一般社団法人

国際数理科学協会会報

No.136/2026.4

目次

＊ 寄稿　　＊ 予算決算表

＊ 貸借対照表

＊ 寄稿

対数-優越性　裏表

大阪教育大学 名誉教授　藤井 正俊

1. 対数–優越性. 優越性（majorization） や 対数–優越性（log-majorization） は、行列論において一定の意味を持っている。また、近年 entropy などに絡んで後者の価値は上昇している。

先ず、majorization の定義から始める。$X=(x_i), Y=(y_i)\in\mathbb{R}_+^n(\downarrow)$ に対して、

$$X \succ Y \iff \sum_{j=1}^k x_j \ge \sum_{j=1}^k y_j \ (k=1,\cdots,n-1), \qquad \sum_{j=1}^n x_j = \sum_{j=1}^n y_j.$$

典型的な例は、

$$\left(\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right) \succ \left(\frac{1}{n-1},\cdots,\frac{1}{n-1},0\right) \succ \cdots \succ (1,0,\cdots,0)$$

である。

一方の log-majorization は、majorization の積版である。$X=(x_i), Y=(y_i)\in\mathbb{R}_+^n(\downarrow)$ に対して、

$$X \succ_{\log} Y \iff \prod_{j=1}^k x_j \ge \prod_{j=1}^k y_j \quad (k=1,\cdots,n-1), \qquad \prod_{j=1}^n x_j = \prod_{j=1}^n y_j.$$

ここで、X を対角行列と見て、$\det X = \prod_{j=1}^n x_j$ と表す。

さて、 log-majorization は、ある一定の条件の下で、何かを測り、それらを比較している筈である。そこで、$\mathbb{R}_+^3$ で考えてみる.

$X=(x,y,z), A=(a,b,c)\in\mathbb{R}_+^3(\downarrow)$ に対して、

$$X \succ_{\log} A \ \Leftrightarrow\ x\ge a,\ xy\ge ab,\ \det X=\det A, \quad i.e., \quad xyz=abc.$$

ここで、 X, A をその各項を縦横高さとすると直方体と見ると、$xyz=abc$ であることは、X と A は体積が同じ直方体について、それらの何かを比べていることになる。

定理 1. $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_+(\downarrow)$ に対して、

$$S_X = xy+yz+zx$$

とすると、

$$X \succ_{\log} Y \implies S_X \ge S_Y$$

が成り立つ。

定理 1 は、対数–優越性が、同じ体積の直方体の表面積の大小を順序保存していることを主張にしている。

第 3 項を等しくすると、実質的に $\mathbb{R}^2_+$ の話になり、同じ面積の長方形の周囲の長さを評価していることになる：

系 2. $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2_+(\downarrow)$ に対して、

$$S_X = x+y$$

とすると、

$$X \succ_{\log} A \implies S_X \ge S_A$$

が成り立つ。実際には、

$$X \succ_{\log} A \iff S_X \ge S_A.$$

系 2 の証明は、簡単である：$xy=ab=1$ としてよい。すると、$y=\frac{1}{x},\ b=\frac{1}{a}$ なので、$x,a\ge 1$ のとき、

$$x\ge a \iff x+\frac{1}{x}\ge a+\frac{1}{a}$$

を示せばよいが、これは $t+\frac{1}{t}$ が $t\ge 1$ で単調増加であることから簡単にわかる。或いは、 $x,a\ge 1$ より

$$x+\frac{1}{x}-\left(a+\frac{1}{a}\right)=x-a-\frac{x-a}{ax}=(x-a)\left(1-\frac{1}{ax}\right)\ge 0.$$

2. 定理 1 の証明.

さて、手始めに定理 1 の証明を試みる。

定理 1 の証明. $X=(x_1,x_2,x_3), Y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3_+(\downarrow), \det X=\det Y=1(=x_1x_2x_3=y_1y_2y_3)$ とする。証明は、第 2 項の大小によって場合分けられる：

Case 1. $x_2\ge y_2$ のとき：

$$Z=(x_1,y_2,z_3),\quad z_3=\frac{1}{x_1y_2}\le y_3$$

を仲介役として使う。$z_3\le y_3$ は、$x_1y_2y_3\ge y_1y_2y_3=1$ より分かるので、$Z\in\mathbb{R}^3_+(\downarrow)$ となる。そして、$X\succ_{\log} Z\succ_{\log} Y$ が簡単に確かめられる。そこで、表面積を比べてみる。

$$S_X-S_Z=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}-\left(x_1y_2+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{y_2}\right)=(x_2-y_2)\left(x_1-\frac{1}{x_2y_2}\right)\ge 0,$$

最後のところは、 $x_1x_2y_2\ge y_1y_2y_2\ge y_1y_2y_3=1$ より。殆ど同様に、 $x_1y_1y_2\ge y_1y_1y_2\ge y_1y_2y_3=1$ より、

$$S_Z-S_Y=x_1y_2+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{y_2}-\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}\right)=(x_1-y_1)\left(y_2-\frac{1}{x_1y_1}\right)\ge 0,$$

従って、$S_X \geq S_Z \geq S_Y$ が確かめられた。
Case 2. $x_2 \leq y_2$ のとき：

$$W = (w_1, y_2, x_3), \quad w_1 = \frac{x_1 x_2}{y_2};\ x_1 \geq w_1 \geq y_1$$

とすると、$W \in \mathbb{R}^3_+(\downarrow)$ そして、$X \succ_{\log} W \succ_{\log} Y$ が成り立つ。表面積についても、

$$S_X - S_W = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} - \left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{x_3}\right) = (y_2 - x_2)\left(\frac{1}{x_2 y_2} - x_3\right) \geq 0,$$

$(x_2 x_3 y_2 = \frac{y_2}{x_1} \geq 1$ より$)$.

$$S_W - S_Y = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{x_3} - \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3}\right) = (y_3 - x_3)\left(\frac{1}{y_3 x_3} - y_2\right) \geq 0$$

$(y_2 y_3 x_3 \leq y_2 y_3 y_3 \leq y_2 y_3 y_1 = 1$ より$)$.

3. 帰納的考察. 次元を上げるために、次の補題を準備する。

補題 3. $\mathbb{R}^{n-1}_+(\downarrow)$ の元に対して、

$$A \succ_{\log} B \implies S_A \geq S_B \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \mathrm{S}(n-1)$$

が成り立っているものとする。$X = (x_1, \cdots, x_n),\ Y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n_+(\downarrow)$ が $X \succ_{\log} Y$ で, さらに、ある $j = 1, \cdots, n$ に対して、 $x_j = y_j$ であれば、$S_X \geq S_Y$ が成り立つ。
証明. 便宜上、$n = 4,\ x_1 = y_1$ として、証明する。(第２、第３、第４項目でも同じように証明できる。) $X' = (x_2, x_3, x_4),\ Y' = (y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^3_+(\downarrow)$ とおくと、$x_1 = y_1$ より、 $X' \succ_{\log} Y'$ なので、$\mathrm{S}(n-1)$ の仮定により、$S_{X'} \geq S_{Y'}$ が成り立つ。次に、$x_1 x_2 x_3 x_4 = y_1 y_2 y_3 y_4 = 1$ としておくと、

$$S_X = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{1}{x_1} + x_1 S_{X'}; \qquad S_Y = \frac{1}{y_1} + x_1 S_{Y'}$$

より、

$$S_X - S_Y = x_1(S_{X'} - S_{Y'}) \geq 0.$$

なお、補題３と系２を組み合わせると、定理１の証明は少し簡単になる。
定理１の証明再考. 系２は確実に証明されているので、補題３を使って証明を簡略化できる：
Case 1. $x_2 \geq y_2$ のとき：

$$Z = (x_1, y_2, z_3), \quad z_3 = \frac{1}{x_1 y_2} \leq y_3$$

とすると、$X \succ_{\log} Z \succ_{\log} Y$ なので、補題３を使って、$S_X \geq S_Z \geq S_Y$ が得られる。.
Case 2. $x_2 \leq y_2$ のとき：

$$W = (w_1, y_2, x_3), \quad w_1 = \frac{x_1 x_2}{y_2};\ x_1 \geq w_1 \geq y_1$$

とすると、$X \succ_{\log} W \succ_{\log} Y$. なので、補題３が使えて、$S_X \geq S_W \geq S_Y$ が示せる。

本題に戻って、定理１と補題３を基にして、次元を上げることができる。

定理４． $X=(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4_+(\downarrow)$ に対して、X の超表面積を

$$S_X = xyz + yzw + zwx + wxy$$

と定義する。このとき、$X, Y\in\mathbb{R}^4_+(\downarrow)$ に対して、

$$X \succ_{\log} Y \implies S_X \geq S_Y$$

が成り立つ。

４．ドローンを使う． 定理４の証明にもたついているとき、確実に成立地域を拡げていく帰納的な方法ではなく、一発で核心を狙うやり方が天から降ってきた。
まず、$X=(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4_+(\downarrow)$ を対角行列だと見る。そうすると、X は正定値 (positive definite) 行列で、

$$S_X = xyz + yzw + zwx + wxy = \det X\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = \mathrm{Tr}(X^{-1})$$

と表せる。このスマートな変形で、ドローンを飛ばせる環境が整う。
行列 T に対して、$\|T\|_1 = \mathrm{Tr}(|T|)$ $(|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}})$ は、ユニタリー不変のノルムの代表的なもので、さらに、log-majorization は、ユニタリー不変のノルムを保存する、つまり、

$$X \succ_{\log} Y \implies ||X||_1 \geq ||Y||_1$$

が成り立つことが知られている。止めを刺すのが log–majorization の特異性がよく出てる次の事実である：
補題５． $f(x)=\frac{1}{x}$ は、log-majorization を保存する：

$$X \succ_{\log} Y \implies X^{-1} \succ_{\log} Y^{-1}$$

これら２つを繋いでやると、確実に目標に到達できる：

定理６． 対数–優越性は、超表面積を保存する。即ち、$X, Y\in\mathbb{R}^n_+(\downarrow)$ $(n\geq 2)$ に対して、

$$X \succ_{\log} Y \implies S_X \geq S_Y.$$

が成り立つ。

５．我が道を行く． 結果が確かだと分かると、定理４に対する地道な証明にも見通しが付く：

定理４の証明． $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in\mathbb{R}^4_+(\downarrow)$, $\det X = \det Y = 1$ とする。証明は、x_2, y_2 の大小によって場合分けするのは、定理１のときと同様であるが少し細工が必要である：
Case 1. $x_2 \geq y_2$ のとき： 更なる場合分けが必要である。
(1-1) $x_2x_3 \geq y_2y_3$
$Z=(x_1,y_2,y_3,z_4)$, ただし $z_4 = \frac{x_2x_3x_4}{y_2y_3} = \frac{1}{x_1y_2y_3}$ とする。

まず、$x_1 \geq y_1 \geq y_2, x_1 y_2 y_3^2 \geq y_1 y_2 y_3 y_4 = 1$ より、$Z \in \mathbb{R}_+^4(\downarrow)$ が分かる。そして、$X \succ_{\log} Z \succ_{\log} Y$ より、補題３を使い、 $S_X \geq S_Z \geq S_Y$ が示せる。

(1-2) $x_2 x_3 < y_2 y_3$

$Z = (x_1, y_2, z_3, x_4)$, ただし $z_3 = \frac{x_2 x_3}{y_2}$ とすると、$y_3 > z_3 \geq x_3$ より、$Z \in \mathbb{R}_+^4(\downarrow)$ が分かる。そして、$X \succ_{\log} Z \succ_{\log} Y$ より、補題３を使い、 $S_X \geq S_Z \geq S_Y$ が示せる。

Case 2. $x_2 < y_2$ のとき

$W = (w_1, y_2, x_3, x_4)$ ただし、$w_1 = \frac{x_1 x_2}{y_2}$ とすると、$X \succ_{\log} Y$ と $x_2 \leq y_2$ より、 $x_1 \geq w_1 \geq y_1$ なので、$W \in \mathbb{R}_+^4(\downarrow)$ が分かる。そして、$X \succ_{\log} W \succ_{\log} Y$ より、補題３を使い、 $S_X \geq S_Z \geq S_Y$ が示せる。

ここまでの積み上げがあると、$n \geq 5$ に対しても同様の方法で示せることが分かる：

定理６. 対数–優越性は、超表面積を保存する。即ち、$X, Y \in \mathbb{R}_+^n(\downarrow)(n \geq 2)$ に対して、

$$X \succ_{\log} Y \implies S_X \geq S_Y.$$

が成り立つ。

証明. $n-1$ のとき命題が成り立っているものとする。即ち、補題３の $\mathrm{S}(n-1)$ の成立を仮定する。さて、 $X, Y \in \mathbb{R}_+^n(\downarrow)$ に対して、$X \succ_{\log} Y, \det X = \det Y = 1$ とする。

(i) $x_2 \geq y_2$ の場合：

$k = 2, \cdots, n-2$ について、

$$x_2 \cdots x_j \geq y_2 \cdots y_j \quad (j = 2, \cdots, k), \qquad x_2 \cdots x_{k+1} < y_2 \cdots y_{k+1}$$

であれば、Z を次で定める：

$$Z = (x_1, y_2, \cdots, y_k, z_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_n); \qquad z_{k+1} = \frac{x_2 \cdots x_{k+1}}{y_2 \cdots y_k}$$

すると、$y_{k+1} > z_{k+1} \geq x_{k+1}$ より、$Z \in \mathbb{R}_+^n(\downarrow)$, そして、$X \succ_{\log} Z \succ_{\log} Y$ が成り立つ。よって、補題３より、$S_X \geq S_Z \geq S_Y$ が得られる。

なお、$x_2 \cdots x_j \geq y_2 \cdots y_j$ $(j = 2, \cdots, n-1)$ の場合には、

$$Z = (x_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, z_n) \in \mathbb{R}_+^n(\downarrow), \quad \text{ただし} \quad z_n = \frac{1}{x_1 y_2 \cdots y_{n-1}} = \frac{y_1 y_n}{x_1}$$

とおくと、$y_n \geq z_n$ より、$Z \in \mathbb{R}_+^n(\downarrow)$, そして、$X \succ_{\log} Z \succ_{\log} Y$ が成り立つことより、補題３から、$S_X \geq S_Z \geq S_Y$ が得られる。

(ii) $x_2 < y_2$ の場合：

$$W = (w_1, y_2, x_3, \cdots, x_n), \quad \text{ただし} \quad w_1 = \frac{x_1 x_2}{y_2} \leq x_1$$

とすると、$W \in \mathbb{R}_+^n(\downarrow)$ そして、 $X \succ_{\log} W \succ_{\log} Y$ が分かるので 補題３から、$S_X \geq S_W \geq S_Y$ を得る。

6．不変量． 最後に、S_X が不変量としては、不完全であること言及しておきたい。

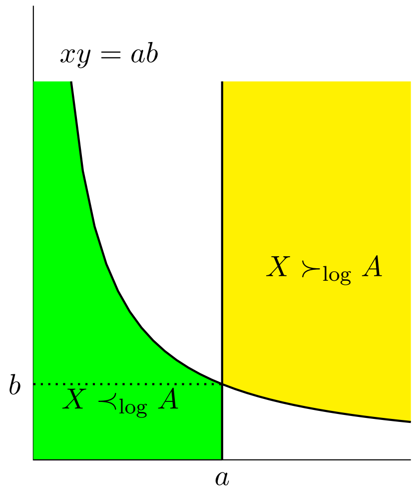
例７． $A=(12,\frac{1}{3},\frac{1}{4}), B=(10,\frac{1}{2},\frac{1}{5})$ とすると、

$$S_A=\frac{1}{12}+3+4=7\frac{1}{12};\qquad S_B=\frac{1}{10}+2+5=7\frac{1}{10}$$

より、$S_A\le S_B$ ではあるが、A,B の間に log-majorization の関係はない。

例８． $X=(2+\sqrt{3},1,2-\sqrt{3}), Y=(3+\sqrt{7},\frac{1}{2},3-\sqrt{7})$ とすると、$S_X=S_Y=5$ であるが、A,B の間に log-majorization の関係はない。

例９． $A=(a,b,\frac{1}{ab})$ に対して、$X=(x,y,\frac{1}{xy})$ が、$X\succ_{\log}A$ 及び $X\prec_{\log}A$ となる領域は次のようになる：



７．あとがき — りくりゅうの金メダル

冬季オリンピックの後、金メダルを取ったりくりゅうの話題が賑やかである（以下）：

りくりゅう“最大の謎”「木原龍一はなぜ、三浦璃来を片手で持ち上げられるのか？」高橋成美が４年前に語っていた“その要因”「足の筋肉がすごい」

基礎のスケーティングの相性の良さが、高い演技構成点に繋がっているという。昨季の世界選手権では平均７点台中盤だった PCS が、NHK 杯では８点台中盤と、劇的なランクアップを果たした。

「歩き方にも速い人と遅い人がいるように、スケーティングも『ホワンホワン』や『グワングワン』というようなそれぞれの感覚があるのですが、それが２人は合っています。またお互い下半身が強く腰を低くして滑るタイプで、エッジの押す方向や、エッジを置く位置まで似ている。だから２人で滑ると、足し算ではなく、かけ算になってスピードが出るんです」

上記の最後の文章を、ここでの話に翻訳すると、

「だから２人で滑ると、majorization ではなく、log-majorization になってスピードが出るんです」

ということになるのではないかと。

＊ 2025年度決算予算表
(2025年/1/1−/12/31)

収　入			
科　　　目	25年度実績	25年度予算	26年度予算
前年度繰越金	−		
	−		
刊行物頒布代(書店)		270,000	57,000
刊行物頒布代(書店)海外＄より	661,525	700,000	250,000
賛助会員(機関会員)	212,000	216,000	70,000
正会員(国内)	359,960	450,000	350,000
ページチャージ・別刷	1,500	30,000	8,000
事務所解約保証金(特別収入項目)			
設備更新積立金			
(イ)減価償却積立金取り崩し分			
(ロ)回転資金取り崩し分			
(ハ)事務機購入積立金取り崩し分			
預金利子	164,160	180,000	180,000
($→¥:調整項目)	1,521,589	1,282,500	1,342,500
雑収入			
合　　　計	2,920,734	3,128,500	2,257,500

支　出			
科　　　目	25年度実績	25年度予算	26年度予算
通信交通輸送費(ｲ+ﾛ+ﾊ)	72,035	150,000	30,000
(ｲ)　編集通信交通費			
(ﾛ)　査読通信費			
(ﾊ)　抜刷等輸送費	72,035	150,000	30,000
原稿料			
租税公課			
印刷費	447,730	650,000	140,000
組版委託費・書籍整理費			
SE委託費(加藤・小川)	258,460	180,000	200,000
消耗品代(⇒雑費へ)			
備品代(OA機器購入費、PDFsoft、本代)	24,000	62,000	24,000
人件費	1,039,000	1,100,000	850,000
借事務所代	775,810	768,000	768,000
電話代(インターネット、サーバ利用料含)	102,981	60,000	60,000
振込料・手数料・インボイス関連費用	21,112	25,000	22,000
電気代	49,130	40,000	55,000
保険料(労働保険・損保)	3,740	3,500	3,500
家賃保証料	−	−	−
税金・印紙等	70,000	70,000	70,000
会費(学術団体)	−		
雑費(雑誌保管費用含)	56,732	20,000	35,000
会議費			
		−	
		−	
合　　　計	2,920,730	3,128,500	2,257,500

2025年度　　　　貸借対照表
(2025/1/1-2025/12/31)

(￥)会計

借方			貸方		
科　目	期　首	期　末	科　目	期　首	期　末
			協会活動予備資金		
[流動資産]	217,995	338,257	出版基盤強化積立金	500,000	500,000
(定期預金)			TOTAL INDEX 積立金	414,993	414,993
			未払費用		
(普通預金)	217,995	338,257	IT機器積立金		
(現金)			事務所移転積立金		
			事務機購入積立金		
			減価償却積立金		
(安全資産ファンド)	6,873,301	6,873,301	回転資金		
			繰越金	5,958,308	6,296,565
合　計	7,091,296	7,211,558	合　計	6,873,301	7,211,558

外貨会計(PRESTIA)

借方			貸方		
科　目	期　首	期　末	科　目	期　首	期　末
			協会活動予備資金	$33,335.55	$38,565.67
[流動資産]			IT機器積立金		
定期預金(★)	$31,756.56	$32,746.50	＄ー￥準備金		
普通預金(★)	$1,578.99	$5,819.17	繰越金		
$国債2(★)	$0.00	$0.00	合　計　＄	$33,335.55	$38,565.67
合　計＄	$33,335.55	$38,565.67			
(ユーロ)(★)	€ 0.00	€ 0.00	(ユーロ)	€ 0.00	€ 0.00
￥マルチマネー	0	0	￥マルチマネー	0	0
￥普通預金	4,693,701	2,248,959	￥普通預金	4,693,701	2,248,959

数理科学推進基金会計

借方			貸方		
科目	期　首	期　末	科目	期　首	期　末
清水基金	1,000,000	1,000,000	ISMS受賞基金	1,000,000	1,000,000
功力基金	100,000	100,000	国際研究交流基金	1,737,510	1,737,510
石原	2,000,000	2,000,000	通信費	0	0
その他	538,580	538,580	交通費	0	0
			繰越金	901,070	901,070
合計	3,638,580	3,638,580	合計	3,638,580	3,638,580

★印は、為替相場変動リスクあり。外貨会計　￥マルチマネー口座は、￥普通預金口座に統一された。