - \overline{\mathbf{x}}^{(2)})$$

は平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\mu}^{(2)}$ と共通な分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ を既知とした尤度比において $\overline{\mathbf{x}}^{(1)}, \overline{\mathbf{x}}^{(2)}$, $\mathbf{S}_{pool}$ をプラグインして得られる．正規標本論から, $\overline{\mathbf{x}}^{(1)} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma}/N_1)$, $\overline{\mathbf{x}}^{(2)} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma}/N_2)$, $(N_1 + N_2 - 2)\mathbf{S}_{pool} \sim W_p(N_1 + N_2 - 2, \boldsymbol{\Sigma})$ は互いに独立である．Mahalonobis 距離を $\Delta^2 = (\boldsymbol{\mu}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})$ とおく．$N_1, N_2 \to \infty$ のときの一致性 $\overline{\mathbf{x}}^{(1)} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\mu}^{(1)}$, $\overline{\mathbf{x}}^{(2)} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\mu}^{(2)}$, $\mathbf{S}_{pool} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\Sigma}$ から $\mathbf{x}_* \in \Pi_i$ の下では $W \xrightarrow{d} N((-1)^{i+1}\Delta^2/2, \Delta^2)$ となり, 誤判別確率の近似 $P_W(2|1) = P(W < c|\mathbf{x}_* \in \Pi_1) \approx \Phi\{(c - \Delta^2/2)/\Delta\}$, $P_W(1|2) = P(W \geq c|\mathbf{x}_* \in \Pi_2) \approx 1 - \Phi\{(c + \Delta^2/2)/\Delta\}$ が得られる．Okamoto(1963) は標準化された W-統計量 $W' = (W - \Delta^2/2)/\Delta$ の ($\mathbf{x}_* \in \Pi_1$ の下での) 分布関数 $P_{1,2}^{W'}(u; \Delta)$ の漸近展開[5)][6)]の系として $P_W(2|1) = P_{1,2}^{W'}((c - \Delta^2/2)/\Delta; \Delta)$, $P_W(1|2) = 1 - P_{2,1}^{W'}(-(c - \Delta^2/2)/\Delta; \Delta)$ の漸近展開を与えた．

丘本先生の漸近展開導出 (オリジナルは特性関数の反転によるが, Anderson(1973) にて再考察がなされて, 条件付き確率アプローチに従うと 1963 論文の正当化が可能である) のポイントは次のように $\overline{\mathbf{x}}^{(1)}, \overline{\mathbf{x}}^{(2)}, \mathbf{S}$ の期待値計算へ帰着させたことであった．$\mathbf{x}_* \in \Pi_1$ のとき $W|_{\overline{\mathbf{x}}^{(1)}, \overline{\mathbf{x}}^{(2)}, \mathbf{S}} \sim N(\boldsymbol{\mu}^{(1)}_{\overline{\mathbf{x}}^{(1:2)}, \mathbf{S}}, \sigma^2_{\overline{\mathbf{x}}^{(1:2)}, \mathbf{S}})$,

$$\boldsymbol{\mu}^{(1)}_{\overline{\mathbf{x}}^{(1:2)}, \mathbf{S}} = \left[\boldsymbol{\mu}^{(1)} - \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{x}}^{(1)} + \overline{\mathbf{x}}^{(2)})\right]' \mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbf{x}}^{(1)} - \overline{\mathbf{x}}^{(2)}), \ \sigma^2_{\overline{\mathbf{x}}^{(1:2)}, \mathbf{S}} = (\overline{\mathbf{x}}^{(1)} - \overline{\mathbf{x}}^{(2)})'\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbf{x}}^{(1)} - \overline{\mathbf{x}}^{(2)})$$

であるから

$$P_{1,2}^{W'}(u; \Delta) = E_{\overline{\mathbf{x}}^{(1)}, \overline{\mathbf{x}}^{(2)}, \mathbf{S}}\left[\Phi\left(\frac{u + \Delta^2/2 - \mu^{(1)}_{\overline{\mathbf{x}}^{(1:2)}, \mathbf{S}}}{\sigma_{\overline{\mathbf{x}}^{(1:2)}, \mathbf{S}}/\Delta}\right)\right]$$

---

5)Okamoto(1963) は $\overline{\mathbf{x}}^{(1)} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma}/N_1)$, $\overline{\mathbf{x}}^{(2)} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma}/N_2)$, $n\mathbf{S} \sim W_p(n, \boldsymbol{\Sigma})$ が互いに独立であると仮定し, $(N_1 + N_2 - 2)\mathbf{S}_{pool} \sim W_p(N_1 + N_2 - 2, \boldsymbol{\Sigma})$ であるような $\boldsymbol{\Sigma}$ の典型的な不偏推定量 $\mathbf{S}_{pool}$ から定義される判別統計量 W を特殊ケースとして含むような判別統計量 $W^O = \left[\mathbf{x}_* - \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{x}}^{(1)} + \overline{\mathbf{x}}^{(2)})\right]' \mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbf{x}}^{(1)} - \overline{\mathbf{x}}^{(2)})$ を扱ったが, このような設定は 3.2 節での Z-統計量についても同様である．

6)Anderson(1973) は $\widehat{\Delta}^2 = (\overline{\mathbf{x}}^{(1)} - \overline{\mathbf{x}}^{(2)})'\mathbf{S}_{pool}^{-1}(\overline{\mathbf{x}}^{(1)} - \overline{\mathbf{x}}^{(2)})$ により Student 化された W-統計量 $W^{Stu} = (W - \widehat{\Delta}^2/2)/\widehat{\Delta}$ について漸近展開を与え, カットオフ点 c の選択も議論した．

すなわち, $\overline{\mathbf{x}}^{(1)}, \overline{\mathbf{x}}^{(2)}, \mathbf{S}$ の関数 $f(\overline{\mathbf{x}}^{(1)}, \overline{\mathbf{x}}^{(2)}, \mathbf{S})$ の期待値に対する $(N_1^{-2}, N_2^{-2}, n^{-2})$ までの漸近展開公式 $E[f(\overline{\mathbf{x}}^{(1)}, \overline{\mathbf{x}}^{(2)}, \mathbf{S})] = \theta^O f(\boldsymbol{\gamma}^{(1)}, \boldsymbol{\gamma}^{(2)}, \boldsymbol{\Gamma})|_{\gamma^{(1:2)}=\mu^{(1:2)}, \Gamma=\Sigma}$,

$$\begin{aligned}\theta^O &= \mathrm{e}^{\sum_{a=1}^{2} 1/(2N_a)(\partial^{(a)})'\Sigma\partial^{(a)}} |\mathbf{I}_p - (2/n)\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\partial}|^{-n/2} \exp(-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\partial}) \\ &\approx 1 + \sum_{a=1}^{2} \frac{1}{2N_a} (\partial^{(a)})'\Sigma\partial^{(a)} + \frac{1}{n} \mathrm{tr}\{(\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\partial})^2\} \quad (N_1^{-2}, N_2^{-2}, n^{-2}) \text{ 項は 1963 論文を参照)}\end{aligned}$$

(Siotani and Wang(1977) は $(N_1^{-3}, N_2^{-3}, n^{-3})$ までの漸近展開公式へ拡張した) を微分作用素 $\boldsymbol{\partial}^{(1)} = (\frac{\partial}{\partial\gamma_j^{(1)}})$, $\boldsymbol{\partial}^{(2)} = (\frac{\partial}{\partial\gamma_j^{(2)}})$, $\boldsymbol{\partial} = (\frac{1}{2}(1+\delta_{jk})\frac{\partial}{\partial\gamma_{jk}})$ により与え, ベクトル・行列微分を直接計算した. Loh(1997) はリッジ型の判別統計量

$$W_\lambda = \left[\mathbf{x}_* - \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{x}}^{(1)} + \overline{\mathbf{x}}^{(2)})\right]'(\mathbf{S}_{pool} + \lambda\mathbf{I}_p)^{-1}(\overline{\mathbf{x}}^{(1)} - \overline{\mathbf{x}}^{(2)})$$

で $c = 0$ とした場合の誤判別確率の漸近展開を丘本先生の微分作用素 θ^O で求めている.

3.2. LR-判別方式

カットオフ点を 1 とした LR-判別方式 (別名 Z-判別方式) では $Z < 0$ ならば $\mathbf{x}_*$ を Π_1 に判別し, $Z \geq 0$ ならば $\mathbf{x}_*$ を Π_2 に判別する. ここに,

$$Z = \frac{N_1}{N_1+1}(\mathbf{x}_* - \overline{\mathbf{x}}^{(1)})'\mathbf{S}_{pool}^{-1}(\mathbf{x}_* - \overline{\mathbf{x}}^{(1)}) - \frac{N_2}{N_2+1}(\mathbf{x}_* - \overline{\mathbf{x}}^{(2)})'\mathbf{S}_{pool}^{-1}(\mathbf{x}_* - \overline{\mathbf{x}}^{(2)})$$

は $\mathbf{x}_*, \mathbf{x}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{N_1}^{(1)}$ が Π_1 から得られ, かつ, $\mathbf{x}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}$ が Π_2 から得られたという仮説を $\mathbf{x}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{N_1}^{(1)}$ が Π_1 から得られ, かつ, $\mathbf{x}_*, \mathbf{x}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}$ が Π_2 から得られたいう仮説に対して検定する尤度比統計量に由来する. $N_1, N_2 \to \infty$ のときの一致性 $\overline{\mathbf{x}}^{(1)} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\mu}^{(1)}$, $\overline{\mathbf{x}}^{(2)} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\mu}^{(2)}$, $\mathbf{S}_{pool} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\Sigma}$ から, $Z \xrightarrow{d} (\mathbf{x}_* - \boldsymbol{\mu}^{(1)})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_* - \boldsymbol{\mu}^{(1)}) - (\mathbf{x}_* - \boldsymbol{\mu}^{(2)})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_* - \boldsymbol{\mu}^{(2)})$ すなわち, $\mathbf{x}_* \in \Pi_i$ の下では $Z \xrightarrow{d} N((-1)^i\Delta^2, 4\Delta^2)$ となり, 誤判別確率の近似 $P_Z(2|1) = P(Z \geq 0|\mathbf{x}_* \in \Pi_1) \approx \Phi(-\Delta/2)$, $P_Z(1|2) = P(Z > 0|\mathbf{x}_* \in \Pi_2) \approx \Phi(-\Delta/2)$ が得られる. Memon and Okamoto(1971) と Siotani and Wang(1977) による標準化された Z-統計量 $Z' = (Z + \Delta^2)/(2\Delta)$ の ($\mathbf{x}_* \in \Pi_1$ の下での) 分布関数 $P_{1,2}^{Z'}(u; \Delta)$ の漸近展開[7]の導出も 1963 論文の枠組みで行われた. すなわち, 条件付き特性関数 $E[\mathrm{e}^{itZ'}|_{\overline{\mathbf{x}}^{(1)}, \overline{\mathbf{x}}^{(2)}, \mathbf{S}}]$ を経由して, 微分作用素 θ^O から $E[\mathrm{e}^{itZ'}]$ の漸近展開を求め, それを (形式的に) 反転した.

[7] Fujikoshi and Kanazawa(1976) は Student 化された Z-統計量 $Z^{Stu} = (Z + \widehat{\Delta}^2)/(2\widehat{\Delta})$ について漸近展開を与えた.

4. 非正規多変量母集団の平均推測[8]の漸近展開: 微分作用素アプローチ

4.1. Hotelling の T^2

単純モデル $\mathbf{y}_j = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{u}_j$, $j = 1, \ldots, N$, の平均ベクトルの検定 $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ に関する Hotelling の T^2 統計量でさえも漸近展開が非正規性の下で文献上に議論されたのは 1990 年代である[9]. 母集団分布に関係なく不偏な標本分散行列 $\mathbf{S}_Y$ が $V[\mathbf{u}_1] \equiv \boldsymbol{\Sigma}$ に確率収束するとき, $T^2 = N(\overline{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\mathbf{S}_Y^{-1}(\overline{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}_0)$ は Slutsky の定理と中心極限定理によりカイ 2 乗分布へ法則収束する. 漸近的ロバスト性は T^2 を大標本で使用する伝統的な理由の 1 つであったが, 近年の Owen の経験尤度法の枠組みにより, T^2 を Euclidian EL として特徴づけることもできる (Owen(2001; Chapter 3,4)).

ところで, Kano(1995; $N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{u}_i', \{\mathrm{vech}(\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i' - \boldsymbol{\Sigma})\}')'$ の Edgeworth 展開に関する積分計算) と Fujikoshi(1997; Student 化された $\mathbf{S}_Y^{-1/2}N^{1/2}(\overline{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}_0)$ の 4 次までのキュムラント計算) の方法は局所対立仮説 $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 + N^{-1/2}\boldsymbol{\varepsilon}$ でも可能だろうが, ここでは執筆者が統計学会 (1996, 1998)・数学会 (1999 春) にてアナウンスした微分作用素アプローチ (Kakizawa and Iwashita(2008a)) を導入する. 以下の補題[10]は $N^{1/2}\overline{\mathbf{u}}$ と $\mathbf{S}_U$ の多項式 (統計量の確率展開を考えることから多項式の仮定は本質的でない) の特性関数について適用される. 大雑把にはテイラー展開[11] $\mathrm{e}^{ith(N^{1/2}\overline{\mathbf{u}}, \mathbf{S}_U)} = \mathrm{e}^{(\boldsymbol{\partial}^{(1)})'N^{1/2}\overline{\mathbf{u}} + \mathrm{tr}\{(\mathbf{S}_U - \Sigma)\boldsymbol{\partial}\}}\mathrm{e}^{ith(\gamma,\Gamma)}|_{\gamma=0,\Gamma=\Sigma}$ により, 微分作用素 $\boldsymbol{\partial}^{(1)} = (\frac{\partial}{\partial\gamma_j})$, $\boldsymbol{\partial} = (\frac{1}{2}(1 + \delta_{jk})\frac{\partial}{\partial\gamma_{jk}})$ を引数とする積率母関数を通じて公式化されるが, 非正規性の下では積率母関数が必ずしも存在しないため, この点を確率ベクトル $\mathbf{u}_j$ のトランケーションから克服する必要がある.

補題 1 (Kakizawa and Iwashita(2008a; Theorem 1)) 平均ベクトル $\mathbf{0}$, 分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ をもつ誤差確率ベクトル $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_p)'$ の 3 次・4 次キュムラントを $\kappa_{j_1,j_2,j_3}, \kappa_{j_1,j_2,j_3,j_4}$ とするとき

$$E[\exp\{\mathrm{i}h(N^{1/2}\overline{\mathbf{u}}, \mathbf{S}_U)\}] = \Theta(\boldsymbol{\partial}^{(1)}, \boldsymbol{\partial}; N)\exp\{\mathrm{i}h(\boldsymbol{\gamma}, \Gamma)\}\Big|_{\gamma=0,\Gamma=\Sigma} + \mathrm{o}(N^{-1}).$$

---

[8]非正規で分散推測を考えた場合, 正規性の下に提案された統計量を使うと極限分布でさえも母集団分布に依存する (通常は自由度 1 のカイ 2 乗の重み付き和になる). これを回避するためには標本分散行列に基づく Wald 型検定を考えねばいけない (Browne(1984) はこれを ADF 検定と呼んでいる).

[9]楕円分布の Iwashita(1997) は局所対立仮説, 一般分布の Kano(1995), Fujikoshi(1997) は帰無仮説を扱ったが, 経験尤度のノンパラメトリックな枠組みで Chen(1994) が局所対立仮説で漸近展開を考察した (Chen は係数整理をしておらず, 最終結果へ至る追加の計算が必要である上に, キュムラント計算でさえも誤りがあるようだ).

[10]標本平均ベクトルのみ $N^{1/2}$ の規準化を行う点がトリックである.

[11]Welch-James 法は正規多変量推測でしばしば適用されたが, その背後には Cochran の定理があり, 独立な正規行列と Wishart 行列の関数あるいは複数の独立な Wishart 行列の関数として記述される場合には, 条件付き期待値を経由して Wishart 行列に関する期待値計算へ帰着させることができた. 一方, 非正規母集団ではこれらの事実は一般に成り立たず, Wishart 分布が登場することも稀である. 従って, 一般の非正規母集団については Welch-James のような条件付き期待値をとるステップを外して考える.

ここに, $\Theta(\boldsymbol{\partial}^{(1)},\boldsymbol{\partial};N)=\Theta_0\Big[1+\frac{1}{N^{1/2}}\Theta_1+\frac{1}{N}\Big\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma\partial\Sigma\partial})+\Theta_2+\frac{1}{2}\Theta_1^2\Big\}\Big]$,

$$\Theta_0=\exp\Big(\frac{1}{2}\boldsymbol{\partial}^{(1)\prime}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\partial}^{(1)}\Big),\quad \Theta_1=\sum_{j_1j_2j_3=1}^{p}\kappa_{j_1,j_2,j_3}\Big(\partial_{j_1j_2}\partial_{j_3}+\frac{1}{6}\partial_{j_1}\partial_{j_2}\partial_{j_3}\Big),$$

$$\Theta_2=\frac{1}{2}\sum_{j_1j_2j_3j_4=1}^{p}\kappa_{j_1,j_2,j_3,j_4}\Big(\partial_{j_1j_2}\partial_{j_3j_4}+\partial_{j_1j_2}\partial_{j_3}\partial_{j_4}+\frac{1}{12}\partial_{j_1}\partial_{j_2}\partial_{j_3}\partial_{j_4}\Big).$$

後の小節についての計算も類似のパターンに帰着させられるため, 局所対立仮説での

$$\begin{aligned}T^2&=(N^{1/2}\bar{\mathbf{u}}+\varepsilon)'\mathbf{S}_U^{-1}(N^{1/2}\bar{\mathbf{u}}+\varepsilon)\\&\approx(N^{1/2}\bar{\mathbf{u}}+\varepsilon)'[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}-\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{S}_U-\boldsymbol{\Sigma})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}+\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\{(\mathbf{S}_U-\boldsymbol{\Sigma})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\}^2](N^{1/2}\bar{\mathbf{u}}+\varepsilon)\\&\equiv H(N^{1/2}\bar{\mathbf{u}}+\varepsilon,\mathbf{S}_U)\end{aligned}$$

を典型例として, 計算工夫点を紹介する. 補題 1 によれば $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH(\gamma+\varepsilon,\Gamma)}$ をベクトル・行列微分するのだが, 実際には次の 2 つの性質を利用し Q-関数 $Q_{j_1\cdots j_v}(\varphi)$ を整理するだけでよい.

性質 1 (Kakizawa and Iwashita(2008a; Lemma B1))

$$\partial_{j_1j_2}\exp\{\mathrm{i}tH(\gamma+\varepsilon,\boldsymbol{\Gamma})\}\Big|_{\Gamma=\Sigma}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Big(\sigma^{j_1j_2}-\dfrac{\partial_{j_1}\partial_{j_2}}{2\mathrm{i}t}\Big)\exp\{\mathrm{i}t(\gamma+\varepsilon)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\gamma+\varepsilon)\}, & t\neq 0\\ 0, & t=0,\end{cases}$$

$$\partial_{j_1j_2}\partial_{j_3j_4}\exp\{\mathrm{i}tH(\gamma+\varepsilon,\boldsymbol{\Gamma})\}\Big|_{\Gamma=\Sigma}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\Big[-(\sigma^{j_1j_3}\sigma^{j_2j_4}+\sigma^{j_1j_4}\sigma^{j_2j_3})+\Big(\sigma^{j_1j_2}-\dfrac{\partial_{j_1}\partial_{j_2}}{2\mathrm{i}t}\Big)\Big(\sigma^{j_3j_4}-\dfrac{\partial_{j_3}\partial_{j_4}}{2\mathrm{i}t}\Big)\Big] & \\ \times\exp\{\mathrm{i}t(\gamma+\varepsilon)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\gamma+\varepsilon)\}, & t\neq 0\\ 0, & t=0.\end{cases}$$

性質 1 により, $\Theta(\boldsymbol{\partial}^{(1)},\boldsymbol{\partial};N)$ の作用の中で行列微分を先に行えば, ベクトル微分だけが残されるが, これについて次の結果を利用できる (証明のアイディアは無限回の微分作用素 Θ_0 は正規分布に関する期待値にほかならず, 従って正規分布の積分計算に帰着させることができる).

性質 2 (Kakizawa and Iwashita(2008a; Proposition 2))

$$\begin{aligned}&\exp\Big\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\partial}^{(1)})'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\partial}^{(1)}\Big\}\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_v}\exp\{\mathrm{i}t(\gamma+\varepsilon)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\gamma+\varepsilon)\}\Big|_{\gamma=0}\\&=(1-2\mathrm{i}t)^{-p/2}\exp\Big(\frac{\mathrm{i}t\varepsilon'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\varepsilon}{1-2\mathrm{i}t}\Big)Q_{j_1\cdots j_v}\Big(\varepsilon;\frac{\mathrm{i}t}{1-2\mathrm{i}t}\Big)\quad(v\in\mathbf{N}).\end{aligned}$$

ここに, $\varphi=(1-2\mathrm{i}t)^{-1}$ とおくと, $v=2\ell(\neq 0)$, $2\ell+1$ の場合の $Q_{j_1\cdots j_v}\{\varepsilon;\mathrm{i}t/(1-2\mathrm{i}t)\}$ は

$$Q_{j_1\cdots j_v}(\varphi)=\sum_{h=0}^{\ell}(\varphi-1)^{v-h}\Big\langle\frac{v!}{2^hh!(v-2h)!}\Big\rangle_{2^h|1^{v-2h}}\sigma^{j_1j_2}\cdots\sigma^{j_{2h-1}j_{2h}}[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\varepsilon]_{j_{2h+1}}\cdots[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\varepsilon]_{j_v}$$

で与えられる.

4.2. 非正規1元配置 MANOVA の平均ベクトル同等性

非正規多変量1元配置分散分析モデル $\mathbf{y}_i^{(a)} = \boldsymbol{\mu}^{(a)} + \mathbf{u}_i^{(a)}$, $a = 1,\ldots,q$; $i = 1,\ldots,N_a$, において平均ベクトル同等性 $\boldsymbol{\mu}^{(1)} = \cdots = \boldsymbol{\mu}^{(q)}$ の検定を考える. 分散均一の場合の統計量は郡内平方和行列 $\mathbf{W}_Y = \sum_{a=1}^{q}(N_a-1)\mathbf{S}_Y^{(a)}$ と群間平方和行列 $\mathbf{B}_Y = \sum_{a=1}^{q} N_a(\bar{\mathbf{y}}^{(a)}-\bar{\mathbf{y}})(\bar{\mathbf{y}}^{(a)}-\bar{\mathbf{y}})'$ を定義するとき, $\mathbf{B}_Y\mathbf{W}_Y^{-1}$ の固有値 $\lambda_{Y,1} \geq \cdots \geq \lambda_{Y,\min(p,q)} > \lambda_{Y,\min(p,q)+1} = \cdots = \lambda_{Y,p} = 0$ の関数により $T_\psi = (N-q)\sum_{j=1}^{p}\psi(\lambda_{Y,j})$ として定義される. ここに, N は標本数 $\sum_{a=1}^{q} N_a$ である. 一方, 分散不均一の場合には $\bar{\mathbf{y}}^* = \mathrm{vec}([\bar{\mathbf{y}}^{(1)}-\bar{\mathbf{y}}^{(q)},\ldots,\bar{\mathbf{y}}^{(q-1)}-\bar{\mathbf{y}}^{(q)}])$ 及び,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}_Y^{-1} &= \mathrm{diag}(\widetilde{\mathbf{W}}_Y^{(1)},\ldots,\widetilde{\mathbf{W}}_Y^{(q-1)}) \\
&\quad -\mathrm{diag}(\widetilde{\mathbf{W}}_Y^{(1)},\ldots,\widetilde{\mathbf{W}}_Y^{(q-1)})\{(\mathbf{1}_{q-1}\mathbf{1}_{q-1}')\otimes\widetilde{\mathbf{W}}_Y^{-1}\}\mathrm{diag}(\widetilde{\mathbf{W}}_Y^{(1)},\ldots,\widetilde{\mathbf{W}}_Y^{(q-1)})
\end{aligned}
$$

を定義するとき James(1954; (7·3) (7·5) (7·18)) が統計量 $T_J = (N^{1/2}\bar{\mathbf{y}}^*)'\mathbf{V}_Y^{-1}(N^{1/2}\bar{\mathbf{y}}^*)$ を用いた. ここに, $\widetilde{\mathbf{W}}_Y^{(a)} = (N_a/N)(\mathbf{S}_Y^{(a)})^{-1}$. これらの統計量は正規性の下で提案されたが, Slutsky の定理と中心極限定理から漸近的にカイ2乗分布する (ロバスト性をもつ) ことが容易に分かる. Kakizawa and Iwashita(2008b) と Kakizawa(2007) は分散均一の場合の MANOVA 統計量と分散不均一の場合の James 統計量の分布の (局所対立仮説の下での) 漸近展開[12]を微分作用素アプローチから求めることに成功した.

4.3. 非正規多変量線形回帰の線形仮説

4.3.1. 非正規 MANOVA の線形仮説

4.2 節は非正規多変量線形回帰モデル $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\Theta} + \mathbf{U}$ の線形仮説 $\mathbf{B}\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{O}_{r\times p}$ で $\mathbf{X},\boldsymbol{\Theta},\mathbf{B},r$ を $\mathbf{X}_{\text{one-way}} = \bigoplus_{a=1}^{q}\mathbf{1}_{N_a}$, $\boldsymbol{\Theta}_{\text{one-way}}' = [\boldsymbol{\mu}^{(1)},\ldots,\boldsymbol{\mu}^{(q)}]$, $\mathbf{B}_{\text{one-way}} = [\mathbf{I}_{q-1}, -\mathbf{1}_{q-1}]$, $r_{\text{one-way}} = q-1$ とした場合であったから, Wakaki et al.(2002) は 2.1 節に与えた MANOVA 統計量 T_ψ の分布の漸近展開を非正規, かつ, 帰無仮説の下で脚注 12 の継続として求めた. また, 回帰係数行列が $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}_0 + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1/2}\boldsymbol{\Theta}_\varepsilon$ (但し, $\mathbf{B}\boldsymbol{\Theta}_0 = \mathbf{O}_{r\times p}$ と $\mathbf{B}\boldsymbol{\Theta} \neq \mathbf{O}_{r\times p}$ を仮定する) であるような局所対立仮説の下での検出力比較を柿沢が統計学会 (2006) で考察した.

微分作用素アプローチは非正規 MANOVA に対しても以下のように扱うことができる. まず,

---

[12] 非正規かつ帰無仮説について, 単変量設定で Fujikoshi et al.(1999), Yanagihara(2000), 多変量設定で Fujikoshi(2002a,b), Gupta et al.(2006) が T_{LR}, T_{LH}, T_{BNP}, T_J, Rao の U-統計量の分布の漸近展開を求めている. これらの導出方法は, 初期において標本平均と標本分散の Edgeworth 展開に関する積分計算を経由していたようであるが, Iwashita and Seo(2002) を動機とし近年は分散行列に関わる計算のみ同時特性関数を部分的に微分する計算工夫がみられる.

$\dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1/2}\mathbf{B}'\{\mathbf{B}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}'\}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1/2}$ はランク r の巾等行列であるから, スペクトル分解 $\dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{V}}^{(1:r)}(\dot{\mathbf{V}}^{(1:r)})'$ をもつ (なお, $\dot{\mathbf{V}} = [\dot{\mathbf{V}}^{(1:r)}, \dot{\mathbf{V}}^{(r+1,q)}]$ は $q \times q$ 直交行列である). さらに, $\mathbf{\Sigma}$ の不偏推定量 $\widehat{\mathbf{\Sigma}}_Y = \mathbf{E}_Y/(N-q)$ の位置不変性 $\widehat{\mathbf{\Sigma}}_Y = \widehat{\mathbf{\Sigma}}_U$ 及び, 上記の局所対立仮説の下での変形 $\mathbf{H}_Y = [\mathbf{U}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1/2} + \mathbf{\Theta}'_\varepsilon]\dot{\mathbf{M}}[\quad]'$ により, $p \times r$ 確率行列 $\mathbf{U}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1/2}\dot{\mathbf{V}}^{(1:r)} \equiv [\widetilde{\mathbf{z}}_U^{(1)}, \ldots, \widetilde{\mathbf{z}}_U^{(r)}]$ と $\widehat{\mathbf{\Sigma}}_U = \frac{1}{N-q}\{\mathbf{U}'\mathbf{U} - \mathbf{U}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{U}\}$ の期待値公式[13)]を考えればよい. 特に, $\dot{\boldsymbol{\delta}}_\mathcal{E}^{(1:r)} = \mathbf{\Theta}'_\varepsilon\dot{\mathbf{V}}^{(1:r)}$ とおくとき, $T_{LH} = \mathrm{tr}(\mathbf{H}_Y\widehat{\mathbf{\Sigma}}_Y^{-1})$ については局所対立仮説で $T_{LH} \approx \sum_{b=1}^r H(\widetilde{\mathbf{z}}_U^{(b)} + \dot{\boldsymbol{\delta}}_\mathcal{E}^{(b)}, \widehat{\mathbf{\Sigma}}_U)$.

4.3.2. 非正規 GMANOVA の一般化線形仮説

4.3.1 節は非正規多変量一般化線形回帰モデル $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{\Xi}_{q\times m}\mathbf{A}_{m\times p} + \mathbf{U}$ における一般化線形仮説 $\mathbf{B}\mathbf{\Xi}_{q\times m}\mathbf{C}_{m\times s} = \mathbf{O}_{r\times s}$ で $\mathbf{A} = \mathbf{C} = \mathbf{I}_p$, $m = p = s$ とした場合であるが, $\mathbf{A}_{m\times p}$ が $m < p$ なる非正方行列でランク m をもつときは $\mathbf{\Xi}, \mathbf{\Sigma}$ の (正規性の下での) 最尤推定量は $\mathbf{E}_Y^{-1}$ を含んでおり, 2.2 節の最後に書き直した GMANOVA 統計量 T_ψ° は 2.1 節の MANOVA 統計量 T_ψ と全く異なる定義に至る. Yanagihara(2001) はこれらの統計量の分布の漸近展開を非正規, かつ, 帰無仮説の下で脚注 12 の継続として求めている. Kanda(1994) は正規性の下で, Kleinbaum(1973) の Wald 型統計量 $T_W^\bullet = (N-q)\mathrm{tr}[\mathbf{H}_Y^{(0)}(\mathbf{E}_Y^\circ)^{-1}]$ の分布の漸近展開を求めていたから, Fujikoshi(1974) の正規性かつ局所対立仮説での漸近展開を動機として次のような GMANOVA 統計量のクラス[14)]を考える: $T_{(\psi,d)} = (N-q)\sum_{j=1}^s \psi(\lambda_{Y,j}^{(d)})$. ここに, 固定された実数 $d \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_Y^{(d)} &\equiv (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + d(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\{\mathbf{E}_Y^{-1} - \mathbf{E}_Y^{-1}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{E}_Y^{-1}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E}_Y^{-1}\}\mathbf{Y}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\
&= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \frac{d}{N-q}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\{\widehat{\mathbf{\Sigma}}_Y^{-1} - \widehat{\mathbf{\Sigma}}_Y^{-1}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\widehat{\mathbf{\Sigma}}_Y^{-1}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A}\widehat{\mathbf{\Sigma}}_Y^{-1}\}\mathbf{Y}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}, \\
\mathbf{H}_Y^{(d)} &= (\mathbf{B}\widehat{\mathbf{\Xi}}_Y\mathbf{C})'(\mathbf{B}\mathbf{R}_Y^{(d)}\mathbf{B}')^{-1}(\mathbf{B}\widehat{\mathbf{\Xi}}_Y\mathbf{C})
\end{aligned}$$

を定義したとき, $\lambda_{Y,1}^{(d)}, \ldots, \lambda_{Y,s}^{(d)} \geq 0$ は $\mathbf{H}_Y^{(d)}(\mathbf{E}_Y^\circ)^{-1}$ の固有値である.

非正規かつ係数行列が $\mathbf{\Xi} = \mathbf{\Xi}_0 + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1/2}\mathbf{\Xi}_\varepsilon$ (但し, $\mathbf{B}\mathbf{\Xi}_0\mathbf{C} = \mathbf{O}_{r\times s}$ と $\mathbf{B}\mathbf{\Xi}\mathbf{C} \neq \mathbf{O}_{r\times s}$ を仮定する) であるような局所対立仮説の下での $T_{(\psi,d)}$ に基づく検定の検出力について $d \geq 0$ と $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$ を満たす滑らかな関数 $\psi(x)$, 及び, 非正規性の影響を調べることは重要である. 位置不変性 $\mathbf{E}_Y^\circ = \mathbf{E}_U^\circ$, $\mathbf{R}_Y^{(d)} = \mathbf{R}_U^{(d)}$ と局所対立仮説の下での変形 $\mathbf{B}\widehat{\mathbf{\Xi}}_Y\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1/2}\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1/2}\mathbf{X}'\mathbf{U} +$

---

13) 条件 $\mathbf{B}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{1}_N = \mathbf{0}_{r\times 1}$ が満たされる場合に微分作用素公式は簡略化され, その結果として漸近展開にあらわれる係数の多くはゼロになることが分かる. なお, 同じ条件の下で Yanagihara(2007) は非正規 GMANOVA における (正規性の下に提案された) 3 種類の統計量の平均の意味での Bartlett ファクターのロバストネスを考察している.

14) $\mathbf{A}_{m\times p}$ が正方かつ正則である場合は任意の $d \geq 0$ に対し $\mathbf{H}_Y^{(d)} = \mathbf{H}_Y^{(0)}$ となっており d の導入に意味はないが, 一般の GMANOVA では d の影響を調べることは重要である. なお, $T_\psi^\circ = T_{(\psi,1)}$, $T_W^\bullet = T_{(LH,0)}$ が先行研究で提案された.

$\Xi_\varepsilon \mathbf{A}\}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_U^{-1}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_U^{-1}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{C}$ に注意し, $T_{(\psi,d)}$ を (かなり煩雑ではあるが) 確率展開する:

$$T_{(\psi,d)} \approx \sum_{b=1}^{r}(\widetilde{\mathbf{z}}_U^{(b)} + \dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathcal{E}}^{\circ(b)})'\Big\{\mathbf{Q}^{\Sigma} + \mathbf{F}(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_U) + \frac{1}{N}\mathbf{F}_{\psi''(0),d}(\widetilde{\mathbf{z}}_U^{(1:r)} + \dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathcal{E}}^{\circ(1:r)}, \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_U)\Big\}(\widetilde{\mathbf{z}}_U^{(b)} + \dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathcal{E}}^{\circ(b)})$$

($d=1$, かつ, 帰無仮説の場合は Yanagihara(2001) と一致する). ここに, $\mathbf{F}, \mathbf{F}_{\psi''(0),d}$ は

$$\mathbf{P}^{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}^{-1},$$

$$\mathbf{Q}^{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{C}\{\mathbf{C}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{C}\}^{-1}\mathbf{C}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$$

に依存した行列関数であり, $(\Xi_\varepsilon \mathbf{A})'\dot{\mathbf{V}}^{(1:r)} = \dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathcal{E}}^{\circ(1:r)}$ とおく. $T_W^{\bullet}$ でさえも $\mathbf{Q}^{\widehat{\Sigma}_U}$ の項が含まれているため確率展開は複雑にならざるをえないが, $\widetilde{\mathbf{z}}_U^{(1:r)}, \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_U$ の多項式の特性関数計算へ帰着させることができた. その際に使用する微分作用素公式は MANOVA ケースと同じであるが, 性質 2 はランク落ちの 2 次形式版へ拡張されたことを記しておく.

4.4. 検出力比較

4.3.2 節の帰無分布について $\Pr[T_{(\psi,d)} \le CF(x)|H] = G_{rs}(x) + \mathrm{o}(N^{-1})$ となる Cornish-Fisher 型展開 $CF(x) = x\{1 + (2/N)\sum_{j=1}^{3} c_j x^{j-1}\}$, 及び, $\Pr[B(T_{(\psi,d)}) \le x|H] = G_{rs}(x) + \mathrm{o}(N^{-1})$ となる Bartlett 型変換 $B(x) = x\{1 - (2/N)\sum_{j=1}^{3} c_j x^{j-1}\}$ (なお c_j は $\psi''(0), d$ と母集団分布の分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$, 3 次・4 次キュムラントに依存する) が得られ, これらの N^{-1} の漸近展開に基づく次の 2 つの (ψ,d)-検定を考える. $B_{(\psi,d)}$-検定では $\widehat{B}(T_{(\psi,d)}) > \chi^2_{rs,\alpha}$ のとき帰無仮説を棄却し, $CF_{(\psi,d)}$-検定では $T_{(\psi,d)} > \widehat{CF}(\chi^2_{rs,\alpha})$ のとき帰無仮説を棄却する. このとき, 局所対立仮説の下での一般化線形仮説の検定の検出力について以下の結論[15]が柿沢により統計学会 (2006; $d=1$ に制限) とその後の $d \ge 0$ を導入した追加計算で示され, 藤越 (2003) の 2.4 節の "個人的チャレンジ"の一部が解決された.

定理 2 (1 元配置モデル (Kakizawa and Iwashita(2008b)) の GMANOVA 版)

(i) $B_{(\psi,d)}$-検定の局所検出力 $\beta_N^{\mathrm{B}}(\alpha:\psi,d)$ は $CF_{(\psi,d)}$-検定の局所検出力 $\beta_N^{\mathrm{CF}}(\alpha:\psi,d)$ と N^{-1} まで一致する. (ii) (ψ,d_1)-検定の局所検出力は (ψ,d_2)-検定の局所検出力と N^{-1} まで一致する. 従って, N^{-1} の局所検出力は $d \ge 0$ に依存しない. (iii) 局所検出力の差

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} N\{\beta_N^{\mathrm{CF}}(\alpha:\psi_2,d) - \beta_N^{\mathrm{CF}}(\alpha:\psi_1,d)\} &= \lim_{N\to\infty} N\{\beta_N^{\mathrm{B}}(\alpha:\psi_2,d) - \beta_N^{\mathrm{B}}(\alpha:\psi_1,d)\}\\ &= \frac{\psi_2''(0) - \psi_1''(0)}{2}\Big[\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Omega}_\circ^2) - \frac{r+s+1}{rs+2}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Omega}_\circ)\}^2\Big] g_{rs+8}\{\chi^2_{rs,\alpha}; \mathrm{tr}(\boldsymbol{\Omega}_\circ)\}\end{aligned}$$

[15] 正規性の下での Anderson(1984,2003; Chapter 8), 及び, Fujikoshi(1988) による MANOVA 統計量の臨界点調整後の検出力比較を非正規 GMANOVA へ拡張し, かつ, 1990 年代に議論された Bartlett 型調整 (Cordeiro and Ferrari(1991), Kakizawa(1996)) 後の検出力も検討した.

は分布に無関係である．ここに，非心行列は $\mathbf{\Omega}_\circ = \mathbf{Q}^\Sigma(\Xi_\epsilon \mathbf{A})'(\lim_{N\to\infty}\dot{\mathbf{M}})(\Xi_\epsilon \mathbf{A})\mathbf{Q}^\Sigma \mathbf{\Sigma}$.

誤差項を対数正規とする MANOVA の数値実験から, T_{LH} については多項式 $B(x)$ の非単調性が検出力損失の原因となる (Cordeiro and Ferrari(1991) による Bartlett 型統計量は非単調性のために帰無仮説から離れるほど負になる傾向が強い) ことが分かっており, 検出力回復の策として単調な Bartlett 型調整 (Kakizawa(1996)) の使用が不可欠である.

参考文献

[1] Anderson, T.W. (1951). *Psychometrika* **16** 31–50.

[2] Anderson, T.W. (1973). *Ann. Statist.* **1** 964–972.

[3] Anderson, T.W. (1984, 2003). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, 2nd/3rd ed.

[4] Bhattacharya, R. and Denker, M. (1990). *Asymptotic Statistics.*

[5] Bhattacharya, R.N. and Ghosh, J.K. (1978). *Ann. Statist.* **6** 434–451. Correction: (1980). **8** 1399.

[6] Bhattacharya, R.N. and Rao, R.R. (1976). *Normal Approximation and Asymptotic Expansions.*

[7] Bilodeau, M. and Brenner, D. (1999). *Theory of Multivariate Statistics.*

[8] Browne, M.W. (1984). *British J. Math. Statist. Psych.* **37** 62–83.

[9] Chandra, T.K. and Ghosh, J.K. (1980). *Sankhyā* **42** 170–184.

[10] Chen, S.X. (1994). *J. Mult. Anal.* **51** 277–293.

[11] Cordeiro, G.M. and Ferrari, S.L.P. (1991). *Biometrika* **78** 573–582.

[12] Fujikoshi, Y. (1970). *J. Sci. Hiroshima Univ.* **34** 73–144.

[13] Fujikoshi, Y. (1973). *Ann. Statist.* **1** 388–391.

[14] Fujikoshi, Y. (1974). *Ann. Inst. Statist. Math.* **26** 289–297.

[15] Fujikoshi, Y. (1997). *J. Mult. Anal.* **61** 187–193.

[16] Fujikoshi, Y. (2002a). *J. Statist. Plan. Inf.* **108** 263–282.

[17] Fujikoshi, Y. (2002b). *Calcutta Statist. Assoc. Bulletin* **52** 1–46.

[18] 藤越康祝. (2003). 日本統計学会誌 **33** 273–306.

[19] Fujikoshi, Y. and Kanazawa, M. (1976). In: *Essays in Probability and Statistics* pp.305–320.

[20] Fujikoshi, Y., Ohmae, M. and Yanagihara, H. (1999). *J. Japan. Statist. Soc.* **29** 147–161.

[21] Gleser, L.J. and Olkin, I. (1970). In: *Essays in Probability and Statistics* pp.267–292.

[22] Gupta, A.K., Xu, J. and Fujikoshi, Y. (2006). *J. Mult. Anal.* **97** 492–513.

[23] Ito, K. (1956). *Ann. Math. Statist.* **27** 1091–1105.

[24] Ito, K. (1960). *Ann. Math. Statist.* **31** 1148–1153.

[25] Iwashita, T. (1997). *J. Statist. Plan. Inf.* **61** 85–104.

[26] Iwashita, T. and Seo, T. (2002). *J. Statist. Plan. Inf.* **104** 403–416.

[27] James, G.S. (1951). *Biometrika* **38** 324–329.

[28] James, G.S. (1954). *Biometrika* **41** 19–43.

[29] Kakizawa, Y. (1996). *Biometrika* **83** 923–927.

[30] Kakizawa, Y. (2007). To appear in *J. Japan Statist. Soc.*

[31] Kakizawa, Y. and Iwashita, T. (2008a). To appear in *J. Statist. Plan. Inf.*

[32] Kakizawa, Y. and Iwashita, T. (2008b). To appear in *J. Mult. Anal.*

[33] Kanda, T. (1994). *Hiroshima Math. J.* **24** 135–176.

[34] Kano, Y. (1995). *Amer. J. Math. Management Sciences* **15** 317–341.

[35] Kleinbaum, D.G. (1973). *J. Mult. Anal.* **3** 117–124.

[36] Kollo, T. and von Rosen, D. (2005). *Advanced Multivariate Statistics with Matrices.*

[37] Loh, W.L. (1997). *J. Mult. Anal.* **62** 169–180.

[38] McLachlan, G.J. (1992). *Discriminant Analysis and Statistical Pattern Recognition.*

[39] Memon, A.Z. and Okamoto, M. (1971). *J. Mult. Anal.* **1** 294–307.

[40] Muirhead, R.J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory.*

[41] Okamoto, M. (1963). *Ann. Math. Statist.* **34** 1286–1301. Correction: (1968). **39** 1358–1359.

[42] Owen, A.B. (2001). *Empirical Likelihood.*

[43] Potthoff, R.F. and Roy, S.N. (1964). *Biometrika* **51** 313–326.

[44] Siotani, M. (1956). *Ann. Inst. Statist. Math.* **8** 1–14.

[45] Siotani, M. (1971). *Ann. Math. Statist.* **42** 560–571.

[46] Siotani, M. (1982). In: *Handbook of Statistics, Vol.2* pp.61–100.

[47] Siotani, M. (1989). *Amer. J. Math. Management Sciences* **9** 5–30.

[48] Siotani, M., Hayakawa, T. and Fujikoshi, Y. (1985). *Modern Multivariate Analysis: A Graduate Course and Handbook.*

[49] Siotani, M. and Wang, R.H. (1977). In: *Multivariate Analysis-IV* pp.523–545.

[50] Skovgaard, I.M. (1981). *Scand. J. Statist.* **8** 207–217, 227–236.

[51] 若木宏文. (1997). 数学 **49** 253–265.

[52] Wakaki, H., Yanagihara, H. and Fujikoshi, Y. (2002). *Hiroshima Math. J.* **32** 17–50.

[53] Wald, A. (1944). *Ann. Math. Statist.* **15** 145–162.

[54] Welch, B.L. (1947a). *Biometrika* **34** 28–35.

[55] Welch, B.L. (1947b). *Ann. Math. Statist.* **18** 118–122.

[56] Yanagihara, H. (2000). *Commun. Statist. Theory Meth.* **29** 463–476.

[57] Yanagihara, H. (2001). *Hiroshima Math. J.* **31** 213–262.

[58] Yanagihara, H. (2007). *J. Japan Statist. Soc.* **37** 135–155.

不変検定について

国際数理科学協会　　長尾壽夫

Lehmann(1959) "Testing statistical hypotheses (John-Wiely)" の 6 章の invariance の項で, 仮説検定の invariance 検定を取り扱っている. 種々の問題を取り扱っているが、その目的の一つは一様最強力不変検定を如何に求めるかである. 先ずデータ $\mathcal{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ があり, その分布を $\mathrm{P}_\theta(\cdot)$ とする. $\mathcal{X}$ 上に群 G を考える. 母数空間上に導出される群 $\bar{G}$ が仮説を不変にするとする. Lehmann は最初, 十分統計量 T を用いて,T の空間 $\mathcal{T}$ 上で導出される群 G^* を考え, その下で一様最強力不変検定を作ることを考えている. しかし, 一様最強力不変検定の定義は $\mathcal{X}$ 上に与えられた群 G の下で不変性を考えデータを縮約させてその後に十分統計量を働かせて一様最強力不変検定を求めることである. すると, 果たして同じものであるのであろうかという問題が生じる. この問題に対して, **丘本正** (1964) は「不変性と十分統計量に関するノート（大阪統計談話会報告,8, 227-231)」において, 取り扱ったのであるが, 著者によると除外集合の取り扱いに難点があり論文の形にせずそのままになっている. その後しばらくして、Arnold(1981) "The theory of linear models and multivariate analysis (John-Wiely)" の中でこの問題を取り扱い、証明を一切付けずに述べている. この結果では除外集合などに関係せず, ここでは Lehmann の本と合わせてその証明を与える.

不変検定の考えの必要性として例えば、$X_1, \cdots, X_n$ を独立であり，X_i の確率密度関数を $f(x|\theta_i)$ とする．このとき，仮説 $\mathrm{H}: \theta_1 = \cdots = \theta_n$ を対立仮説 $\mathrm{K}: \theta_i \neq \theta_j$ に対して検定を行う．ただし，$i \neq j$．この場合の棄却域は $X_1, \cdots, X_n$ に関して，対称とするのが自然であろう．

すなわち，$X_1, \cdots, X_n$ に置換群を入れてそれに対応して，$\theta_1, \cdots, \theta_n$ に対して置換群が入り，この置換群の下で仮説は不変である．このように標本の中に群をいれて，それによって生じる母数空間上の群を考え，その下で不変な仮説検定問題を考えることにする．そこで, X を標本とする．この X の取り得る値を標本空間 $\mathcal{X}$ とし，その上で群 G を考える．なお，θ が真の下での X の分布を $\mathrm{P}_\theta(X \in A)$ と表すことにする．$g \in G$ とし，すべての A に対して,

$$\mathrm{P}_\theta(gX \in A) = \mathrm{P}_{\overline{g}\theta}(X \in A) \tag{1}$$

のように $\overline{g}\theta$ を定める．すると，g によって，母数空間 $\Theta = \{\theta\}$ 上に変換 $\overline{g}$ が生じることになる．そこで，この $\overline{g}$ の全体を $\overline{G}$ とすると，次の性質を持つ.

補題 1. G が群ならば，$\overline{G}$ も群である．なお，$(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2(x))$ と定める.

証明.

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}_\theta(g_1(g_2(X)) \in A) = \mathrm{P}_\theta(g_2(X) \in g_1^{-1}A) = \mathrm{P}_{\overline{g}_2\theta}(g_1 X \in A) \\ &= \mathrm{P}_{\overline{g}_1\overline{g}_2\theta}(X \in A) = \mathrm{P}_{\overline{g_1 g_2}\theta}(X \in A) \end{aligned} \tag{2}$$

であるから，$\overline{g}_1\overline{g}_2 = \overline{g_1 g_2}$ である．これより，$\overline{G}$ の中に積が定義されたことになり，$\overline{G}$ が群であることがわかる． □

例 1. X を正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うとする．変換として，$(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2 x)$ とし，$g_{a,b} : x \longrightarrow ax + b \ (a \neq 0)$ と定めると，この全体は群をなす．すると，$g_{a,b}$ に対して $\overline{g}_{a,b}(\mu, \sigma^2) = (a\mu + b, a^2\sigma^2)$ となる．このとき，$\overline{g}_{a,b}$ の全体も群をなすことは明らかである．

定義 1. 仮説 $\mathrm{H}: \theta \in \Theta_0$ を対立仮説 $\mathrm{K}: \theta \in \Theta - \Theta_0$ に対する検定を行う．このとき，すべての $\overline{g}$ に対して，$\overline{g}\Theta_0 = \Theta_0$ であり，かつ $\overline{g}(\Theta - \Theta_0) = \Theta - \Theta_0$ のとき，群 G は**仮説検定問題を不変にする** という．

定義 2. すべての $g \in G$ とすべての x に対して，

$$\phi(gx) = \phi(x) \tag{3}$$

を満たすとき，検定関数 $\phi(x)$ を**不変検定** といい，特に，検定関数に限らないとき，**不変** という．

ここで，不変検定全体についての性質を述べることにする．そこで，標本空間 $\mathcal{X}$ を**軌道** とよばれる部分に分割する．$x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ に対して，$g \in G$ が存在して，$g(x_1) = x_2$ となるとき，x_1 と x_2 は**同値** ということにする．すると，この関係により，標本空間 $\mathcal{X}$ は分割されることになる．このことより，x に対して $\{gx \mid g \in G\}$ がひとつの軌道と呼ばれるものである．従って，この上で検定関数が一定値であることが，不変検定であるための必要十分な条件となる．

別の不変検定を特徴づける概念を導入する．それは，不変検定は各軌道上では一定値を取るが，別の軌道上でもこの値は同じかもしれない．

定義 3. 関数 $T(x)$ が**最大不変** とは，不変であって，

$$T(x_1) = T(x_2) \text{ ならば，ある } g \in G \text{ が存在して } gx_1 = x_2 \tag{4}$$

となるときをいう．

従って，$T(x)$ が最大不変のときは，各軌道での値は異なる．

補題 2. 関数 $T(x)$ は最大不変とする．$\phi(x)$ が不変検定であるための必要十分条件は $\phi(x)$ が $T(x)$ の関数となることである．

証明を与える前に，任意に $x \in \mathcal{X}$ を固定すると，2 つの関数 ϕ, T によって，$\phi(x), T(x)$ に写される．これより，$T(x)$ には $\phi(x)$ を対応させればよいことになるが，値 $T(x)$ となる点が 2 つあったとする．それを x_1, x_2 とすると，$\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$ となれば，$T(x)$ は 2 つの値 $\phi(x_1), \phi(x_2)$ に対応させなくてはならず，$T(x)$ から $\phi(x)$ への関数は存在しない．しかし，この補題の場合はいくつかの仮定が存在する．なお，$T(X)$ の値の集合を $\mathcal{T}$ とする．

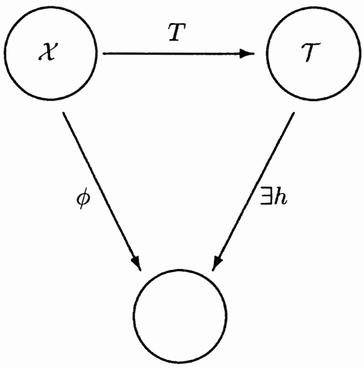

図 1

証明. まず，$\phi(x) = h(T(x))$ ならば，$\phi(x)$ は不変である．逆に，任意に $x_1, x_2 \in \{x \,|\, T(x) = a\}$ とすると，ある $g \in G$ が存在して $x_1 = g(x_2)$ である．よって，$\phi(x_1) = \phi(x_2)\ (= b)$ であるから，a から b への写像 h が存在する．図 **3.1** を参照．従って，示された． □

この補題より，不変検定を考えるには最大不変な関数 $T(x)$ だけを考えれば良いことになる．

例 2. $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ に対して，$g_c(\boldsymbol{x}) = (x_1 + c, \cdots, x_n + c)$ とする．このとき，群 $G = \{g_c \,|\, |c| < +\infty\}$ の下で $T(\boldsymbol{x}) = (x_2 - x_1, \cdots, x_n - x_1)$ は最大不変である．

なぜならば，まず，不変であることは明らか．また，$(x_2 - x_1, \cdots, x_n - x_1) = (x'_2 - x'_1, \cdots, x'_n - x'_1)$ とすると，$x_i - x_1 = x'_i - x'_1$ より，$c = x_1 - x'_1$ とおくと，$x_i = x'_i + c\ (i = 1, \cdots, n)$ となる．従って，$g_c(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{x}$ である．ただし，$\boldsymbol{x}' = (x'_1, \cdots, x'_n)$ とする．

例 3. $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$，$c \neq 0$ に対して，$g_c(\boldsymbol{x}) = (cx_1, \cdots, cx_n)$ とする．このとき，群 $G = \{g_c \,|\, c \neq 0\}$ の下で $T(\boldsymbol{x}) = (x_2/x_1, \cdots, x_n/x_1)$ は最大不変である．

なぜならば，$T(\boldsymbol{x})$ は G で不変であることは明らか．また，$(x_2/x_1, \cdots, x_n/x_1) = (x'_2/x'_1, \cdots, x'_n/x'_1)$ とすると，$x_i = (x_1/x'_1)x'_i\ (i = 1, \cdots, n)$ であるから，$c = x_1/x'_1$ とすると，最大不変となる．

補題 2 から，不変検定を考えるさいには，最大不変 $T(x)$ の分布を考え，ネイマン・ピアソンの補題を用いて，もし一様最強力検定が存在するならば，これは**一様最強力不変検定**

例 4. $X_1, \cdots, X_n$ を確率密度関数 $f_i(x - \theta)$ からの無作為標本とする．ただし，θ は未知とする．このとき，仮説 $\mathrm{H}: i = 1$ を対立仮説 $\mathrm{K}: i = 2$ に対して検定を行う．ここで，関数形

$f_i(x)$ は既知とする．この仮説検定問題は，群 $g_c(\boldsymbol{x}) = (x_1 + c, \cdots, x_n + c)$ に対して不変である．

なぜならば，$\overline{g}_c\theta = \theta + c$ となるから，仮説 H，対立仮説 K は不変である．すると，例 2 より，$T(X) = (X_2 - X_1, \cdots, X_n - X_1)$ は最大不変である．$f_i(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{j=1}^n f_i(x_j)$ とおき，$T(X)$ の分布を求め，$X_1, \cdots, X_n$ で表すと，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_i(x_1, X_2 - X_1 + x_1, \cdots, X_n - X_1 + x_1)dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(X_1 - \theta, \cdots, X_n - \theta)d\theta \tag{5}$$

である．従って，ネイマン・ピアソンの補題を用いて，

$$\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_1(X_1 - \theta, \cdots, X_n - \theta)d\theta}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_2(X_1 - \theta, \cdots, X_n - \theta)d\theta} \leq c \tag{6}$$

のとき，仮説 H を棄却する検定は一様最強力不変検定である．

次に，標本 X の分布 $\mathrm{P}_\theta(\cdot)$ に対して，十分統計量 $T(X)$ が存在する場合について考える．ここで，不変性を考える前に，まず，十分統計量によって，X よりより取り扱いやすい形 $T(X)$ にさせることの正当性を考える．

定義 4. 統計量 $T(X)$ が群 G に関して**共用できる** (compatible) とは，$g \in G$ に対して，$T(g(X)) = g^*(T(X))$ となる $\mathcal{T}$ から $\mathcal{T}$ への変換 g^* が存在するときをいう．

例 5. $X_1, \cdots, X_n$ を正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本とし，$X = (X_1, \cdots, X_n)$ とおく．$a \neq 0$, b に対して，$g_{a,b}(X) = (aX_1 + b, \cdots, aX_n + b)$ と変換する群 $G = \{g_{a,b}\}$ を考える．統計量 $T(X) = (\bar{X}, U^2)$ とおくと，変換 $g_{a,b}$ に対して，$g^*_{a,b}(T(X)) = (a\bar{X} + b, a^2U^2)$ となる．これより，$T(X)$ は共用できる統計量である．ただし，$U^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/(n-1)$ である．

ここで，統計量が群 G に関して共用できるための十分条件を与える．

補題 3. もし，$T(X_1) = T(X_2)$ のとき，$g \in G$ に対して，$T(gX_1) = T(gX_2)$ ならば，変換 g^* が存在して，$g^*T(X) = T(gX)$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "T"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "T"] \\
\mathcal{T} \arrow[r, "\exists g^*"'] & \mathcal{T}
\end{tikzcd}
$$

図 2

証明. X_0 を任意に選び $T(X_0) = Y_0$ とおき，$\mathcal{X}_0 = \{X \mid T(X) = Y_0\}$ に対して，$X_1, X_2 \in \mathcal{X}_0$ とすると，$X_0 \in \mathcal{X}_0$ であり、$T(X_1) = T(X_2)$ であるから，$T(gX_1) = T(gX_2) = T(gX_0)$．従って，$\mathcal{X}_0$ のどの元も $T(gX_0)$ になる．これより，$T(X_0)$ から $T(gX_0)$ への変換 g^* が存在する．図 3.2 を参照． □

上の定義 4 で考えた g^* の全体を G^* とすると，次が得られる．

補題 4. G が群ならば，G^* も群となる．

証明. $g_1, g_2 \in G$ とすると，

$$T(g_1g_2(X)) = T(g_1(g_2(X))) = g_1^*T(g_2(X)) = g_1^*g_2^*T(X) \tag{7}$$

これより，$(g_1g_2)^* = g_1^*g_2^*$ となる．従って，G^* の中に積が定義されるから，G^* は群となる．
□

補題 5. g を群 G の元とし，$T = T(X)$ は十分であり，かつ群 G に関して共用できる統計量とする．g による T 上の変換を g^* とすると，すべての集合 A に対して，

$$\mathrm{P}_\theta(g^*(T) \in A) = \mathrm{P}_{\bar{g}\theta}(T \in A) \tag{8}$$

となる．

証明.

$$\mathrm{P}_\theta(g^*(T) \in A) = \mathrm{P}_\theta(T(gX) \in A) = \mathrm{P}_{\bar{g}\theta}(T(X) \in A) = \mathrm{P}_{\bar{g}\theta}(T \in A) \tag{9}$$

従って，示される． □

補題 6. 統計量 T は十分であり，かつ群 G に関して共用できるとし，群 G は仮説 $\mathrm{H}: \theta \in \Theta_0$ に対して対立仮説 $\mathrm{K}: \theta \in \Theta - \Theta_0$ の仮説検定問題を不変にするとする．すると，群 G によって，T 上で導出された群 G^* の下でこの仮説検定問題は不変になる．

証明. 群 G の下で統計量 T は共用できることより，導出される群 G^* が定義される．また，この群 G^* の下で補題 5 を用いると，Θ 上に G によって導出される群と同じ群 $\bar{G}$ が定義されるから，仮説検定問題を不変にする． □

補題 7. 統計量 T は十分統計量であり，群 G に関して共用できるとする．検定関数 $\phi^*(T)$ が 群 G^* の下で不変ならば，$\phi(X) = \phi^*(T(X))$ は G の下で不変である．

証明.

$$\phi(gX) = \phi^*(T(gX)) = \phi^*(g^*T(X)) = \phi^*(T(X)) = \phi(X) \tag{10}$$

これより，従う． □

補題 8. 統計量 T は十分であり，かつ群 G に関して共用できるとする．検定関数 $\phi(x)$ が G の下で不変ならば，$\phi^*(T) = \mathrm{E}[\phi(X)|T]$ は G^* の下で不変である．

証明.

$$\begin{aligned}\phi^*(g^*(T_0)) &= \mathrm{E}(\phi(X)|T = g^*(T_0)) = \mathrm{E}(\phi(X)|{g^*}^{-1}T = T_0) \\ &= \mathrm{E}(\phi(gX)|T = T_0) = \phi^*(T_0)\end{aligned} \tag{11}$$

これより，従う． □

補題 9. 統計量 T は十分であり，かつ群 G に関して共用できるとする．G の下で不変な任意の検定関数を $\phi(x)$ とすると，同じ検定力関数を持つ G^* の下で不変な検定関数 $\phi^*(T)$ が存在する．

証明.

$$\phi^*(T) = \mathrm{E}(\phi(X)|T) \tag{12}$$

とおくと，$\phi^*(T)$ は補題 8 によって，G^* の下で不変となる．この検定関数 (12) の両辺の平均を取ると，$\phi(X)$ と同じ検定力を持つことになる． □

定理. 統計量 T は十分であり，かつ群 G に関して共用できるとする．G^* の下で不変なサイズ α の 検定関数 $\phi^*(T)$ が G^* の下で一様最強力不変検定ならば，検定関数 $\phi(X) = \phi^*(T(X))$ のサイズは α となり，G の下で一様最強力不変検定となる．

証明. $\chi(X)$ を G の下で不変なサイズ α の検定とする．$\chi^*(T) = \mathrm{E}(\chi(X)|T)$ とおくと，補題 8 によって，G^* の下で不変であり補題 9 によって，$\chi^*(T)$ と $\chi(X)$ は同じ検定力を持つ．従って，θ を対立仮説の点とすると，

$$\mathrm{E}_\theta(\phi^*(T)) \geq \mathrm{E}_\theta(\chi^*(T)) \tag{13}$$

より

$$\mathrm{E}_\theta(\phi(X)) \geq \mathrm{E}_\theta(\chi(X)) \tag{14}$$

となり，$\phi(X)$ は一様最強力不変検定であることが示された． □

この定理により，十分統計量で，かつ群 G に関して共用できる統計量が存在するならば，群 G の下で一様最強力不変検定を求めるには，十分統計量により，考える検定のクラスを制限して，その後，G^* の下で一様最強力不変検定を求めれば良いことになる．従って，補題 5 より，$T(X)$ を十分，かつ共用できる統計量の確率分布に対して，ネイマン・ピアソンの補題を用いて，まず，最強力検定を求めることになる．

次の例を考える前に，非心 F 分布について述べる．確率変数 X, Y は独立で X は**非心率** δ^2 を持つ自由度 m のノンセントラル χ^2 分布とし，Y を自由度 n の χ^2 分布に従うとする．このとき，

$$F = \frac{X/m}{Y/n} \tag{15}$$

の分布を非心率 δ^2 を持つ自由度 (m, n) の**ノンセントラル F 分布**という．その密度関数は，$0 < f < \infty$ に対して，

$$h(f, \delta^2) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta^2/2} \frac{(\delta^2/2)^k}{k!} \frac{\Gamma((m+n)/2+k)(m/n)^{m/2+k} f^{m/2+k-1}}{\Gamma(m/2+k)\Gamma(n/2)(1+mf/n)^{(m+n)/2+k}} \tag{16}$$

である．

例 6. $X_1, \cdots, X_n$ を正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本とし，μ, σ^2 はともに未知とする．このとき，仮説 $\mathrm{H}: \mu = 0$ を対立仮説 $\mathrm{K}: \mu \neq 0$ に対して検定を行う．すると，$g_c(x) = cx\ (c \neq 0)$ である群 G の元 g_c に対して，例 5 と似た考えで十分統計量 $T(X) = (\bar{X}, U^2)$ は $g_c^*(x, y) = (cx, c^2 y)$ なる変換 g_c^* が存在して，共用できる統計量となる．すると，$\left(\dfrac{\sqrt{n}\bar{X}}{\sqrt{U^2}}\right)^2$ が群 G^* に関して，最大不変となる．その分布は非心率 $\delta^2 = (\mu/\sigma)^2$ を持つ自由度 $(1, n-1(=\ell))$ のノンセントラル F 分布となる．そこで，$\dfrac{h(f,\delta^2)}{h(f,0)}$ を考えると，関数 $\dfrac{f^k}{(1+f/\ell)^k}$ が f に関して単調増加関数であるから，有意水準 α に対して

$$\frac{\sqrt{n}|\bar{X}|}{\sqrt{U^2}} \geq t_{[n-1]}(\alpha/2) \tag{17}$$

が一様最強力不変検定となる．

ISMS から

＊ IVMS 国際研究集会のテスト

内外研究集会の活発化の為の Infrastructure の整備に目鼻がついてきています。

(1)　国内は参集会場に旅費、ホテル代等なしに、参画できる soba system を使う

(2)　海外会場とは阪大中ノ島センターの「ITU の国際規格を満たす system(Tandberg 6000 使用)を使う。

(3)　内外両者を阪大中ノ島センターで接続する。

(4)

上の(1)に書きました soba system の使用説明を会報 51 号に掲載しましたが、印刷が不鮮明のため少し詳しいカラー印刷の説明文があります。Symposium や joint meeting を企画される各位に、又ご希望の方に soft をお送りします。pbls5@jams.jp 宛ご連絡下さい。

以上の中で、(1)及び(2)のテストはうまく作動しました。(3)のテストはこれからですが、成功が充分見込まれています。
猶、(2)項の、海外大学、研究所、学術団体、研究集会等との研究交流のテストをされたい方は、交流先の IP アドレスをつけて事務局にお知らせ頂ければ(scm4j@jams.jp)、先方との接続テストをさせて頂きます。

IVMS 委員会

＊ 国際数理科学協会 2008 年理事会総会の案内

ISMS business meeting（国際数理科学協会 2008 年理事会総会）を 2008 年 3 月 29 日（土）14：00～15：30 に阪大中之島センター7F セミナー室（模擬法廷）で行います。
国内の方は会場へご参集又は Soba でご参加をお願いします。SOBA の接続 Test は 13：00 から行います。SOBA で参加される方は事前に 3 月 20 日までに事務局 scm4j@jams.jp に御連絡を御願いします。
海外会員の方は IVMS system（Tandberg 6000 使用）に接続し参加することをお願いします。

議事予定

（1）207 年度（2007.1.1～207.12.31）（寄金特別会計含む）決算報告、2008 年度（2008.1.1～2008.12.31）予算。

（2）2007 年度事業報告、2008 年度事業予定、IVMS 予定、国内遠隔研究集会(SOBA)予定

（3）名誉会員制度

（4）Js 投稿の取り扱いについて

（5）その他

＊ ２００８年 年会のお知らせ

国際数理科学協会年会を下記の日程，場所で行う予定です．

日程：平成２０年８月１２日（火）

場所：大阪府立大学学術交流会館

現時点で，下記の３つの研究部会で分科会の開催が予定されています．

（１）研究部会名： 統計的推測と統計ファイナンス

開催予定時間：10:00～17:00

世話人：地道正行（関西学院大学商学部）

熊谷悦生（大阪大学大学院基礎工学研究科）

連絡先：地道正行（jimichi@kwansei.ac.jp）

（２）研究部会名：確率モデルと最適化

開催予定時間：13:00～18:00

世話人：寺岡義伸（近畿大学経営学部）
北條仁志（大阪府立大学大学院理学系研究科）
連絡先：寺岡義伸（y-teraoka@bus.kindai.ac.jp）
北條仁志（hojo@mi.s.osakafu-u.ac.jp）
備考：日本オペレーションズ・リサーチ学会「不確実性環境下での意思決定の理論と応用」研究部会（担当主査：菊田健作、幹事：川勝英史)」と合同で開催予定です.

（３）研究部会名：統計的デザイン，組合せ的デザインとその周辺
開催予定時間：10:00～12:00
世話人：栗木進二（大阪府立大学大学院工学研究科）
連絡先：栗木進二（kuriki@ms.osakafu-u.ac.jp）

研究部会で講演をご希望の方は連絡先の方に申し込んでください．講演 申し込みの締め切りは６月１０日です．プログラムが決まりましたら，７月の会報でお知らせする予定です．

＊ 九大大学院数理科学研究院ワークショップ
表題のワークショップが 3 月 27 日（木）9:30～17:00 に第一ホテル東京シーフォートで行なわれます。参加費は無料、参加ご希望の方は 3 月 19 日迄に gp-jimu@math.kyushu-u.ac.jp 迄お申し込み下さい。プログラム等はホームページ
http://staff.math.kyushu-u.ac.jp/board/view3.php?B_Code=640 でご覧になって下さい。

＊ 新しい submission form, Js についての御願い

Submission form　が変わります。詳細は、今月号の Notices from the ISMS を御覧下さい。

＊ 賛助会員制度（寄付制度）の発足と基金
今回 Bylaws2007(July)の賛助会員制度(Contributing Member)が発足することになりました。それで、本年８月１日より下記の二つの基金を発足させ、御寄付頂いた方の御指示に従い、各基金による事業の推進に役立たせたいと考えます。一口１万円より何口でも、また一口未満の御寄付も有難くお受け致します。
右記の郵便振替口座にてお受け致します。　**00960-3-206607　国際数理科学協会**

なお、基金の使途について下記よりお選び下さい。
(I) ISMS 授賞基金
ISMS 賞、功力賞、北川賞についての授賞メダルの作製、受賞者への送付の費用等授賞に関する費用に支出
受賞メダルは、原盤（金属の型）の作成費が 40 万位かかりますが、このメダル原盤を使った年々の受賞メダルの作成費は、三万円以下で済みます。今回、原盤の作成に取り掛かりたく、功力賞及び北川賞の原盤の作成費を Cover する為の基金への御寄付を特に御願いする次第です。
(II) 国際研究交流基金
海外及び国内の研究集会参加 site の会場費、研究交流設備の使用料の支出
(Ⅲ) Notices(article)、SCMJ(Plaza)等への Invited Authors に対する通信費
(Ⅳ) ISMS 国際研究集会での Keynote Speaker の、出席 site までの交通費
(Ｖ) 使途に指定はしない

猶、御寄付の種類は、御寄付の累計額が
(1)50 万円(又は$5000)以上
(2)10 万円(又は$1000)以上
(3)5 万円(又は$500)以上
(4)1 万円(又は$100)以上
(5)1 万円(又は$100)未満
の 5 種類とし、感謝状を贈呈すると共に御氏名を(匿名希望の方は除き)www. 及び会報、Notices 欄に掲載させて頂きます。

＊　機関会員募集
機関会員の特典としては
(1)本屋より SCMJ を購入すると、print 版 45,000 円であるが、機関会員になると、print 版 33,000 円で **online も見ることができます。**
(2)会員でない 2 名の方を準会員として登録することができます。これにより、page charge(別刷代金)　が会員と同じ扱いになります。
(3)上の準会員 2 名は online で SCMJ を見る事ができます。
(4) Net を用いて国際研究集会を催す時、アナウンス、アブストラクトの作成などお助けいたします。大学、研究所等が協会から SCMJ 誌の直接購入すると、今年から online も無料で見ることができるようになりました。

機関会員の申込用紙です。適当にお使い下さい。
Application for Academic and Institutional Member of ISMS

Subscription of SCMJ	□Print ＋ Online (¥33,000,　US$300)
University (Institution)	
Department	
Postal Address where SCMJ should be sent.	
E-mail address	
Person in charge	Name: Signature:
Payment Check one of the two.	□Bank transfer　　□Credit Card (Visa, Master)
Name of Associate Members	1.
	2.

上にも書きましたように、2006 年より発効の機関会員制度により各機関会員に所属の研究者 2 名を会費無料で準会員として登録しますと、準会員が SCMJ に accept された論文を掲載するときの page charge (別刷代金)は会員と同額とすることにしました。
この新しい制度の機関会員の P.R.を、日本国内外(BRICS 諸国など)400 大学に向けて、昨年 1 月から始めています。同時に今迄の SCMJ 投稿者で会員でない方、また、個人会員および(機関会員の)準会員加入の P.R.も始めています。
両者の P.R.について会員の御支援(P.R 先大学の教員の方の名前ご連絡頂く)を御願いする次第です。

ISMS (JAMS の継続) 会員募集

ISMS の出版物：ISMS は、創刊より約 60 年、国際的に高い評価を得ている Mathematica Japonica (M.J.)と、その姉妹誌で電子 Journal と Paper 誌とを持つ、Scientiae Mathematicae (SCM) とを発行してきました。両誌は合併して、"21 世紀 MJ/SCM New Series, Scientiae Mathematicae Japonicae (SCMJ) "として、電子版は 2000 年 9 月より発行してきました。印刷版は、1978 年 1 月より、年間 6 冊、700～1200 頁を出版しています。全体として 230 巻を超える、日本で最大量を誇る数理科学の雑誌です。その特長は、下の 1)～ 7)です。

1) Editorial Board には、国内だけでなく、海外 15 カ国の著名な研究者 40 名が参加している。
2) 世界の research group に論文が紹介され、積極的な交流が推進されている。
3) Editor を窓口として直接論文を投稿できて、迅速な referee 及び出版が得られる。
4) 有名な数理科学者の original paper や、研究に役立つ survey が、毎号載せられている。
5) SCMJ は、世界の有名数理科学者による、極めて興味ある expository paper を、毎号 International Plaza 欄に掲載している。世界各国の図書館へ、広く配布されている。
6) 投稿論文は、accept 後 (又は組版後) 待ち時間 0 で発行されます。
7) Mathematical Review, Zentralblatt に from cover to cover で review されている。

ISMS の研究集会：(1)研究仲間がゆっくり時間をかけて発表、討論をする、特色ある参集型研究集会が毎年行われ、非会員も含む多数の参加者の、活発な研究交流の場となっている。(2)ISMS には内外の著名な研究者が多数入っておられる。近いうちに内外を結ぶ高い level の研究会が online で行われる事を期待している。(本誌 45 号 3p 及び Notices March 2006 9p を御参照下さい)

ISMS の学術賞:会員の優れた論文を広く世界に紹介し、更なる研究を奨励するために、ISMS 賞、JAMS 賞、Shimizu 賞、Kunugui 賞、Kitagawa 賞を設けている。(詳しくは本誌 45 号 2p 会則 13 条を御参照下さい)

＜ISMS の会員の特典＞１．SCMJ 電子版の購読 (print out も含む) 無料。２．SCMJ print 版の少額での購読 (下表１)。３．Page charge(別刷代金)の discount (下表２)。

＜機関購読会員の特典＞1. 機関内の２名の方を準会員として会費無料で登録することが出来る。２．準会員は会員と同じ page charge(別刷代金)の discount を受けることが出来る。

表１
【雑誌購読費】

	正会員 (１年)	正会員 (３年)	機関会員	定価
Print	¥ 6,000 US$ 60, €48	¥ 5,500* US$ 55, €44	¥ 33,000 US$ 300, €240	¥ 45,000 US$ 400, €320
Online	Free	Free		
Online+print	¥ 6,000 US$ 60, €48	¥ 5,500 US$ 55, €44	¥ 33,000 US$ 300, €240	¥ 45,000 US$ 400, €320

*３年会員のみ、雑誌購読費３年分前払いの場合は￥15,000 になります。
著者の方には、SCMJ を１冊送料込みで 1,200 円または US＄12 で購入できます。

表２
【ページチャージ】

	ISMS members	Non-members
p	¥ 3,500 (US$35, € 23)	¥ 4,000 (US$40, €27)
Tex	¥ 2,000 (US$20, € 14)	¥ 2,500 (US$25, €17)
LateX2e, LaTeX	¥ 700 (US$ 7, € 4)	¥ 1,000 (US$10, € 7)
Js (ISMS style file)	¥ 500 (US$ 5, € 3)	¥ 800 (US$ 8, € 5)

別刷作成について、次の費用の分担をお願いします。原稿の組版についての連絡費、抜刷送料等の事務処理として、一編について¥ 1,000、及び上表の各原稿の種類による組版費を請求させて頂きます。
(2008 年 Vol.67 から実施)

表３
【2008 年の会費】

Categories	国内会員	海外会員	途上国会員
単年度 A 会員	¥9,000	US$ 75, €60	US$ 45 , €36
3 年 A 会員	¥24,000	US$ 200, €160	US$ 117, €93
単年度 S 会員	¥5,000	US$ 40, €32	US$ 27, €21
3 年 S 会員	¥12,000	US$ 100, €80	US$ 71, €57
生涯会員**	¥90,000	US$ 740, €592	US$ 616, €493

**過去 10 年以上、正会員であった方に限る。
A 会員は正会員を指し、S 会員は、学生会員と高齢会員(70 歳以上)を指します。

国際数理科学協会

International Society for Mathematical Sciences

〒590-0075 堺市堺区南花田口町 2-1-18 新堺東ビル内

Tel:(072)222-1850 / Fax:(072)222-7987 URL:http://www.jams.or.jp