一般社団法人

国際数理科学協会会報

No.127/2024.1

編集委員： 藤井淳一（委員長）

目次

松岡勝男先生新理事就任のご報告

代表理事　植松康祐

国際数理科学協会の皆様方に置かれましては、時下ますますご清栄のこととお慶び申し上げます。

さて、11 月 16 日に行われました臨時社員総会では、貴重なご回答をいただきまして、誠にありがとうございました。

総会では、新理事の追加選任に関する投票が行われ、11 月 30 日の締め切り日までに到着した全ての投票が賛成であるという結果になりました。このたび、松岡勝男先生（日本大学経済学部グローバル社会文化研究センター）が、一般社団法人国際数理科学協会の新理事に就任することが決定いたしました。

松岡先生はその豊富な経験と専門知識をもって、協会の更なる発展に寄与していただけることでしょう。 ご多忙の中、ご参加いただきました代議員の皆様に心より感謝いたします。今後も、協会活動にご理解とご協力を賜りますようお願い申し上げます。

＊寄稿

堺・開口神社奉納算額
— 軌跡を辿る —

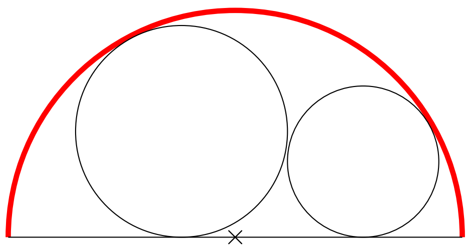
藤井正俊（大阪教育大学名誉教授）

1．はじめに． 表題の開口神社は、大阪府堺市の旧市街にある神社で「あぐち」と読む。奈良時代神功皇后により創建され、開口水門姫神社と称されていたと言い伝えられている。堺の港を護る役割を持ち、最古の国道と言われる竹ノ内街道の西端に位置している。また、堺市に隣接する狭山市にある日本最古の人工溜池「狭山池」を改修した行基により同じ境内に念仏寺が建立され、現在では、開口神社は「大寺さん」と呼ばれている。

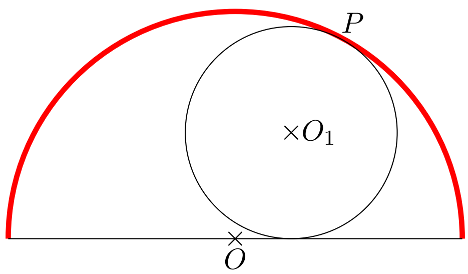
さて、算額については、これまで、大和川以南には存在していないとされていた（近畿数学史学会の調査）。しかし実はあった。平成２７年、狭山町史に 算額絵馬の奉納についての記述が発見され、翌２８年開口神社に 11 問から成る算額があることが明らかになった, cf. [1]。

その後、それらの問題は、「教材化」という視点で世に出ることになった, e.g. [2], [3]。ここで議論の対象にするのは、開口神社算額　第３問 [2] である。

第３問.　図のように、半円の中に２つの円が内接している。２つの円半径をそれぞれ a, b とするとき、半円の半径を求めよ。

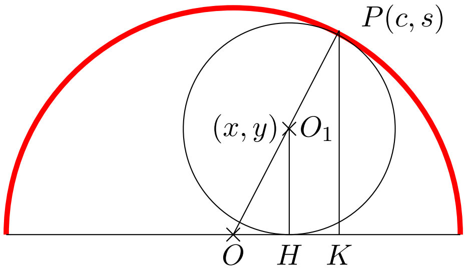


２．軌跡を辿る． この問題に遭遇したとき、数学的興味はどのような形で浮かび上がってくるだろうか? まず、内接する円が１つある場合について、想いを巡らせるのが普通ではないだろうか。そのとき、元の問題とは裏腹に、半円が与えられているとして、その中で内接円がどのような振る舞いをするかを妄想する「軌跡を辿る」旅に出てみたい。



まず、「内接円の中心は、半円との接点と半円の中心を結ぶ線分上にあることに気付く：

以下、簡単とするのために、半円の中心を原点 O, 半径を１とする．内接円の中心 O_1 の座標を (x, y), 接点 P の座標を (c, s) とすると、



ここで、$\triangle OPK$ と $\triangle OO_1H$ が相似であることと $O_1P = O_1H = y,\ OK = c$ に注意すると、$OO_1 = OP - O_1P = 1 - y$ より、

$$(1-y) : y : x = 1 : s : c$$

従って、$(1-y) : y = 1 : s$　より、

$$y = \frac{s}{s+1} \ \Rightarrow\ x = \frac{cy}{s} = \frac{c}{s} \cdot \frac{s}{s+1} = \frac{c}{s+1}$$

を得る。これを利用することによって、次の事が知られる：

定理 1． 中心が原点、半径 1 の円に内接する円の中心の軌跡は、

$$y = \frac{1}{2}(1-x^2) \quad (-1 \le x \le 1)$$

である。

証明． 証明は、上で注意した $x = \dfrac{c}{s+1},\ y = \dfrac{s}{s+1}$ を使うだけである：

$$\frac{1}{2}(1-x^2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c^2}{(s+1)^2}\right) = \frac{(s+1)^2 - (1-s^2)}{2(s+1)^2} = \frac{s}{s+1} = y$$

（舞台裏）　$x = \dfrac{c}{s+1},\ y = \dfrac{s}{s+1}$ から、c, s を消去すればよいので、$c^2 + s^2 = 1$ より、

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{(s+1)^2} \ \Rightarrow\ \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{s+1} \ \Rightarrow\ y = 1 - \frac{1}{s+1} = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$$

これより、

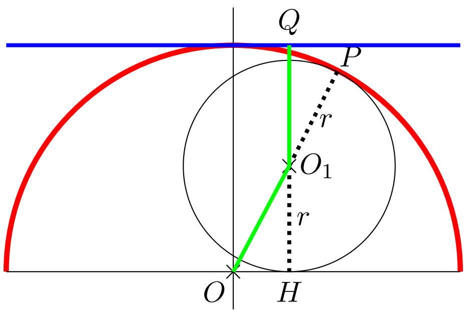
$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 - y \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 = (1-y)^2$$

普通に整理することによって、

$$y = \frac{1}{2}(1-x^2) \quad (-1 \le x \le 1)$$

が導ける。

（舞台の袖では）　準と翔の双子がじっとその図形（下図）を見ていた。



二人は気が付いた： 中の円の半径を r とすると、$O_1O = 1 - r = O_1Q$. なぜなら、

$$O_1O = PO - PO_1 = 1 - r;\ O_1Q = QH - O_1H = 1 - r$$

即ち、O_1 は、焦点が O, 準線が $y = 1$ の放物線上にある、ということである。明らかに、それは $(-1,0), (0,\frac{1}{2}), (1,0)$ を通るので、定理１の形となる。「何も計算は要らない。」パラパラと賞賛の拍手。

半径が R の場合には、次のように調整できる：

定理 R. 中心が原点、半径 R の半円に内接する円の中心の軌跡は、

$$y = \frac{R^2 - x^2}{2R} \quad (-R \leq x \leq R)$$

である。

証明. 証明は、上で注意した $x = \dfrac{cR}{s+1}, y = \dfrac{sR}{s+1}$ を使うだけである：

$$\frac{R^2 - x^2}{2R} = \frac{1}{2R}(R^2 - \frac{c^2R^2}{(s+1)^2}) = \frac{R((s+1)^2 - (1 - s^2))}{2(s+1)^2} = \frac{sR}{s+1} = y$$

（舞台裏） $x = \dfrac{cR}{s+1}, y = \dfrac{sR}{s+1}$ から、c, s を消去すればよいので、$c^2 + s^2 = 1$ より、

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{(s+1)^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{R}{s+1} \Rightarrow y = R(1 - \frac{1}{s+1}) = R - \sqrt{x^2 + y^2}$$

これより、

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R - y \Rightarrow x^2 + y^2 = (R - y)^2$$

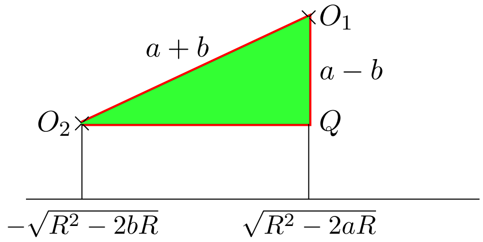
普通に整理することによって、

$$y = \frac{R^2 - x^2}{2R} \quad (-R \leq x \leq R)$$

が導ける。

３．第３問の解答. さて、定理Ｒを道具として、第３問を解いていく。

解答. 定理Ｒより、半径 R の半円に内接する円 (半径 a) の中心 (x, y) は、$y = \dfrac{R^2 - x^2}{2R}$ をみたしているので、$x^2 = R^2 - 2aR$ より、$x = \pm\sqrt{R^2 - 2aR}$ がわかる。そこで、必要な部分を図示すると、次のようになる。



直角三角形 O_1O_2Q にピタゴラスの定理を使うと、

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = O_2Q^2 = (\sqrt{R^2 - 2aR} + \sqrt{R^2 - 2bR})^2$$

これで、R の方程式になっているので、整理しながら、これを解けばよい。

$$
\begin{aligned}
&(R^2-(a+b)R-2ab)^2=(R^2-2aR)(R^2-2bR)\\
&((a+b)R+2ab)^2=8abR^2\\
&(a+b)R+2ab=2\sqrt{2ab}R\\
&R=\frac{2ab}{2\sqrt{2ab}-(a+b)}
\end{aligned}
$$

（注１）普通に整理していくと、R の２次方程式

$$(a^2-6ab+b^2)R^2+4a(a+b)R+4a^2b^2=0$$

が得られる。そこで解の公式を使い、逆有理化をしてもこの解に到達できる。ただし、

$$a^2-6ab+b^2=(a+b)^2-8ab=((a+b)-2\sqrt{2ab})((a+b)+2\sqrt{2ab})$$

を意識しておく必要はある。

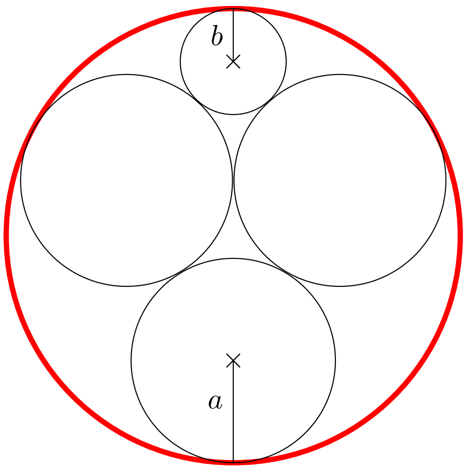
（注２）O_1, O_2 の x 座標は、$\pm\sqrt{R^2-2cR}(c=a,b)$ のいずれの場合も起こり得る。だから、

$$(a+b)^2-(a-b)^2=O_2Q^2=(\sqrt{R^2-2aR}\pm\sqrt{R^2-2bR})^2$$

としなければならない。でも、幸いなことにそれ以降については、修正の必要はない。なお、上記のようなやり方の場合は、このような紛れは回避できるので、小さな工夫の余地を地道にするべきではないかと思う次第である。

４．開口神社算額 第４問． 次に、開口神社算額 第４問 [3] について考察する。

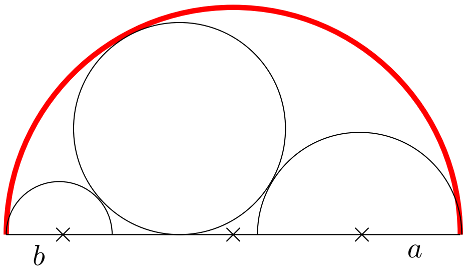
第４問． 図のように、円 D の中に４つの円が内接し、それらは互いに下図のような形で外接している。なお、中段の２つの円は同じ大きさとする。 上段と下段の２つの円の半径がそれぞれ a, b のとき、円 D の半径 R を a, b を用いて表せ。



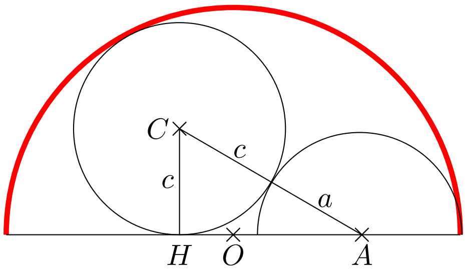
第４問の提示解　$R=\sqrt{(a+b)^2+3ab}+a+b$ と示されている。（筆者の誤解かもしれない。）

この問題を、丁度半分に切った形で提示したのが、下記の問題４である。この意図は、定理Ｒをそのまま使える形になっているからである。実際にこの方が無駄がなく、しかもこの問題の１つ前に出されている問題（第３問 [2]）との連関がよりはっきりすることにもよる。

問題４.　図のように、半円 D の中に１つの円と２つの半円が内接している。２つの半円の半径がそれぞれ a, b のとき、半円 D の半径 R を a, b を用いて表せ。



解答の第一段階としてまず、半円を１つだけにして話を進める。実際、半円を１つ決めれば、それと大きな半円に外接するもう１つの半円は、きっちりと決まってしまうので、この意味でも円と半円という設定で始めるが妥当である。



ところで、定理Ｒは、中心が原点、半径 R の半円に内接する円の中心の軌跡は、

$$y = \frac{R^2 - x^2}{2R} \quad (-R \leq x \leq R)$$

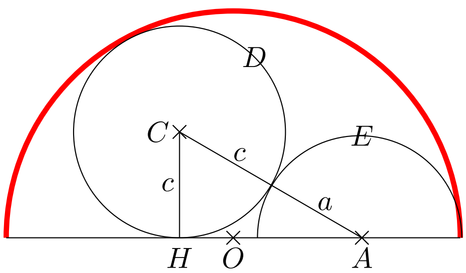
であると言っていた。これを基点に $c = y$ として次の定理が得られる：

定理 C.　中心が原点、半径 R の半円に内接し、互いに外接する円 D と半円 E がある。半円 E の半径が a のとき、円 D の中心の座標は、

$$(x_0, c) \equiv \left(x_0, \frac{R^2 - x_0^2}{2R} \right), \qquad \text{ただし } x_0 = \frac{R^2 - 3aR}{R + a}$$

である。

証明.　下図との対応で言えば、$H(x_0, 0)$, $C(x_0, c)$ の成立を定理は主張している。



直角三角形 $\triangle ACH$ において（上図では $x_0 < 0$ なので）$AH = R - a - x_0$ より

$$c^2 + (R - a - x_0)^2 = (a + c)^2$$

これを整理すると、$x = x_0$ の 2 次方程式

$$(R + a)x^2 - 2R(R - a)x + R(R^2 - 3aR) = 0$$

自明解 $x = R$ を妄想できれば、因数分解が可能なことに到る：

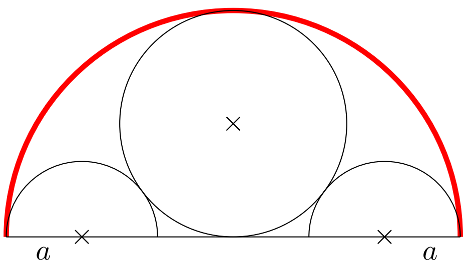
$$((R + a)x - (R^2 - 3aR))(x - R) = 0$$

従って、$x_0 = \dfrac{R^2 - 3aR}{R + a}$ が得られる。なお、y 座標の値 $\dfrac{R^2 - x_0^2}{2R}$ については、定理 R の結果そのものである。

(注)　大きな半円が与えられたとき、それに内接する半円に対して、円 D は、unique に定まる。この逆も成立する。

一方、外接する円と半円が与えられたとき、それに外接する半円も unique に定まる。

最も簡単な例.　中央の円の半径は $\dfrac{3}{2}$, 両脇の半円の半径は 1 とすると、外接する半円の半径は丁度 3 になる。つまり、$a = b = 1$ のとき、$R = 3$ となる。



実際、この特別な場合には、$R = 3a$ という極めて簡単な形になる。このことは、

$$\left(a + \frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R - a)^2$$

を整理すれば、ほぼ $R = 3a$ という関係が得られる。従って、 第 4 問の解とされる $R = a + b + \sqrt{(a+b)^2 + 3ab}$ は、少し修正を迫られる。これをそのまま使うと、$R = 4a$ となり、ズレが生じる。後に、きっちりと計算するが、結果を言えば、次のように修正しなければならない：

第 4 問の解.　算額の中での解は、次のように記されている：

$$R = \frac{a + b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + 3ab}$$

(算額の解説の中で、a, b を直径ではなく、「半径」と読めばこの形になる。)

ここで、定理 C を更に使える形に整備する：

定理 C'.　中心が原点、半径 R の半円に内接し、互いに外接する円 D と半円 E がある。半円 E の半径が a のとき、円 D の中心の座標は、

$$\left(\frac{R^2 - 3aR}{R + a}, \frac{4aR(R - a)}{(R + a)^2}\right)$$

である。とりわけ、円 D の中心の y 座標の値 $\dfrac{4aR(R-a)}{(R+a)^2}$ がその半径である。

証明. 定理 C との違いは、y 座標の表記だけなので、その部分を以下計算すれば良い。
$x_0 = \dfrac{R^2-3aR}{R+a}$ なので、

$$\frac{R^2-x_0^2}{2R} = \frac{R^2((R+a)^2-(R-3a)^2)}{2R(R+a)^2} = \frac{R^2\times 4a(2R-2a)}{2R(R+a)^2} = \frac{4aR(R-a)}{(R+a)^2}.$$

第 4 問の解答. 定理 C' と中の円の唯一性（定理 C の後の (注) 参照）より、

$$\frac{4aR(R-a)}{(R+a)^2} = \frac{4bR(R-b)}{(R+b)^2}$$

が成立する。

$$\frac{a(R-a)}{(R+a)^2} = \frac{b(R-b)}{(R+b)^2}$$

R について、整理すると、

$$(a-b)R^2-(a^2-b^2)R-3ab(a-b)=0$$

$a-b\neq 0$ は除外して（cf. 最も簡単な例）よいので、

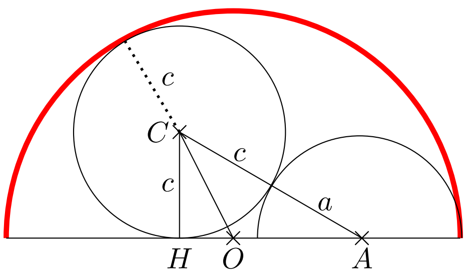
$$R^2-(a+b)R-3ab=0\ (R>0)$$

よって、

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}(a+b+\sqrt{(a+b)^2+12ab}) \\ &= \frac{a+b}{2}+\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+3ab}. \end{aligned}$$

これは、先に予告した第 4 問の正解である。

以下は、[2] の 2 つの直角三角形と使った議論を基にした別証明である。



$\triangle ACH$: $AC=a+c$ より

$$AH^2 = AC^2-CH^2 = (a+c)^2-c^2 = a^2+2ac$$

$\triangle OCH$: $OC=R-c$ より

$$OH^2 = OC^2-CH^2 = (R-c)^2-c^2 = R^2-2cR$$

これらと、$AH - OH = OA = R - a$ より得られる

$$R - a = \sqrt{a^2 + 2ac} - \sqrt{R^2 - 2cR}$$

を整理して、c について解いていく：

$$\begin{aligned}
(R-a)^2 - (R^2 + a^2 - 2c(R-a)) &= -2\sqrt{a^2+2ac}\sqrt{R^2-2cR} \\
2c(R-a) - 2aR &= -2\sqrt{a^2+2ac}\sqrt{R^2-2cR} \\
c(R-a) - aR &= -\sqrt{a^2+2ac}\sqrt{R^2-2cR} \\
(c(R-a) - aR)^2 &= (a^2+2ac)(R^2-2cR) \\
(R-a)^2c^2 - 2aR(R-a)c + a^2R^2 &= a^2R^2 + 2aR(R-a)c - 4aRc^2 \\
(R+a)^2c^2 - 4aR(R-a)c &= 0,\ \ c > 0
\end{aligned}$$

よって、求める c が得られる：

$$c = \frac{4aR(R-a)}{(R+a)^2}$$

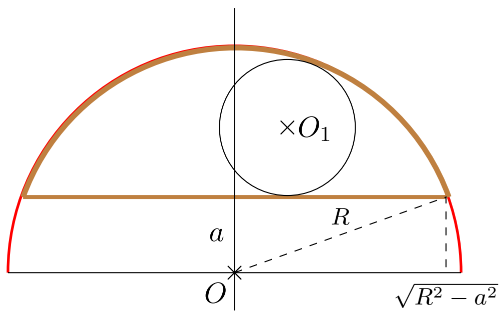
解答の後半部分は、上記のものと同じである。

定理 R の一般化. 本論において鍵となっている定理 R の一般化を与えておきたい：

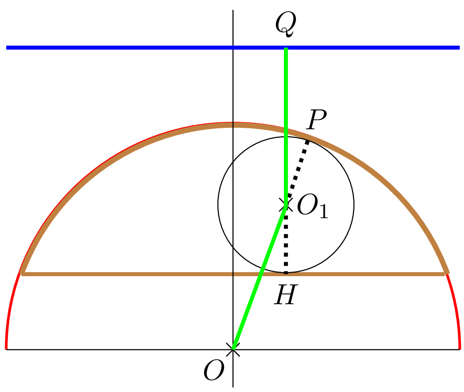
定理 S. 中心が原点、半径 R の円から $y = a$ $(R > a \geq 0)$ によって切り取られた図形 D に内接する円の中心の軌跡は、

$$y = \frac{(R+a)^2 - x^2}{2(R+a)} \qquad (-\sqrt{R^2-a^2} \leq x \leq \sqrt{R^2-a^2})$$

である。



証明の主要部分は、下図に内在されている。即ち、焦点は原点 O で、準線は、$y = R + a$ である。実際、小円の半径を r とすると、$OO_1 = QO_1 = R - r$ であることは、$OP = QH = R$ より容易に知られる。よって、問題の軌跡は放物線になることが分かる。



さらに、D の端点 $(\pm\sqrt{R^2-a^2}, a)$ を通ることより、この放物線は、ある $\beta < 0$ が取れて、

$$y - a = \beta(x^2 - (R^2 - a^2))$$

のように表せる。また、$(0, \frac{R+a}{2})$ を通ることより、$\beta = -\frac{1}{2(R+a)}$、つまり、軌跡は

$$y - a = -\frac{1}{2(R+a)}(x^2 - (R^2 - a^2)) = \frac{1}{2(R+a)}(R^2 - a^2 - x^2)$$

整理して、

$$y = \frac{(R+a)^2 - x^2}{2(R+a)}$$

となる。

（注）　$a = 0$ とすると、きっちり定理 R に戻る。

参考文献

[1] 野津喬　脇田卓弥　梅山真理子，大阪における算額の分布について, 和文化数学, 1 (2017), 59–70.

[2] 土田秀雄　新井洋　大矢根克典，泉州堺 開口神社奉納算額–第 3 問の解読と解答–, 和文化数学, 6 (2022), 49–53.

[3] 新井洋　赤土壽典，　泉州堺 開口神社奉納算額–第 4 問の解読と解答–, 和文化数学, 6 (2022), 54–60.