



一般社団法人

国際数理科学協会会報

No.119/2022.1

編集委員：藤井淳一（委員長）

目次

* 寄稿

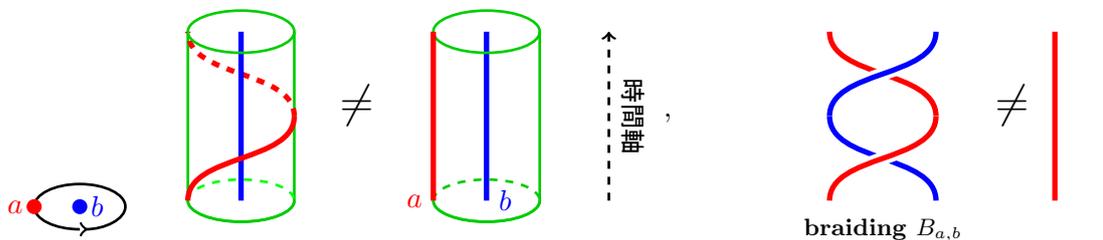
* 寄稿

トーリックコードとその非可換性

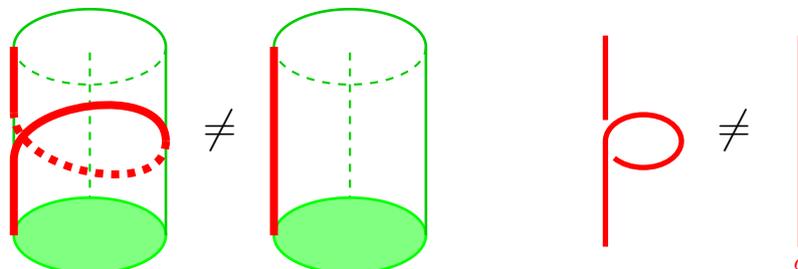
大阪教育大学 教育協働学科 藤井淳一

1 はじめに

量子力学における**非可換統計**とは、片方の粒子の周りを1周すると元に戻らない準粒子 *anyon* の存在を示すもので、対して従来の2つの統計的性質は、よく知られたフェルミオンとボゾンのそれです。入れ替え (half braiding) で、たとえマイナスが出て、1周すると双方元に戻っているから、(braiding では) 等しくなります (括弧内は粒子の変化を、時間軸を設定して「組紐的に」表わした呼び名です)。



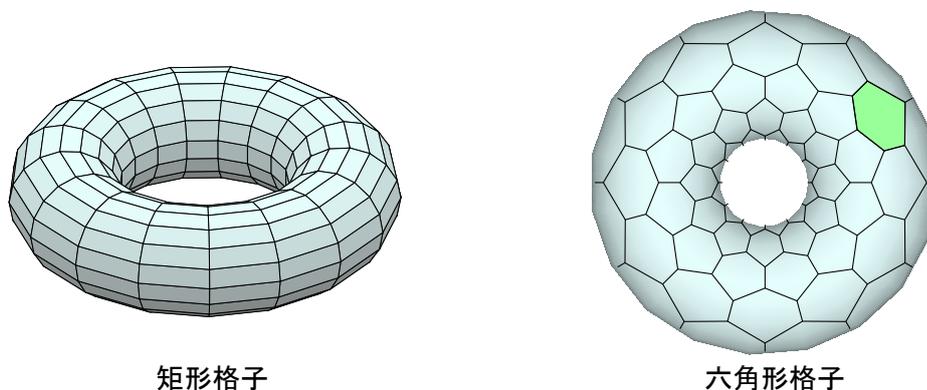
同じように TQFT (Topological Quantum Field Theory) では **Dehn twist**, TQC (Topological Quantum Computing) では **topological spin** θ と呼ばれる操作が、何もしないときと異なることもわかります。



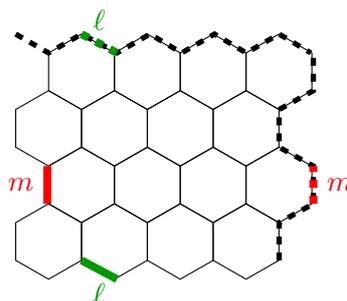
ここでは、Kitaev が導入した有名なトーリックコード [7] におけるその性質が、あまり一般的ではなさそうなので、解説することが目的です。ただし、本格的な *anyon* ではなく、braiding の違いが、スカラーフェーズにとどまる可換 *anyon* で、ユニタリ行列の違いが出てくる非可換 *anyon* ではありません (一般論は、[3, 1, 2] 参照)。

2 トーラス格子上的の状態ベクトルと行列作用

格子の取り方には大まかに2種類がよくつかわれています。格子で囲まれた図形を**プラケット**と呼びますが、それが矩形の場合と六角形（蜂の巣）の場合です：



Physical Review B の 50th Anniversary Milestones に挙げられている、いわゆる Levin-Wen string-net model [8] は、Kitaev の六角形の方の honeycomb toric code に基づいています。論文等ではあまり強調されていないけれども注意したいことは、矩形の場合は格子の分割は自由にとることができますが、六角形の場合には、六角形のとんがりの方向には偶数しか取れません。それはトーラスを平面から両端の辺の同一視によって表現する場合を考えればわかります¹⁾。左右の縦の辺 (m) は、いくつの分割でも等しい高さがありますが、上下の辺 (ℓ) は偶数個でないと向きが違ってうまく対応しません：



いずれにせよ、各辺 ℓ に単位ベクトルが載っていて、全体としては、単一テンソルの時

$$\bigotimes_{\ell} \begin{pmatrix} \alpha_{\ell} \\ \beta_{\ell} \end{pmatrix} \quad (|\alpha_{\ell}|^2 + |\beta_{\ell}|^2 = 1)$$

と表示されます（一般形はこの和とスカラー倍で長さを1に保ったもの）。そこに作用する各2次行列 M_{ℓ} の単一テンソルの基本形は $\bigotimes_{\ell} M_{\ell}$ でその作用は

$$\bigotimes_{\ell} M_{\ell} \bigotimes_{\ell} \begin{pmatrix} \alpha_{\ell} \\ \beta_{\ell} \end{pmatrix} = \bigotimes_{\ell} M_{\ell} \begin{pmatrix} \alpha_{\ell} \\ \beta_{\ell} \end{pmatrix}$$

となります。特に、量子エラーに対応するパウリ行列

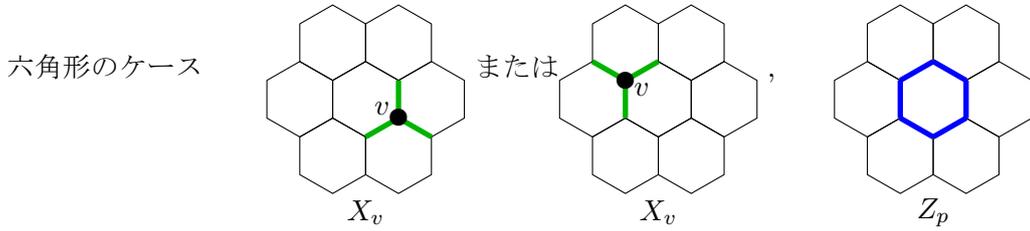
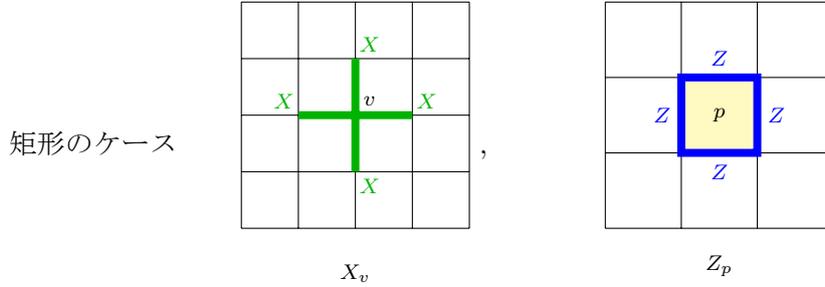
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \text{ビット反転}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : \text{位相反転}$$

¹⁾ このトーラスの表現が、かの悪魔的天才 von Neumann がわからなかったという伝説があります。

が重要ですが、ここで、トーリックコードの定義にかかわる行列演算子を導入します: v をプラケットの頂点、 p をプラケットそのものとし、 v に接する辺の集合を $\mathbf{leg}(v)$ 、 p の辺の集合を $\partial(p)$ とするとき、

$$X_v = \bigotimes_{\ell} M_{\ell}; \quad M_{\ell} = \begin{cases} X & \ell \in \mathbf{leg}(v) \\ I_2 & \text{その他の辺} \end{cases}, \quad Z_p = \bigotimes_{\ell} M_{\ell}; \quad M_{\ell} = \begin{cases} Z & \ell \in \partial(p) \\ I_2 & \text{その他の辺} \end{cases}$$

図で表すと、以下のようになります:



これらすべての X_v, Z_p で不変な単位ベクトルをトーリックコードと呼びます。

3 トーリックコード

パウリ行列の非可換性 $XZ = -ZX$ が問題となります。 X の作用と Z の作用が、全く違う辺の場合には、可換です。 X_v, Z_p の場合はいずれのトーラス格子でも、関わる場合は2辺になりますので、

$$X_v Z_p = (-1)^2 Z_p X_v = Z_p X_v$$

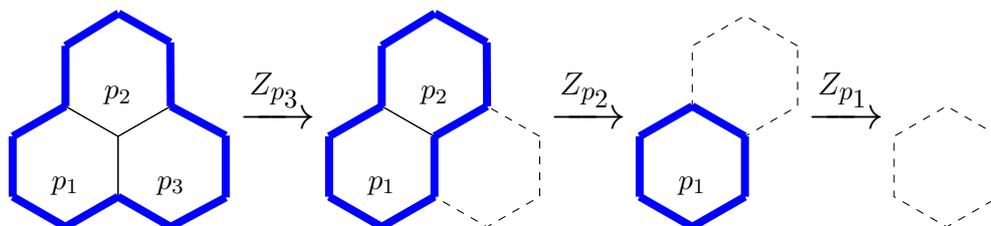
となって、一般的に可換であることがわかります。ここで、単位ベクトル $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は Z 不変ですから、初期状態を $\bigotimes_{\ell} |0\rangle$ としておくと、どの Z_p でも不変です。 X_p については少し手間がかかりますが、 X, I_2 がエルミットユニタリなので X_v もそうなりますから、固有値は ± 1 のいずれかであり、単位行列を足して2で割れば、固有値1または0の射影行列になります。 $\mathbf{leg}(v)$ での単位行列を I_v としたとき(それ以外の部分では I_2 のテンソル積)、 $(X_v + I_v)/2$ は射影です。したがって、すべての頂点 v についてこれを初期状態にかけてやれば、任意の X_v についても不変となり基本的なトーリックコード (ground state) Ω ができます。有限積で「引き算」の要素が皆無なので途中で消失する心配はありません。長さを後で調整すれば、2で割らずに表せるでしょう:

$$\Omega = \frac{\bigotimes_v (X_v + I_v) \bigotimes_{\ell} |0\rangle}{\| \bigotimes_v (X_v + I_v) \bigotimes_{\ell} |0\rangle \|}$$

実際には、4次元であることが知られていますので、後の3つの基底を求めれば、トーリックコードが完成します。

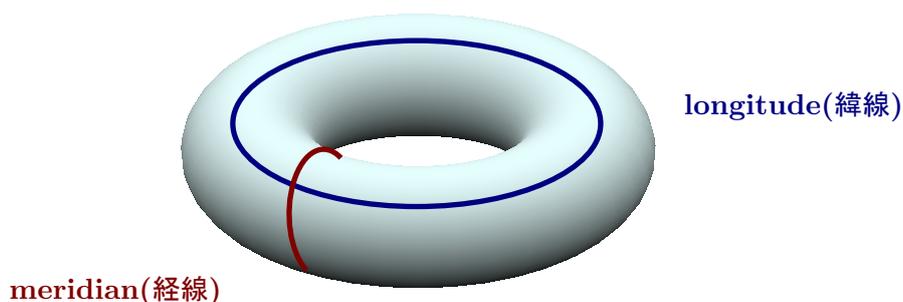
そのためには Z, X のパス演算子の性質を調べる必要があります。辺をなぞるパス γ は、その上に Z が作用するものと考えて Z -path $\gamma(Z)$ とし、プラケットの中心をたどるパス γ^* の場合、それが横切る辺上に X を作用させる $\gamma^*(X)$ とします。この時、トーリックコード上で、両端が開いたパス演算子の場合、エラーが生じていることとなります。これこそが準粒子の Kitaev モデルであり、パスの両端で準粒子が励起していると物理的に解釈されるものです。

一方、通常の閉じたパスは、トーリックコード上では不変です。例えば、わかりやすい閉 Z -path で見てみると、 Z -path は Z_p と可換なので、コード上では Z_p を描けても不変だから



となって、可縮な閉 path は消失します。

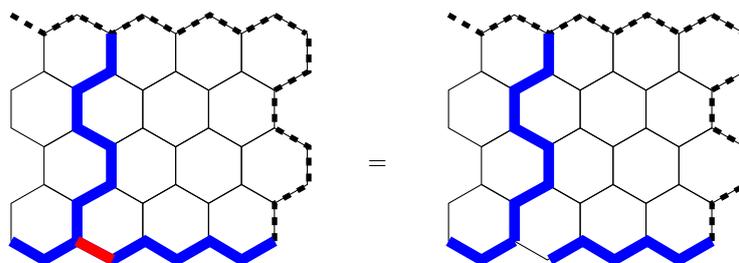
しかし、トーラスなので巻きついて可縮でない path があります。代表的なのは 1 回巻きつきの経線と緯線でしょう：

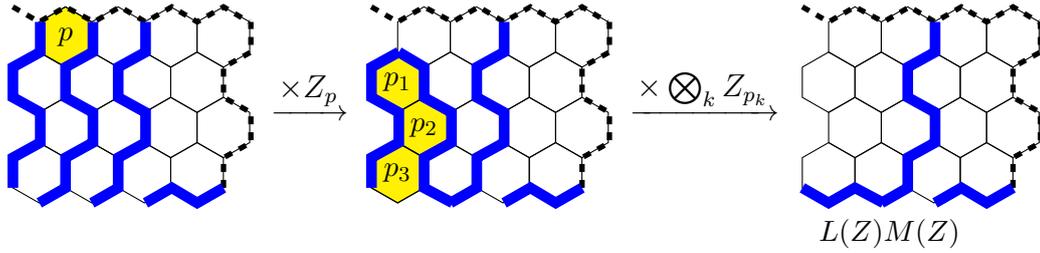


短い方を経線 (meridian)、長い方を緯線 (longitude) と呼び、 X, Z のみの path をそれぞれ $M(X), L(X), M(Z), L(Z)$ と書きます。実は上記の変形が可能なので、位置や、多少の上下・寄り道は無関係で等しくなります。

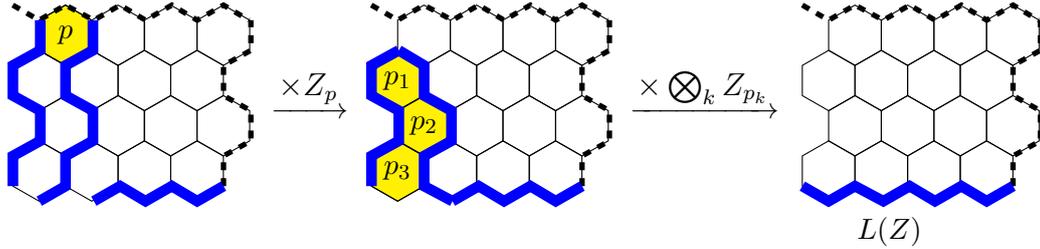
Z_p や X_v による変形を行うと、緯線 (長い方) の 1 周分の Z 作用 $L(Z)$ は、経線方向に偶数回巻きついたものは 0 回分 $L(Z)$ に等しく、経線 1 周分の Z 作用 $M(Z)$ も、緯線方向に偶数回巻きついたものに符号上では等しくなります。奇数回巻きつきの場合には経線緯線がクロスした $L(Z)M(Z) = M(Z)L(Z)$ と同等です²⁾。これをより複雑な六角形の場合で、図的に見てみましょう：奇数回巻きつきが 1 回巻きつきと同等なのは、次頁の図のように 3 回巻きつきが 1 回と同等です：

²⁾ 六角形の場合はクロスせず赤い部分が重なり、一回巻きつきと同じになります：





同様に偶数回巻きつきは巻きついていないのと同じであることも同様にしてわかります：



これは、 X についても同じです。このように基本的なエラーの可能性はこれで尽くされているので、以上で、path の種類には、開いたエラー path, 収縮可能な閉じた path, 収縮不可能な閉じた 3 種類の path ($L, M, T = LM$) しかないことがわかります。特に最後の収縮不可能な閉 path は符号自体を変化させますが、別の符号になりエラーにはなりません。実際、 $L(X), M(X)$ は、 X_v, Z_p と可換なので、

$$\begin{aligned} X_v L(X) \Omega &= L(X) X_v \Omega = \Omega, \\ Z_p L(X) \Omega &= L(X) Z_p \Omega = \Omega \end{aligned}$$

となって、全ての X_v, Z_p で不変なベクトルとなるのでトーリックコードです。

したがって、

$$\Omega, L(X)\Omega, M(X)\Omega, L(X)M(X)\Omega$$

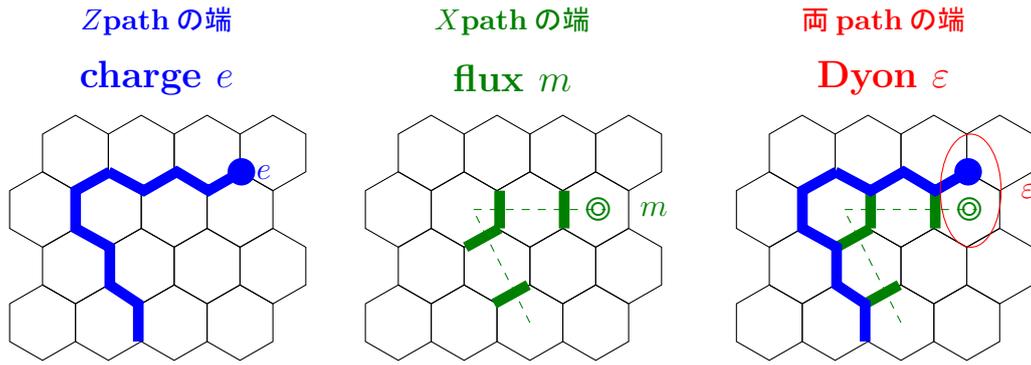
が符号の基底となります。これでトーリックコードの全貌がわかりました。

本来であれば、符号の性能として、エラー訂正の話をするべきですが、比較的単純な作業なので端折ることにして、ここでは次の章でエラーの anyon としての役割を見てみます。

4 トーリックコードでの anyon

エラーは、 X や Z の開いたパスのことで、その両端に「anyon の励起状態」が起こると考えられています。これは X_v, Z_p では消えないエラーであると同時に、「準粒子」ととらえられますが、両端を同時に見るのは面倒なので、片方ずつ見ることにします。

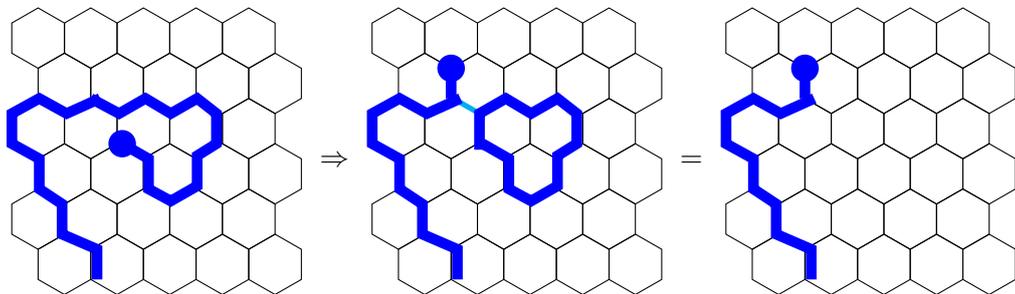
まず、3 種類の粒子を定義します。次のページの図は左から **charge** e , **flux** m , **Dyon** ε と呼ばれるもの ([6]) で、 e, m を同時に励起させる ε が anyon としての性質を持ちます。



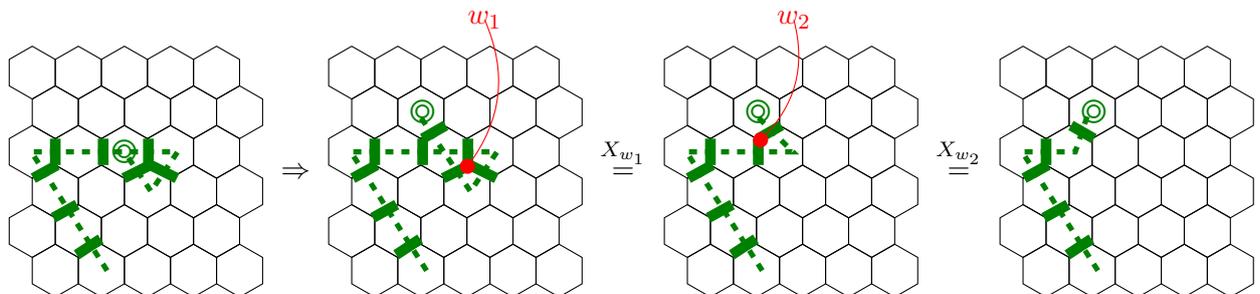
上記の2つのパスは、わざと沿うように書きましたが、Zパスの進行方向右側の6角形の中心を通るXパスがペアとなって、可換anyonとしての**Dyon**と呼ばれる粒子が励起していると考えられます。anyonになっているかどうかは、例えば、twist θ_a と呼ばれる（1周に対応する）動きによって従来の粒子は不変ですが、違いがみられるのが特徴です。

$$\theta_a \Big| = \Big| \text{loop} \Big|, \quad \theta_a^{-1}(=\bar{\theta}_a) \Big| = \Big| \text{loop} \Big| \neq \Big| \Big|$$

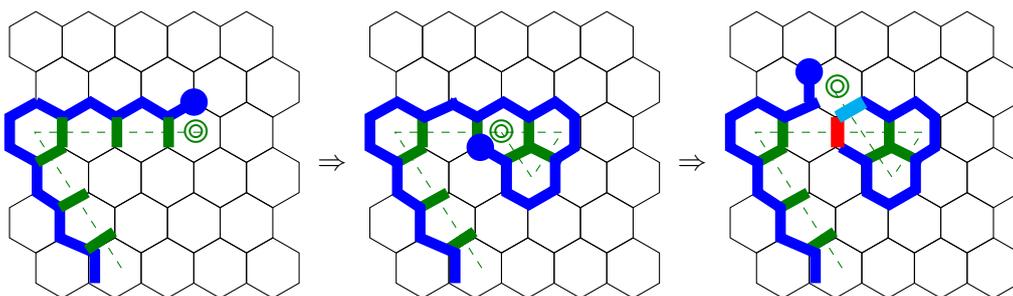
今回は、下からの移動としてみているので、 θ^{-1} のほうで検証します。まず、Zpathの準粒子 charge e については、以下のように上に突き抜けるときに薄い部分がダブるので消去され、孤立閉パスは消えるので、 $\theta_e = \text{id}$ です：



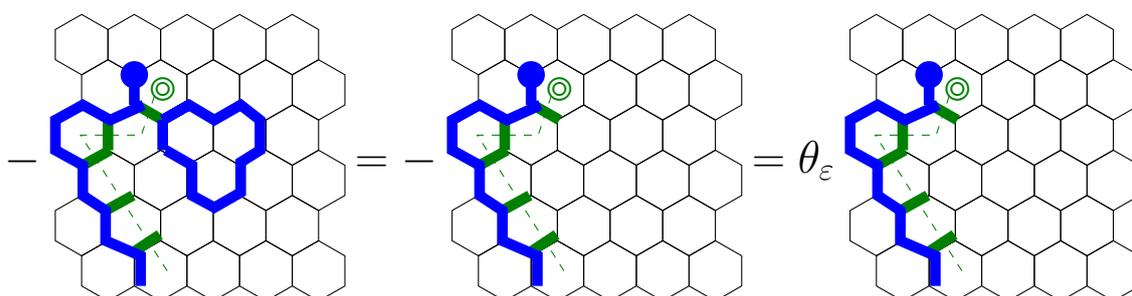
同様に、Xpathの準粒子 flux m についてみますと、高度は考査可能であるが、実際重ならないので、やはり影響がなく、交差なしの一本道になるので $\theta_m = \text{id}$ です (X_w で2回消しました)：



そこで、Dyon でその様子を見てみると、以下のようになります：



赤は ZX , シアンは XZ となってマイナスの関係です。実際、色が変わっている頂点 v に X_v を作用させると、赤いほうは、 $XZX = -XXZ = -Z$ となり、シアンのほうは $XXZ = Z$ となります。さらに右の孤立した領域の中心 w で X_w で消すと、左下図のようになり、残りは Z の閉じたパスなので消えます。したがって、 $\theta_\varepsilon = -\text{id}$ で、(可換 anyon ですが) 非可換性がわかりました：



5 おわりに

矩形と六角形(蜂の巣)の格子を持つトリークコードの非可換統計的性質についてみてきましたが、矩形でも同様であるものの、図的には蜂の巣主体になってしまいました。矩形の方は何度か論じているので、論じていないほうに重点が移ってしまったことはご容赦ください。

これらの話題は、卒論のテーマとしてちょうどいいレベルだったので、3代にわたって卒業研究のテーマとして、少しずつ違った方面でやらせてみました。そういう意味で、全員の名前を挙げることは控えますが、3代の卒論ゼミナールの学生たちに感謝いたします。それは [4, 5] に記録されています。

とはいうものの、十分な資料もなかったもので、何度か誤りを訂正しつつゼミを進行していたのですが、まさかと思った間違いを、卒論終了後に気付くことができました。その顛末は [5] に書きましたが、 Ω の長さの計算を、結構有名な学者が間違っていて、それをそのまま信じてしまいました。

それは無理もないことで、 $(X_v + I_v)$ をかけるたびに直交単位ベクトルの和が出てくるので、1回ごとに $\sqrt{2}$ で割ってやればよいと思って、

$$\Omega = \bigotimes_v \frac{X_v + I_v}{\sqrt{2}} \bigotimes_\ell |0\rangle$$

で正しそうに見えたからでした。しかし、実際にシミュレーションしてみると、最後の1頂点分を掛けるときに、直交相異ベクトル2つにならずに、同じベクトル2つになることがわかりました。つまり最後だけ2で割ることになるので、

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \bigotimes_v \frac{X_v + I_v}{\sqrt{2}} \bigotimes_\ell |0\rangle$$

が正しい式だったのです。長さだけのミスなので、大勢には全く影響のない話ですが、こんなこともあるので、面倒くさがらずに確認が必要だと反省しました。

参考文献

- [1] 藤井淳一, Fibonacci anyon におけるトポロジカル量子計算, 数学教育研究, 大阪教育大学数学教育講座, **44**(2015), 151–164.
- [2] 藤井淳一, TQC におけるモジュラー S 行列をめぐって, 大阪教育大学紀要, 第 64 巻 第 2 号 (2016), 15–33.
- [3] 藤井淳一, トポロジカル量子計算とカテゴリー, 国際数理科学協会会報, **95**(2015), 3–10.
<http://www.jams.or.jp/kaiho/kaiho-95.pdf>
- [4] 藤井淳一, Kitaev の Toric code について, 大阪教育大学紀要, 人文社会科学・自然科学, **68**(2020), 81–90.
- [5] 藤井淳一, Kitaev の toric code についての補足, 大阪教育大学紀要, 人文社会科学・自然科学, **70**(2022),1–12.
- [6] J.P.I.Jimenez, “Gauge and Matter Fields on a Lattice-Generalizing Kitaev’s Toric Code Model”, Doctor Thesis, Univ. São Paulo, 2015.
- [7] A.Y.Kitaev, Fault-tolerant quantum computation by anyons, Ann. Phys., **303**(2003), 2–30.
- [8] M.A.Levin and X-G.Wen, String-net condensation: A physical mechanism for topological phases, Phys.Rev.B, **71**(2005), 045110.