一般社団法人

国際数理科学協会会報

No.123/2023.1

編集委員： 藤井淳一（委員長）

目次

国際数理科学協会 2022年度年会のご報告（続報）

年会担当理事 濵田 悦生

10月に開かれたために、前回報告できなかった年会のご報告をいたします：

国際数理科学協会「確率モデルと最適化」分科会 2022年度年会

（日本オペレーションズ・リサーチ学会「確率最適化とその応用」（第3回目研究会）

主査 來島愛子（上智大学），幹事 堀口正之（神奈川大学），王琦（長崎総合科学大学）との共催）

世話役：北條仁志（大阪公立大学）
日時：2022年10月15日(土) 14:00 – 16:00
開催方法：Zoomによるオンライン形式
参加者：13名

14:05–14:25 **川中雄斗，北條仁志**（大阪公立大学）

『二種のハニーポットによる防御戦略の構築』

概要：
ネットワーク上でのシステムに対する攻撃と防御の相互作用の状況を攻撃者の攻撃方法や傾向を詳細に観察することができる高価な高対話型ハニーポットと安価であるが得られる情報量が少ない低対話型ハニーポットの二種類の防御機構を導入したモデルを提案した。ゲーム理論の概念であるシグナリングゲームを用いて定式化し、ゲームにおける一括均衡と分離均衡を導出した。

14:25–14:45 **安永直央** (大阪府立大学), **北條仁志** (大阪公立大学)

『木構造型ニューラルネットワークを用いた野球における勝率予測と解釈に関する研究』

概要：

事前に分岐構造を作成することによって意思決定者が望む抽象度で解釈を可能とする新たなニューラルネットワークモデルを提案した。提案モデルでは、モデル自体に解釈性を与えるように分岐構造を作成し、モデルに関わらず解釈性を付与する手法としてSHAPを利用している。野球データから勝率予測を行うことを目的として、データの特徴をチーム属性と攻守属性の２段階に分割したネットワークについての実験結果が示された。

14:45–15:05 **菊地湧也**，**堀口正之**（神奈川大学）

『フィッシャーとマハラノビスの判別分析と企業経営状態の予測妥当性評価の研究』

概要：

最適分離射影軸に射影したときの値と判別点を比較してどちらの群に属するかを予測する方法であるフィッシャーの線形判別分析の理論とその分析例について説明された。分析では総当たり法による変数選択を行い、情報量基準AICを最小にする変数の組合せを選択する。陸運業界において経営悪化や財政悪化の記事による情報をもとに貸借対照表および損益計算書のみで計算できる指標を説明変数ととらえたフィッシャーの線形判別分析の例が示された。

15:15–15:45　**北條仁志**，**田部直人** (大阪公立大学)，**橋本虎汰郎**（大阪府立大学）

『ネーミングゲームの理論と応用』

概要：

ネーミングゲームについて概説した。単語に重要度を付加した新たなモデルが提案された。数値実験では２つの単語において初期に所持する単語の割合に比例して各単語に収束することが示された。また、第三者からおすすめという形で単語が提供されるマルチプルヒアラーネーミングゲームの提案もされた。数値実験により導入時期および強調性と導入期間の重要性が示された。

＊寄稿

量子もつれと分離状態

大阪教育大学　教育協働学科　藤井淳一

はじめに

量子もつれは「エンタングルメント」と呼ばれる方が多くなりましたが、以前本会報 [2] でも、その量子暗号理論の応用について一度書かせていただきました。当初は有名な量子もつれ状態 EPR state に基づく EPR パラドクスが印象的で、「量子テレポーテーション」と呼ばれる量子現象について注目を集めていました。特に量子暗号への応用が主用途かと思われましたが、日本の量子もつれ研究の第一人者 古澤明氏自身によって、量子コンピュータの新しい方式「光量子コンピュータ」（量子もつれを利用して、量子光のパルス波形を制御するもの）として提唱され [6]、応用面の拡がりを見せていました。通常の汎用量子コンピュータは超電導的な性質を利用したりするので超低温環境が必須でしたが、この場合はそのような大掛かりな装置が不要な方式として、有望視されているものの一つです。

ところが、個人的に教養的な知識の参考としてよく見ている TV 番組の一つに、NHK-BS の「コズミックフロント」シリーズがありますが、ある回「相対論 vs. 量子論 事象の地平線と "異次元のダンス"」を見ていたら、なんとブラックホールのホライゾンの面積を特定する Beckenstein-Hawking エントロピー（cf. [3]）が関わってくることがわかりました。ドラマ仕立てでよくできていた内容でしたが、Hawing 自身がこの物質の情報消失領域としてのホライゾンに対する予想「ブラックホールに飲みこまれた物質の情報は永遠に失われる（ブラックホール情報パラドックス）」を立てましたが、それについて疑問があるとして、（トホーフトという名前の書き方が特殊なので印象に残っていましたが著名な）'t Hooft をはじめとする多くの科学者が名乗りを上げました。最終解決的に登場したのが日本の高柳匡さんの研究成果「エンタングルメントエントロピー」（形はフォンノイマンエントロピーそのもの）と等しいというものでした。何とごく狭い範囲の量子情報理論が、究極の重力理論と結びつくという、驚くべき内容でした [7]。理論的道具としては超弦理論、AdS/CFT 対応による次元のずれなどで、3 次元があたかも 2 次元から構成されるという事で「ホログラフィー原理」と呼ばれているものです。私自身フォンノイマンのエントロピーはよく知っているものですが、こんなに効果的に使われるのを見たのは初めてでした。また TV 番組に触発されて研究してみようと思ったのも初めての事でした。

しかし実行に移すとなると日ごろの不勉強が祟り、あらためて量子もつれの一般論やその否定としての分離状態について見直す必要がありました。一般論として理論的に理解するのに案外梃子摺ったこともあり、本論に到達するのはまだ難しい部分があって、ここではエントロピーにはほとんど言及できませんが、その背景の基礎知識についてまとめたノートとして公開させていただきたいと思います。

1. テンソル積と Schmidt 分解

基本的な Schmidt 分解すら、あまりわかってなかったので、あらためて述べておきます ([8])。その前に、関連事項として私自身の主たる研究対象としての作用素論の分野でよく知られている von Neumann-Schatten 積について注意しておきたいと思います。実はよく使用されている記号 $x \otimes y$ があまり適切ではありませんので、まずその話から入ります。通常のベクトルの Kronecker 積を考えるならば、記号としては $x \otimes y$ は単に次元の積に拡大されたベクトルにすぎず、行列になりえません。しかも、この場合

は実際に「行列としての転置共役との積」と等しいのです（工学系の資料では私が見る限り $\otimes$ は使われていません）。つまり、

$$x \otimes y^* = xy^*, \qquad (x \otimes y^*)z = xy^*z = \langle z, y \, z$$

とあらわすべきものです。これは正すべき「数学者の慣習」と思われます。これがベクトルから行列を構成する基本的手段であり、x, y が単位ベクトルなら xy^* は y を x に写す行列です。この話は容易に無限次元化できます。量子情報理論でいえば、状態ベクトル x の von Neumann-Schatten 積 xx^* が密度行列になります。

実際 Hilbert 空間上のコンパクト作用素 A について、2 つの CONS（完全正規直交系）$\{e_j\}$, $\{f_j\}$ で

$$A = \sum_j \lambda_j e_j \otimes f_j^* \qquad (\lambda_j \in \mathbb{C})$$

と書け（係数は 0 の可能性あり）、特にエルミットなら 1 つの CONS で

$$A = \sum_j \lambda_j e_j \otimes e_j^* \qquad (\lambda_j \in \mathbb{R})$$

となって（最細**スペクトル分解**）、量子状態を表す密度作用素なら、$\lambda_j \geqq 0$, $\sum_j \lambda_j = 1$ です。これらの分解は **von Neumann-Schatten 分解**と呼ばれています。

以後は 2 粒子系の話に限りますが、状態ベクトルとしてはそれぞれの状態が属する空間 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ のテンソル積空間 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ に属します。すると、それぞれの CONS$\{e_j\}$, $\{f_j\}$ によって、任意のベクトル $x \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ が

$$x = \sum_j \lambda_j e_j \otimes f_j \qquad (\lambda_j \in \mathbb{C})$$

とあらわされるというのが **Schmidt 分解**です。一応空間としては違ったものを想定しましたが、$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ の場合も含んでいるため、転置共役*の有無は重要で、このような話の場合、von Neumann-Schatten 積なら*をつけないといけないことが改めてわかるでしょう。

ただ、以下のように特異値分解を使うので、この分解では有限次元に限っておきます。

【Schmidt 分解の証明】テンソル積ですから一般のベクトル x は、各 CONS $\{g_j\}, \{h_k\}$ で、$\sum_{jk} a_{jk} g_j \otimes h_k$ と書けますが、行列 $A = (a_{jk})$ について、その転置共役の極分解 $A^* = W^*|A^*|$ で、有限次元なので W はユニタリでとれます。$|A^*| = \sqrt{AA^*}$ は非負固有値（A の特異値）$\lambda_j \geqq 0$ を対角成分に持つ対角行列 $\Lambda = \Lambda^*$ にユニタリ U で対角化できます（$\Lambda = U^*|A^*|U$）から、ユニタリ $V = U^*W$ を考えると、

$$A = |A^*|W = U\Lambda U^* W = U\Lambda V$$

と書けます（**特異値分解**）。U, V の成分表示を (u_{ij}), (v_{ij}) としておくと、

$$(a_{jk}) = \sum_\ell u_{j\ell} \lambda_\ell v_{\ell k}$$

となっていますので、

$$x = \sum_{jk} a_{jk} g_j \otimes h_k = \sum_{jk\ell} u_{j\ell} \lambda_\ell v_{\ell k} g_j \otimes h_k = \sum_\ell \lambda_\ell \left(\sum_j u_{j\ell} g_j \right) \otimes \left(\sum_k v_{\ell k} h_k \right)$$

と表わせます。U, V はユニタリ、$\{g_j\}, \{h_k\}$ は CONS なので、

$$e_\ell = \sum_j u_{j\ell} g_j = (g_j^T U)^T, \qquad f_\ell = \sum_j v_{\ell k} h_k = V h_k$$

と置けば、双方 CONS$\{e_\ell\}, \{f_\ell\}$ が得られて上記分解ができます。 □

Schmidt 分解の λ_j はこのように元の係数行列の特異値になっているのです。

この分解は、行列のテンソル積にも拡張できますので、状態ベクトルのみでなく、密度行列にも適用できます。行列全体のテンソル積 $\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_m$ に含まれる行列 X は、行列単位 M_{jk} $(j, k = 1, ..., nm)$ が CONS（内積やノルムはトレースで定義: $\langle A, B\ = \mathrm{Tr}\, AB^*$）になっていますので

$$X = \sum_{jk} \lambda_{jk} M_{jk}$$

で表せますが、M_{jk} 自体は元々の各行列環の行列単位 $M_{jk}^{(n)}$, $M_j jk^{(m)}$ のどれか一つのテンソル積で重なることなしに表せますので

$$X = \sum_{ijk\ell} \lambda_{ijk\ell} M_{ij}^{(n)} \otimes M_{k\ell}^{(m)}$$

と書き直せます。さらにこれを並べ直して、行列 M のインデクスを 1 つにすると係数 λ は 2 つのインデクスで表されることになり、さらにベクトルの Schmidt 分解と同じように処理できますので、

$$X = \sum_{j=1}^{\min\{n^2, m^2\}} \lambda_j A_j \otimes B_j$$

とトレース内積によるベクトルとして CONS$\{A_j\}, \{B_j\}$ と $\lambda_j \geqq 0$ で書けます（[8] では reshuffing と呼ばれています)。各係数は CONS の直交性と単位性より

$$\mathrm{Tr}\, X(A_k \otimes B_k) = \sum_j \lambda_j \mathrm{Tr}\, A_j A_k^* \otimes B_j B_k^* = \lambda_k (\mathrm{Tr}\, A_k A_k^*)(\mathrm{Tr}\, B_k B_k^*) = \lambda_k$$

で求められます。

2. 量子もつれと分離状態

一般に密度行列 ρ は、$\rho \geq 0$, $\mathrm{Tr}\, \rho = 1$ となるもののことを言います。特に状態ベクトル x（単位ベクトル）で表される密度行列 $\rho = xx^*$ は**純粋状態**と呼ばれますが、階数 1 の射影行列の事で、これは 2 つのテンソル積空間でも同じです。しかし、これがテンソル積の分解にシンクロしているか否かで密度行列の性質が変わってきます。Schmidt 分解形 $X = \sum_j \lambda_j A_j \otimes B_j$ では、$\lambda_j \geqq 0$ でしたが、A_j, B_j は CONS であるものの、一般に密度行列にはなりません（トレースも 1 に通常はなりません)。しかし、テンソル積の分解形にはなっています。特に

$$\rho = \sum_j t_j A_j \otimes B_j$$

と書ける密度行列において A_j, B_j も密度行列で、$t_j \geqq 0$, $\sum_j t_j = 1$（即ち、各項が密度行列のテンソル積行列の凸和）になっているとき、**分離状態**と呼ばれます。そうでないときは**量子もつれ状態**（`entangled state`）と言います。簡単な例示をすると、$x = x_1 \otimes x_2$（すべて単位ベクトル）になっているときは

$$xx^* = x_1 x_1^* \otimes x_2 x_2^*$$

なので分離状態（の純粋状態）です。

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_2 \pm e_2 \otimes e_2), \qquad \rho_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_2 \pm e_2 \otimes e_1)$$

において $\rho_1 = \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}} \otimes e_2$ なので分離状態ですが、ρ_2 は量子もつれ状態です（マイナスの場合が **EPR 状態**です)。

しかし一般には、どちらになっているかがすぐにはわからない場合が多いので、いろいろな判定条件が吟味されてきました。代表的なものを眺めておきましょう。

3. Choi-Woronowicz-Horodecki 基準

主に Størmer のテキスト [1] を参照しますが、ほかにも引用するほどは関わっていない多くの文献を参考にしました。私の近隣分野の研究者で何度か講演も聞いたことのある Choi さんは、量子情報分野にかかわるつもりは全くなかったらしく、この方面で有名になって御本人も面食らっているようです。そのきっかけになったのが、線形写像 Λ に対する **Choi matrix** です（E_{ij} は行列単位）:

$$C_\Lambda = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes \Lambda(E_{ij}).$$

さらにもう少し一般的に **Choi Map** として、$\rho = \sum_j A_j \otimes B_j$ について

$$C_\Lambda(\rho) = \sum_j A_j \otimes \Lambda(B_j)$$

に拡張されています。これを使った判定法が知られています：

【Choi の判定条件】(**Woronowicz-Horodecki criterion** という表記もある)
任意の単位的正写像 Λ について、Choi map $C_\Lambda(\rho) = (I \otimes \Lambda)\rho$ が非負になることは ρ が separable の同値条件で、これが非負でない正写像 Λ の存在が、ρ が量子もつれの同値条件である。

例えば、Choi map から見て、 Choi matrix の元の行列（密度行列としては 2 で割る）

$$A = \sum_{i,j=1}^{2} E_{ij} \otimes E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について、Λ を転置写像とすれば、

$$C_{\text{transpose}}(A) = \sum_{i,j=1}^{2} E_{ij} \otimes E_{ij}^T = \sum_{i,j=1}^{2} E_{ij} \otimes E_{ji} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \not\geq 0$$

と比較的楽に見つかります。もちろん transpose が単位的正写像なので、separable なら非負定値となることは明らかです。実際 3 次元以下では、この転置タイプが有効であり、**PPT**（`positive partial transpose`）と呼ばれる低次元限定の判定条件になっています。PPT でＯＫなら分離状態で、2 次元（も

う一方は3次元でもよい）では、PPTでＯＫが分離状態の同値条件になっています（**Peres-Horodecki 規準**, [8]）。

4. Entanglement Witness Theorem

名前だけ既に出てきましたが、Horodecki 一族は、珍しく親子兄弟で量子情報関連の研究者になっている方々で、特に分離性の研究においては熱心にて有名な結果をいくつも出しています [5]。そのうちの一つに EWT と呼ばれる定理 [4] があります。下記のエルミット行列 H を **Entanglement Witness** と呼んでいます：

【EWT】D が entangle density matrix であるための同値条件は

$$\exists H = H^*;\ \mathrm{Tr}\, HD < 0,\ \mathrm{Tr}\, HE \geqq 0 \qquad \Big(\forall\, \text{分離密度行列}\ E\Big).$$

これは、分離状態が凸集合であることで、Hahn-Banach の分離・拡張定理を使って得られます。

先ほどの例で見てみましょう：

$$\Phi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これに対し、

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を考えると、

$$H\Phi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

なのでトレースは負になります。対して、分離状態についてはその各項の密度行列のテンソル

$$A \otimes B = (a_{ij}) \otimes (b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A \geqq 0 \\ b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = \det B \geqq 0 \end{cases}$$

について、非負を示せば、その凸和も非負になります：

$$H(A \otimes B) = \begin{pmatrix} -a_{21}b_{21} & * & * & * \\ 0 & a_{11}b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}b_{11} & 0 \\ * & * & * & -a_{12}b_{12} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a_{11}a_{22} \geqq |a_{12}|^2 \\ b_{11}b_{22} \geqq |b_{12}|^2 \end{cases}$$

なので、

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\, H(A \otimes B) &= a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2\mathrm{Re}\, a_{12}b_{12} \geqq a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2|a_{12}b_{12}| \\ &\geqq a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2\sqrt{a_{11}b_{22}a_{22}b_{11}} = \Big(\sqrt{a_{11}b_{22}} - \sqrt{a_{22}b_{11}}\Big)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

となって、分離状態に対しては非負となるので、H が EW であることがわかり、A が量子もつれになっていることがわかります。実際にこの H を見つけるのは結構難しく、先に Choi の例がわかったのちにやっと見つかりました。

5. 部分トレース・縮約状態

もう一つ必要な道具として「部分トレース」がありますが、あまり意味の説明がないので補足しておきます。A, B 2 つの量子力学的な密度作用素は $\rho_{AB} = \sum_{ijk\ell} \lambda_{ijk\ell} E_{ij} \otimes F_{k\ell}$（$E_{ij}$, $F_{k\ell}$ は行列単位）で表されることは前に述べました。この B 側の部分トレースは、本当に B 側のみトレースをとればよいので

$$\rho_A = \mathrm{Tr}\,_B(\rho_{AB}) = \sum_{ijk} \lambda_{ijkk} (\mathrm{Tr}\,F_{kk}) E_{ij} = \sum_{ijk} \lambda_{ijkk} E_{ij}$$

になることはその名前からして当然でしょう (今後 λ_{ijkk} の k のダブりは省略)。しかしこれが物理的に何を意味するのでしょうか? 名前としては**縮約状態**と呼ばれていて、トレースを非可換定積分とみれば、数学的には「周辺分布」のような存在であることはわかりますが、物理的に意味があるのかという問いかけです。

射影測定は、物理量 X のスペクトル分解 $X = \sum_\ell t_\ell P_\ell$ において、測定値は固有値 t_ℓ に限られ、密度行列 ρ を測定してそれが測定される確率は

$$p(t_\ell) = \mathrm{Tr}\,P_\ell \rho$$

であり、測定後に密度作用素は

$$\frac{P_\ell \rho P_\ell}{\mathrm{Tr}\,(P_\ell \rho)}$$

に収縮するのでした。また、2 量子状態の場合に上記の一般的な密度行列 ρ_{AB} を使って、A 側のみを物理量 $M = \sum_\ell s_\ell P_\ell$ で測定して測定値 s_J を得るとき、その確率は

$$p(s_J) = \mathrm{Tr}\,(P_J \otimes I)\rho_{AB} = \sum_{ijk\ell} \lambda_{ijk\ell} \mathrm{Tr}\,P_J E_{ij} \otimes F_{k\ell} = \sum_{ijk} \lambda_{ijk} \mathrm{Tr}\,P_J E_{ij} \otimes F_{kk}$$

(最後の等式は B の非対角部分を省いた。）収縮先の密度作用素は

$$\rho(P_J \otimes I) \equiv \frac{(P_J \otimes I)\rho_{AB}(P_J \otimes I)}{\mathrm{Tr}\,(P_J \otimes I)\rho_{AB}} = \sum_{rstu} \lambda_{rstu} \frac{P_J E_{rs} P_J \otimes F_{tu}}{\sum_{ijk\ell} \lambda_{ijk\ell} \mathrm{Tr}\,P_J E_{ij} \otimes F_{k\ell}}.$$

ここで、部分トレースを取ってから、同じ A 側の測定をしてみましょう： 測定値 s_J を得るとき、その確率は

$$p_A(s_J) = \mathrm{Tr}\,P_J \rho_A = \sum_{ijk} \lambda_{ijk} (\mathrm{Tr}\,F_{kk}) \mathrm{Tr}\,P_J E_{ij} = \sum_{ijk} \lambda_{ijk} \mathrm{Tr}\,P_k E_{ij} \otimes F_{kk}.$$

となって、部分トレースを取る前と確率は変わらないことがわかり、収縮先の密度作用素は

$$\frac{P_J \rho_A P_J}{\mathrm{Tr}\,(P_J \rho_A)} = \sum_{rstu} \lambda_{rstu} (\mathrm{Tr}\,F_{tt}) \frac{P_J E_{rs} P_J}{\sum_{ijk} \lambda_{ij} (\mathrm{Tr}\,F_{kk}) \mathrm{Tr}\,P_J E_{ij}} = \sum_{rstu} \lambda_{rstu} \frac{(\mathrm{Tr}\,F_{tu}) P_J E_{rs} P_J}{\sum_{ijk\ell} \lambda_{ijk\ell} \mathrm{Tr}\,P_J E_{ijk\ell} \otimes F_{k\ell}}$$

となって、これは部分トレースを取る前の収縮密度作用素 $\rho(P_J \otimes I)$ の部分トレースを取ったものに他ならないことがわかります。

このように、部分トレースをとって**縮約密度行列**を考えることは、**B 側の測定を行うことなしに同等の部分測定を行えるよう変形している代替単独状態である**ことがわかります。実際、特にテンソル積で

の分離が不明確な場合の抽象的な部分トレースの定義として、$f(A) = A \otimes I$ のトレース内積で特徴付けられます:

$$\mathrm{Tr}\, M\rho_A = \mathrm{Tr}\left((M \otimes I)\rho_{AB}\right).$$

この部分トレースを取って von Neumann entropy を考えたものが entanglement entropy として重要な役割を果たすことになったのでした。

因みに上記の密度行列 Φ の B 側の部分トレースを取って縮約状態を求めると、

$$\Phi_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

になります。このように縮約状態が単位行列をサイズで割ったものになるとき、最も均等な純粋密度行列で、エントロピーは最大になり、**maxmally entangled state** 若しくは **Bell state** とも呼ばれています。2 次元のベクトルのテンソル積では、そのようなものは EPR state も含み以下の 4 つに限ることがわかっています:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_1 \otimes e_1 \pm e_2 \otimes e_2\right), \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_1 \otimes e_2 \pm e_2 \otimes e_1\right).$$

おわりに

今回は 2 粒子状態の所謂 bipartite state と呼ばれるものに限定して話しましたが、 multipartite への拡がりは当然ながらなされています。ただ、個人的な興味としては、基礎的な認識が得られたのでこれで十分なのですが、結構基本的なことがあまり書いていなくて、かなり個人的に試行錯誤した部分が少なからずありました。それだけに、同じ方向性の方には多少なりとも役立つノートになっていただけたら幸いです。

参考文献

[1] E.Størmer, “Positive Linear Maps of Operator Algebras”, Springer, 2013.

[2] 藤井淳一, 量子鍵交換プロトコルをめぐって, 国際数理科学協会会報, **74**(2011), 2–8. http://www.jams.or.jp/kaiho/kaiho-95.pdf

[3] 福間 将文, AdS/CFT 対応とホログラフィー, 数理科学 **43(4)**(2005), 32–39.

[4] M.Horodecki, P.Horodecki and R.Horodecki, Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions, Phys. Lett., **A 223**(1996), 1–8.

[5] R.Horodecki, P. Horodecki, M.Horodecki and K.Horodecki, Quantum entanglement, Rev. Mod. Phys., **81** (2009), 865.

[6] 宮野健次郎・古澤明, 「量子コンピュータ入門」, 日本評論社, 2008.

[7] M.Rangamani and T.Takayanagi, “Holographic Entanglement Entropy”, Springer, 2017.

[8] K.Życzkowski and I.Bengtsson,“Geometry of Quantum States, 2nd Edition”, Cambridge Univ. Press, 2017.