一般社団法人
国際数理科学協会会報

No.128/2024.4

目次

＊寄稿

行列版富田竹崎理論についてのメモ

大阪教育大学　教育協働学科　藤井淳一

富田竹崎理論と言えば、作用素環の中でもIII型von Neumann環と言われる無限中の無限の深い話で、富田稔先生の正に深い試行に基づく結果を、ゼミナールの討論によって多くの記述の不十分さの批判に耐え抜いた後に [10]、竹崎正道先生によってKMS状態などの物理的概念とも繋げられたことで、今や物理学者たち [8] にもこの名が知られるようになった伝説の理論です。一方半有限型で導入された（量子）相対エントロピーとも呼ばれる梅垣壽春先生によるエントロピー [12] は、その後荒木不二洋先生によってこの環境に拡張されました [1]。かの Witten [13] はこの荒木エントロピーを使ってブラックホールエントロピーを論じています。この概念の物理的道具となっているのは、AdS-CFT対応のCFT（共形場）の方の「エンタングルメントエントロピー」で、元々単独の「エンタングル状態」(cf.[3]）に reduce したものを von Neumann エントロピーで計算するものです [9]。これについて相対エントロピーを導入して有利な所は、その（固定された）エンタングル状態と、自由に動く分離状態の2量による相対エントロピーの最小値になっていることで、非常に性質も計算上も理解しやすいものになるからです [5, 4, 9]。たとえばエンタングルメントエントロピー自身は、分離状態との相対エントロピーの最小値によって「距離」を求めることになり、まさに「エンタングルの度合い」を表しているでしょう。
ただ、応用とつながったとはいえ作用素環の専門外では、Witten のようにフィールズ賞を取るほど数学に精通している人はやはり少なく、（近隣住民の著者も十分理解しているとはいいがたいので）もう少し簡便にこの理論のエッセンスを知りたいと思うの気持ちはよくわかります。恐らくそういう経緯で、III型と対極にあるような「行列」理論で、富田竹崎理論の恩恵を受けられないかという議論が出てきたのではないかと推察されます。昔院生時代に同じような気持ちで、簡略表現に挑戦したことがあったのですが、当時は見事撃沈しました。ここでは、それをある程度実現してくれた、Bagarello[2] による解釈の一端を、記事の穴埋めとして簡単に紹介したいと思います。
そのもとになる議論としての Zhang-Wu [14] の話は詳説できませんので、ここで彼らの unification と呼ばれる Hiai-Kosaki 平均 [6] に通じる議論をノートしておきます（可分な Hilbert 空間で定義できるの

で、無限次元との関連をつけていますが、簡単のため行列にします)。これらは実際は、Bagarello さんたち [2, 11] の方法であり、荒木相対エントロピーは Ruskai ら [7] の視点で述べます。
まず、(有限次元) Hilbert 空間 $\mathbb{H} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$ を HS クラスの行列とみます：

$$X, Y\ _{HS} = \mathrm{Tr}\,(X^* Y) \quad \text{for} \quad (X, Y \in \mathbb{H}).$$

行列単位 $E_{jk} = e_k \otimes e_j^*$ を基底として固定し、$B(\mathbb{H})$ を、トレースクラスの掛け算作用素と見て、新たに $\mathbb{H}$ の (adjoint こみの) テンソル積 $\boxtimes$ を考えます：

$$(A \boxtimes B)X = AXB^*.$$

$\mathbb{1} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}},\ \mathbb{1}_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ とすると、

$$(1)\ (A \boxtimes B)^* = A^* \boxtimes B^*, \qquad (2)\ (A_1 \boxtimes B_1)(A_1 \boxtimes B_2) = A_1A_2 \boxtimes B_1B_2$$

が成り立ちます。

$$\mathcal{A}_\ell = \{A_\ell \equiv A \boxtimes \mathbb{1} \,|\, A \in L(\mathcal{H})\}, \qquad \mathcal{A}_r = \{A_r \equiv \mathbb{1} \boxtimes A \,|\, A \in L(\mathcal{H})\}$$

とすると、ℓ, r の可換性より、$A_\ell B_r = B_r A_\ell$, i.e., $[A_\ell, B_r] = 0$ となり、これらは互いに交換子になっていて、センターはスカラー $\mathbb{C}\mathbb{1}_2$ になります (作用素環では因子と呼ばれます)。adjoint は $\boxtimes$ に吸収されているので、J は $JE_{jk} = E_{kj} = E_{jk}^*$ で決めると、$J^2 = \mathbb{1}$ で、

$$JA_\ell JX = JA_\ell X^* = J(AX^*) = XA^* = A_r X,$$

より、$JA_\ell J = A_r$、即ち、$J\mathcal{A}_\ell J = \mathcal{A}_r$ です。
ここで、$\sum_j w_j = 1$ となる**正係数** weight について、

$$\Omega = \sum_j \sqrt{w_j} E_{jj} \in \mathbb{H}$$

とすれば、正定値行列 $\mathcal{A}_\ell$ の state ω を以下で定めると (忠実且つ正規になり)、purification として derivative

$$D_\omega = \Omega\Omega^* = \sum_j w_j E_{jj}$$

が採れます:

$$\omega(A \boxtimes \mathbb{1}) \equiv \Omega, (A \boxtimes \mathbb{1})\Omega\ = \mathrm{Tr}\,(D_\omega A).$$

ここで、Ω は $\mathcal{A}_\ell$ の巡回且つ分離ベクトルになり、富田竹崎理論につながります。
次にワンパラメータ群を考えます。$\mathbf{P}_{jk} = E_{jj} \boxtimes E_{kk}$ は $\mathbb{H}$ 上の射影作用素になるので、正定値行列 D_ω から、可換作用素 H_ω を $\beta > 0$ について

$$H_\omega = -\frac{1}{\beta} \log D_\omega = -\frac{1}{\beta} \sum_j (\log w_j) E_{jj}, \quad (D_\omega = \exp(-\beta H_\omega))$$

で定め、

$$\mathbf{H}_\omega = H_\omega^\ell - H_\omega^r = H_\omega \boxtimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \boxtimes H_\omega = -\frac{1}{\beta} \sum_{j,k} \log \frac{w_j}{w_k} \mathbf{P}_{jk}$$

となり、**modular operator** Δ_ω を

$$\Delta_\omega = -\frac{1}{\beta} \sum_{j,k} \frac{w_j}{w_k} \mathbf{P}_{jk}$$

で定めることができます。
そこで、ある時間発展 $\exp(i\mathbf{H}_\omega t) = \Delta_\omega^{-\frac{it}{\beta}}$ を考えると、これで不変

$$\exp(i\mathbf{H}_\omega t)X = \exp(ih_\omega t)X\exp(iH_\omega) = \Omega$$

となり、本来の時間発展

$$\sigma_t^\omega(A_\ell) = \exp(i\mathbf{H}_\omega t)A_\ell\exp(-i\mathbf{H}_\omega t)$$

は、**KMS 条件**を満たします:

$$w(B_\ell\sigma_{t+i\beta}^\omega(A_\ell)) = w(B_\ell\sigma_t^\omega(A_\ell))$$
$$F_{A\ell,B_\ell}({}_\ell\sigma_t^\omega(A_\ell)):\ \text{analytic in } \{z|0<\operatorname{Arg} z<\beta\} \quad \text{更に境界上で連続.}$$

この流れで行くと、anti-linear な S は、逆に

$$S = J\sqrt{\Delta_\omega}$$

で定義され、もちろん $S(X\Omega) = A^*\Omega$ を満たすという形になります（ので、不要かもしれません)。
さて、Ruskai ら [7] は

$$\Delta_{AB} = \mathbf{L}_A\mathbf{R}_B^{-1}$$

として、相対モジュラー作用素を考え、（其の儘有限次元だと $-\Omega, (\rho\log\Delta_{\rho\sigma})\Omega$ は梅垣エントロピーなので）相対エントロピーを一般化しています。我々の周辺ではよくやる話ですが、さらにパラメータ化して Tsallis 的関数

$$g_p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p(1-p)}(x-x^p) & p\neq 1 \\ x\log x & p=1 \end{cases}.$$

を考え、Wigner-Yanase-Dyson の一般化相対エントロピー

$$\begin{aligned} J_p(K,A,B) &\equiv \operatorname{Tr}\sqrt{B}K^*g_p(\Delta_{AB})K\sqrt{B} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{p(1-p)}(\operatorname{Tr}(K^*AK - K^*A^pKB^{1-p}) & p\in(0,1)\cup(1,2) \\ \operatorname{Tr}(KK^*A\log A - K^*AK\log B & p=1 \\ -\dfrac{1}{2}\operatorname{Tr}(K^*AK - AKB^{-1}K^*A) & p=2 \end{cases} \end{aligned}$$

を定義して双凸性も示しています。勿論 $p=1, K=1$ で通常の（梅垣）相対エントロピーであり、作用素平均的対称性

$$J_p(K^*,B,A) = J_{1-p}(K,A,B)$$

も言えます。この時、こっそりと transpose

$$\tilde{J}_p(K,A,B) \equiv \operatorname{Tr}\sqrt{B}K^*\tilde{g}_p(\Delta_{AB})K\sqrt{B} \qquad \text{where } \tilde{g}_p = x, g_{1-p}(x) = \begin{cases} \frac{1}{p(1-p)}(1-x^p) & p\neq 0 \\ -\log x & p=0 \end{cases}$$

も導入しています。
ほんの触りにすぎませんが、上記のような形で行列版富田竹崎理論が展開できます。御本家に関わった方々はおそらくあまりお気に召さないと思いますが、有限次元主体の量子情報理論ではかなり有用な物になっていくのではないかと期待しています。

参考文献

[1] H.Araki, Relative entropy of states of von Neumann elgebras, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **11** (1976), 809–833.

[2] F.Bagarello, Modular structures and Landau levels in “Quantum Probability and Related Topics”, 34–51, World Scientific, 2010.

[3] 藤井淳一, 量子もつれと分離状態, 国際数理科学協会会報, **123**(2023), 3–9.
https://www.jams.jp/kaiho/kaiho-123.pdf

[4] 藤井淳一, Entanglement の周辺, 数学教育研究, 大阪教育大学数学教育講座, **52**(2023), 121–139.

[5] 日合文雄, 行列解析から学ぶ 量子情報の数理 (SGC ライブラリ 183) , サイエンス社, 2023.

[6] F.Hiai and H.Kosaki, Means of Hilbert Space Operators (Lecture Notes in Mathematics 1820), Springer, 2003.

[7] A.Jenčová and M.B.Ruskai, A unified treatment of convexity of relative entropy and related trace functions, with conditions for equality, Reviews in Mathematical Physics, bf 22(09)(2010), 1099–1121.

[8] 大栗博司, 量子重力の条件, 仁科記念講演会プレゼン資料, 2019.5
https://www.nishina-mf.or.jp/wp/wp-content/uploads/2020/08/2019Lecture_0830y.pdf.

[9] M.Rangamani and T.Takayanagi, “Holographic Entanglement Entropy”, Springer, 2017.

[10] 竹崎正道, 作用素環論の歴史 (50 年の歩みと日本の伝統), 数学, **35**(1983), 158–165

[11] S.Twareque Ali, F.Bagarello and G.Honnouvo, Modular structures on srace slass operators and applications to Landau levels, J. Phys. A: Math. Theor., **43**(2010), 105202.

[12] H.Umegaki, On information in operator algebras, Proc. Japan Acad., **37**(1961), 459–461.

[13] E.Witten, Monotonicity of Relative Entropy In Quantum Field Theory, 2018（プレゼン資料）
https://member.ipmu.jp/yuji.tachikawa/stringsmirrors/2018/117.pdf

[14] L.Zhang and J.Wu, Tomita-Takesaki theory vs. quantum information theory, arXiv.:1031.1836, 2016.

＊　2023年度決算予算表
（2023年/1/1–/12/31）

収　入			
科　　目	23年度実績	23年度予算	24年度予算
前年度繰越金	–		
	–		
刊行物頒布代（書店）	503,900	300,000	300,000
刊行物頒布代（書店）海外＄より	600,650	600,000	600,000
賛助会員（機関会員）	293,516	270,000	270,000
正会員（国内）	621,000	580,000	580,000
ページチャージ・別刷	23,183	50,000	50,000
事務所解約保証金（特別収入項目）			
設備更新積立金			
（イ）減価償却積立金取り崩し分			
（ロ）回転資金取り崩し分			
（ハ）事務機購入積立金取り崩し分			
預金利子	388	500	150,000
（$→¥:調整項目）	1,372,602	1,429,200	1,311,700
雑収入			
合　　計	3,415,239	3,229,700	3,261,700

支　出			
科　　目	23年度実績	23年度予算	24年度予算
通信交通輸送費(ｲ+ﾛ+ﾊ)	285,797	150,000	170,000
(ｲ)　編集通信交通費			
(ﾛ)　査読通信費			
(ﾊ)　抜刷等輸送費	285,797	150,000	170,000
原稿料		–	–
租税公課			
印刷費	594,969	550,000	550,000
組版委託費・書籍整理費	–	50,000	–
SE委託費（辻本/清家/加藤）	197,890	200,000	230,000
消耗品代		–	–
備品代（OA機器soft,本代，サーバ）	61,525	40,000	60,000
人件費	1,214,800	1,200,000	1,200,000
借事務所代	811,260	810,000	810,000
電話代(インターネット含)	69,055	70,000	70,000
振込料・手数料	30,967	18,000	30,000
電気代	34,442	40,000	40,000
保険料（労働保険・損保）	5,730	6,700	6,700
家賃保証料	14,180	15,000	15,000
税金・印紙等	70,000	70,000	70,000
会費(学術団体)			
雑費	24,624	10,000	10,000
会議費			
新企画調査費	–		–
		–	
	–	–	
合　　計	3,415,239	3,229,700	3,261,700

2023年度　　　　　貸借対照表
(2023/1/1-2023/12/31)

(￥)会計

借方			貸方		
科目	期首	期末	科目	期首	期末
			協会活動予備資金		
[流動資産]	924,182	1,347,837	出版基盤強化積立金	500,000	500,000
(定期預金)			TOTAL INDEX 積立金	414,993	414,993
			未払費用	11,044	0
(普通預金)	924,182	1,347,837	IT機器積立金		
(現金)			事務所移転積立金		
			事務機購入積立金		
			減価償却積立金		
(安全資産ファンド)	6,873,301	6,873,301	回転資金		
			繰越金	6,871,446	7,306,145
合計	7,797,483	8,221,138	合計	7,797,483	8,221,138

外貨会計(PRESTIA)

借方			貸方		
科目	期首	期末	科目	期首	期末
			協会活動予備資金	$33,797.19	$28,165.37
[流動資産]			IT機器積立金		
定期預金(★)	$1,080.90	$21,111.66	＄－￥準備金		
普通預金(★)	$32,716.29	$7,053.71	繰越金		
$国債2(★)	$0.00	$0.00	合計＄	$33,797.19	$28,165.37
合計＄	$33,797.19	$28,165.37			
(ユーロ)(★)	€ 0.00	€ 0.00	(ユーロ)	€ 0.00	€ 0.00
￥マルチマネー	5,516,210	0	￥マルチマネー	5,516,210	0
￥普通預金	1,117,007	5,555,174	￥普通預金	1,117,007	5,555,174

数理科学推進基金会計

借方			貸方		
科目	期首	期末	科目	期首	期末
清水基金	1,000,000	1,000,000	ISMS受賞基金	1,000,000	1,000,000
功力基金	100,000	100,000	国際研究交流基金	1,737,510	1,737,510
石原	2,000,000	2,000,000	通信費	0	0
その他	538,580	538,580	交通費	0	0
			繰越金	901,070	901,070
合計	3,638,580	3,638,580	合計	3,638,580	3,638,580

★印は、為替相場変動リスクあり。外貨会計　￥マルチマネー口座は、￥普通預金口座に統一された。