一般社団法人
国際数理科学協会会報

No.115/2020.10

編集委員： 藤井淳一（委員長）

目次

国際数理科学協会 2020 年度年会報告

年会担当理事 濵田 悦生

国際数理科学協会 2020 年度年会の各分科会につきましては、新型コロナの影響により、**「確率モデルと最適化」**分科会は不開催となりました。**「統計的推測と統計ファイナンス」**分科会、および、**「第 31 回 代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会」**につきましては、以下の zoom 開催で何とか発表ができたことをご報告いたします。

「統計的推測と統計ファイナンス」分科会研究集会報告

世話人: **地道正行**（関西学院大学 商学部）
連絡先：**濵田悦生**（大阪大学 大学院基礎工学研究科）
日時： 2020 年 8 月 22 日 (土) 10:00～17:00
場所： zoom 開催

午前の部

10:00–10:20 **劉 澤霖** (関西学院大学 商学部), **黒澤拓能** (関西学院大学 商学部), **峯島 基** (関西学院大学 商学部), **嶌﨑 慶** (関西学院大学 商学部)
(経営科学系研究部会連合協議会 令和元年度 データ解析コンペティション 参加・発表論題, チーム名:MJAN)
『タクシープルーブデータ分析によるライドシェアビジネスの提案』
概要: 情報通信技術によって既存の交通サービスの利便性を高め, シームレスな移動サービスを実現する構想である Mobility as a Service (MaaS) について説明するとともに, MaaS によるタクシー相乗りサービスを提案し, 都内のタクシーのプルーブデータ (2 年間, 1 万台弱) を用いてその実現による走行距離及び CO2 排出量の削減効果について考察した. なお, 本報告は経営科学系研究部会連合協議会主催の令和元年度データ解析コンペティション (関西部会) においての発表をもとに行い, また使用したデータは上記コンペティションにおいてみずほ情報総研 (株) より提供されたものである.

10:20–10:40 **劉 澤霖** (関西学院大学 商学部), **黒澤拓能** (関西学院大学 商学部), **地道 正行** (関西学院大学 商学部)
『 R と TensorFlow による機械学習 』
概要: 近年, 多くの分野で利用されている TensorFlow による機械学習について, R と連動することによって実行することを考えた．まずは TensorFlow について紹介し, その主役となるテンソル (tensor) の, R 言語における表現法について説明した．次に, TensorFlow の高レベル API である Keras を用いて, 画像分類を行った．一般のニューラルネットワーク (Neural Network: NN) モデルと畳み込みニューラルネットワーク （Convolutional Neural Network: CNN）モデルを構築し, それぞれの訓練済みのモデルを用いて予測も行った．今後は, モデルの層のチューニングによる予測精度の向上と, 実データへの活用を検討する予定である．

10:40–11:00 **辻 健太朗** (大阪府立大学 大学院工学研究科), **林 利治** (大阪府立大学 大学院工学研究科)
『 多重代入法による欠測処理の交差検証を用いた改良法の紹介 』
概要: 目的変数には欠測はないが, 説明変数の一部が欠測する回帰問題において, 代入法による欠測処理の評価に関する Mertens et al. (2020) の研究がある．本発表では, 彼らが提案した評価法が, 交差検証法を用いて得た目的変数の予測誤差に基づいていること他を紹介した．

11:00–11:20 **吉田俊輔** (大阪府立大学 大学院工学研究科), **林 利治** (大阪府立大学 大学院工学研究科)
『データに欠測がある非線形回帰における最大経験尤度推定の紹介』
概要: 共変量ベクトルと欠測があるスカラー応答変数を持つ非線形回帰モデルのパラメータ推定に対して, Yang and Tang (2020) は IPW 法, NI 法, AIPW 法に基づく 3 種類の推定方程式を用いた最大経験尤度推定を提案した．本発表では, 彼らが提案した推定方法や, その性能について紹介した．

11:30–11:50 **飯田悠太** (大阪府立大学 大学院工学研究科), **林 利治** (大阪府立大学 大学院工学研究科)
『報酬がまばらな階層型タスクに対する強化学習手法に関する最近の研究』
概要: 報酬がまばらなタスクに対する強化学習手法の研究の内, 本発表では, 迷路タスクにおいて, 適切なスタート, ゴールの生成に関する研究 (Florensa et al. (2017, 2018)) と, 階層構造における上位の行動間隔に関する研究 (Zhou and Yu (2020)) を紹介した．

11:50–12:10 **東野航平** (大阪府立大学 大学院工学研究科), **林 利治** (大阪府立大学 大学院工学研究科)
『不均衡データにおける局所的分析の必要性と分類器の学習手法に関する研究』
概要: 不均衡データの分類問題では, クラスの不均衡だけでなく, データの局所的な要素も分類器の感度低下を引き起こすと, Garcia et al. (2007) 他は主張した．本発表では, それらの研究と局所的分析を行う学習法 (He et al. (2008), 他) を紹介した．

12:10–12:30 **野中 諒** (大阪府立大学 大学院工学研究科), **林 利治** (大阪府立大学 大学院工学研究科)
『 Realized GARCH-Ito モデルに基づく対数株価のボラティリティの予測』
概要: Realized GARCH-Itô モデル (Song et al. (2019)) の下で, ボラティリティを予測する際, 対数株価のジャンプを推定する．この推定には, 漸近的に最適な閾値を用いるが, Song et al. (2019) が用いた手法では閾値は固定されていた．本発表では, データに応じた閾値の調整を考察し, 調整できれば, ボラティリティの予測精度が向上することを報告した．

午後の部

13:30–13:50 **鈴木雄大** (大阪大学 大学院基礎工学研究科・数理科学領域), **濵田悦生** (大阪大学 大学院基礎工学研究科)
『線形混合モデルを用いた小地域データ分析』
概要: 線形混合モデルを用いた小地域推定へのアプローチをみた．これは, 標本数が小さい時でも全体への縮小作用により, 安定化することに利点がある．実データ解析として, 大阪御堂筋線沿線の家賃推定をこのモデルを用いて行った.

13:50–14:10 **吉澤駿人** (大阪大学 大学院基礎工学研究科・数理科学領域), **濵田悦生** (大阪大学 大学院基礎工学研究科)
『ファッションコーディネートに関する個人の好みのモデル化』
概要: 線形混合モデルを用いた小地域推定へのアプローチをみた．これは, 標本数が小さい時でも全体への縮小作用により, 安定化することに利点がある．実データ解析として, 大阪御堂筋線沿線の家賃推定をこのモデルを用いて行った.

14:10–14:50 **髙岸 茉莉子** (大阪大学 大学院基礎工学研究科)
『異質な閾値をもつ順序カテゴリカルデータのためのセミパラメトリック推定による補正法の提案』
概要:　順序カテゴリカルデータで回答者ごとに異質な閾値を持つ場合に，係留寸描法に基づきデータを補正する問題について考えた．ここでは既存の順位変換ベースと，順序回帰モデルベースの中間となるセミパラメトリックな補正法を提案した.

14:50–15:30 **濵田 悦生** (大阪大学 大学院基礎工学研究科)
『 Hoeffding の不等式に関する一考察』
概要: Hoeffding の不等式は機械学習で有用なものであるが, その確率評価が甘いので, 証明のアルゴリズムを詳細に検証した.

15:40–16:00 **地道正行** (関西学院大学 商学部) , **宮本大輔** (東京大学 大学院 情報理工学系研究科), **阪 智香** (関西学院大学 商学部), **永田修一** (関西学院大学 商学部)
『探索的財務ビッグデータ解析：PG-Strom によるデータラングリングの並列化』
概要: データベース Orbis から抽出された世界の 2,400 万社を超える企業 (一般事業会社) に関する財務データを前処理したものを, PG-Strom を利用し, GPGPU (General-Purpose computing on Graphics Processing Units) によって並列処理し, データラングリングを行う時間を短縮することを試みた．また, 探索的データ解析の端緒として, データの要約と可視化も行い, さらに, この工程を自動実行することによって, 再現可能性を確保する方法についても述べた.

16:00–16:20 **地道正行** (関西学院大学 商学部) , **阪 智香** (関西学院大学 商学部)
『財務データ抽出システム KGUSBADES の再構築』
概要: 学内向け財務データ抽出システムの再構築について 1) RDBMS (Relational Database Management System) 選択の再検討, 2) 日経 NEEDS 企業財務データの仕様変更への対応, 3) 抽出システムにおけるインターフェースデザインの改良, 4) 財務データの拡充などの観点から実験環境を構築し, さまざまな角度から検討した結果を報告した．また, 実際に構築されたシステムからデータを抽出し, 可視化した結果などについて具体的に紹介した.

16:20–17:00 **林 利治** (大阪府立大学 大学院工学研究科)
『 4 次元変分同化法における初期状態推定の精度パラメータの最適化』
概要: 4 次元変分同化法では初期状態を推定するが, その誤差分散は未知であり, 精度パラメータとして扱われる (Cioaca and Sandu (2014))．本研究では, 平均的に捉えた最適化を提案し, 仮定した精度パラメータの中に誤差分散の真値がある場合, 最適なバラメータは真値となること等を報告した.

「代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会 ALGI (Algebra, Logic and Geometry in Informatics) (ALGI 31) 」報告

幹事: **西澤弘毅**（神奈川大学）, **津曲紀宏**（崇城大学）, **三好博之**（京都産業大学）
zoom 担当：**三好博之**（京都産業大学）
日時： 2020 年 9 月 3 日 (木) ～9 月 4 日 (金)
場所： zoom 開催

9 月 3 日（木）

10:00 ～ 10:15 オープニング＋連絡など

10:15 ～ 10:45 **浦本武雄**（長浜バイオ大学）

演題：変形理論としての計算理論

梗概： 古典的な Eilenberg 理論の公理化・ガロア理論との統一から始まった一連の研究について、最近の観察を軸にして、その概要を紹介する。技術的に言えば本講演の主題は、「代数体 K が虚二次体であるときに、K 上の algebraic witt vector のなす K 代数が、モジュラー関数の変形族の特殊値によって定義されるベクトルのなす K 代数と一致する」という現象に関わる。この現象に現れる主要概念とラングランズプログラムに現れる主要概念との類似を比較しながら、非可換類体論（および明示的類体論）のラングランズプログラムとは異なる定式化について考えたい。また古典的な計算理論における研究対象がこの現象の中でどのような役割を担うかを観察しながら、計算理論の古典的（で離散的）な対象を代数幾何学の文脈に自然に位置付けることが（も）できるのではないかという可能性についても議論したい。

11:00 ～ 11:30 **長谷川真人**（京都大学）

演題 : Lifting traced monoidal structure to the categories of algebras(work on progress) スライド (link)

梗概： Given a monad on a category, we have the notion of algebras for the monad, and can construct the category of algebras and algebra homomorphisms (the Eilenberg-Moore category). When the category is equipped with some nice structure, it is natural to ask if the structure can be lifted to the category of algebras so that the forgetful functor preserves the structure. Such situations are ubiquitous in various areas of mathematics, physics and computer science.

In this talk we discuss conditions on monads for lifting the structure of monoidal categories (tensor categories), as well as several additional structures including symmetry/braiding, duality, closed structure, *-autonomy, and trace. In most cases, opmonoidal (= oplax monoidal) monads and Hopf monads provide satisfactory answers. However, the case of trace is subtle and seems to be still open. (Joint work with J.S. Lemay)

12:30 ～ 13:00 **佐々木克己**（南山大学）

演題：難しい推論と易しい推論の意味論的な区別について

梗概： 自然演繹法の体系では，一時的な仮定をもつ推論規則がある．それらに対応づけられる推論は，そうでない推論と比べ，難しいと捉えられることが多い．本発表では，その 2 種類の推論を区別する形式体系を整理しその意味付けを行う．

13:15 〜 13:45 **南規楽**（京都大学）

演題：tracking reactive system のための論理

梗概： tracking reactive system は、反応の前後で何をどのように引き継いでいるか、という情報を加えた reactive system である。[Leifer, 2001] の方法に基づき、idem pushout を用いて labeled transition system を構成する。そのようにして得られる LTS のふるまいを記述する論理を提案する。

14:00 〜 14:30 **新屋良磨**（秋田大学）

演題：正則可測性：正則言語による極限的な近似可能性

梗概： 本講演では，正則可測性という，正則言語によるある種の「極限的な近似可能性」概念を導入し，種々の文脈自由言語の正則可測性・非可測性について解説する．また，正則可測性を考察する動機となった Buck による自然数の部分集合合に対する測密度の研究や原始語予想と呼ばれる未解決問題についても説明する．本講演の内容は [1] のプレプリントに基づく．

[1] Ryoma Sin'ya, Asymptotic Approximation by Regular Languages, available at https://arxiv.org/abs/2008.01413

9 月 4 日（金）

10:00 〜 10:30 **山本雄太**（東京大学）

演題：HoTT の改変による微分形式の推論とその意味論

梗概： Homotopy type theory (HoTT) is a kind of dependent type theory that can serve as both the theoretical basis for proof assistants and foundations of mathematics. It interprets types as spaces, terms as its points, and identity types as homotopy equivalences so that it can reason about cells on spaces. However, its dual concept, namely a set of differential forms on spaces cannot be a model of HoTT. In this study, we modify the fragment of HoTT that only contains identity types to obtain a type theory Nullhomologous Type Theory (NullTT), which interprets identity types not as homotopy equivalences but as homologousness. This enables the (co)chain complex of space to be a model of NullTT so that NullTT can reason not only about cells but also about differential forms. We also discuss the possibility for NullTT to be a formal system to reason about BRST quantization, which is a field of theoretical physics.

Homotopy type theory (HoTT) は依存型理論の一種であり、定理証明支援系の理論的基盤や数学全体の形式化などに用いられている。HoTT では型が空間に、項がその点に、そして等号型がホモトピー同値に解釈され、空間上の cell について推論することができる。しかし、その双対概念である空間上の微分形式は HoTT のモデルとなることができない。そこで本研究では HoTT の等号型のみを含む部分体系を改変して等号型をホモトピーではなくホモロジーにより解釈できる型理論 Nullhomologous Type Theory (NullTT) を定義する。これにより空間の (余) 鎖複体がモデルとなるので、NullTT は空間上の cell だけでなく微分形式についても推論できる。NullTT が理論物理学の一分野である BRST 量子化について推論できる可能性についても論じる。

10:45 〜 11:15 **佐藤隆**

演題：Algebraic Theorems Equivalent to Induction（帰納法と同値な代数の定理）

梗概： [FriSimSmi] は可算な代数を二階算術の部分体系で展開し，いろいろな定理がいくつかの集合存在公理とそれぞれ同値になることを示した．[Sim] はこのような逆数学現象を，代数に限らず，まとめている．

[SimSmi] と [Hat] は，基本体系とされる RCA_0 で証明できてしまう定理について，それらが RCA_0 を特徴付ける Σ^0_1 帰納法と同値であることを，より弱い体系 RCA^*_0 の上で示した．それぞれ，任意の体上の多項式の既約分解と，有限生成アーベル群の基本定理（と関連する基底についての命題）が調べられている．これらを踏まえ，本講演では，イデアル論の基本定理（任意の代数体における素イデアル分解）と，ガロアの基本定理（ガロア対応）について得られた結果を発表する．それぞれの定理を階層的に公理図式化し，RCA^*_0 上で Σ^0_1 帰納法と同値になる主張のみならず，適当な基本体系上で Σ^0_n 帰納法と同値になる主張を提示する．この手法で先行研究の結果も拡張できる．

[FriSimSmi] Friedman, H., Simpson, S., and Smith, R., Countable algebra and set existence axioms, Annals of Pure and Applied Logic **25** (1983), 141–181.

[SimSmi] Factorization of polynomials and Σ^0_1 induction, Annals of Pure and Applied Logic volume **31** (1986), 289–306.

[Hat] Hatzikiriakou, K., Algebraic disguises of Σ^0_1 induction, Archive for Mathematical Logic volume **29** (1989), 47–51.

[Sim] Simpson, S., Subsystems of Second Order Arithmetic (Second Edition), 2010.

11:30 〜 12:00 **河野友亮**（フェリス女学院大学）

演題：命題記号を様相記号に持つ論理について

梗概： 動的論理や動的認識論理は、プログラムの実行や、情報を得たことによる状態や知識の変化を扱う論理である。そこで扱われる論理式の一つとして、[A]B のように様相記号の中に論理式そのものが入ったものがある。これは例えば動的論理では「A が真かどうかをテストし、真だったならば B」といった意味で用いられ、モデルにおける様相関係もこの意味を表現するような関係で定義される。しかしながら、論理式を様相関係に持つ概念としては、このように特定の用法、定義で用いられてるものはあるが、一般の論理として、そのようなものを扱った文脈はあまり存在していないように思われる。本発表では、この基本的な部分を提案し、モデルや演繹体系などを構成および分析する。

（↓↓接続トラブルにより，午後の講演順，時間が変更されました↓↓）

13:15 〜 13:45 **GAINA Daniel**（Kyushu University）

演題：Forcing and Calculi for Hybrid Logics

梗概： The definition of institution formalizes the intuitive notion of logic in a category-based setting. Similarly, the concept of stratified institution provides an abstract approach to Kripke semantics. This includes hybrid logics, a type of modal logics expressive enough to allow references to the nodes/states/worlds of the models regarded as relational structures, or multi-graphs. Applications of hybrid logics involve many areas of research, such as computational linguistics, transition systems, knowledge representation, artificial intelligence, biomedical informatics, semantic networks, and ontologies. The present contribution sets a unified foundation for developing formal verification methodologies to reason about Kripke structures by defining proof calculi for a multitude of hybrid logics in the framework of stratified institutions. To prove completeness, the article introduces a forcing technique for stratified institutions with nominal and frame extraction and studies a forcing property based on syntactic consistency. The proof calculus is shown to be complete and the significance of the general results is exhibited on a couple of benchmark examples of hybrid logical systems.

[1] Daniel Găină, Forcing and Calculi for Hybrid Logics, Journal of the ACM, **vol. 67**, issue 4, pp. 1–55, 2020

14:00 〜 14:30 **北澤 直樹**（九州大学）

演題：高次元連結閉多様体のホモロジー群コホモロジー環他　幾何的情報の低次元空間への良い可微分写像の具体的構成を介した理解

梗概：　幾何学数学全般で重要な空間である (可微分) 多様体のホモロジーコホモロジーのような代数的な量は重要な不変量である。これらの不変量などを、多様体の上の自身より次元の低く扱いやすい可微分写像や、自然に写像の逆像の連結成分を点とみなして得られる値域と次元の等しい多面体 (Reeb 空間) といった幾何的な対象の構成を通じて、代数的な計算や一般的な考察等も大事にしながら理解しようという試みを紹介する。前世紀半ばには確立されていて、例えば自由度が高くて分類しやすい高次元の単連結閉多様体の分類などでも活躍し、現在に至るまであらゆる幾何学数学で基本的で強力な手法であり続ける Morse 関数の理論、その高次元版である折り目写像の特異点や特異点の集合やその像や逆像に着目して多様体の位相や可微分構造を観調べる話を基礎に、講演者なりに進めている研究の紹介である。

14:45 〜 15:15 **上村 太一**（University of Amsterdam）

演題：The Universal Exponentiable Arrow

梗概：　We show that the opposite of the category of finite generalized algebraic theories and interpretations between them is the finitely complete category freely generated by an exponentiable arrow.

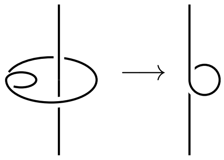
15:15 〜 15:30 クロージング＋連絡など

＊寄稿

Kirby move を TQC 的な MTC skein 操作から視る

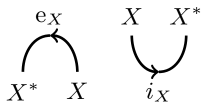
藤井 淳一（大阪教育大学 教育協働学科 理数情報講座）

オリジナルなものから多少変形し、下記のように縦線は複数本でも同様であるが（左右逆になっているが、[1, 4] などに例示がある。特に [4, Fig.18] ではリボン的に示してある）。



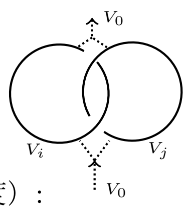
という図形的変換は **Kirby move** と呼ばれ、様々な場面で使われているある種の不変量を保つものであるが、直感的には理解しがたい変形であろう [1)]。あまり明確に書いてあるものがないので、これを **TQC**（トポロジカル量子計算）の立場から（正確には**ユニタリ性**がいるが）**MTC**（モジュラーテンソル圏）の弦表現で意味づけて示してみよう。

TQC も含めて一度この会報 [3] にも述べたが、手短にまとめれば、MTC $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{V})$ とは、**半単純リボン圏**で、以下の公理を満たし、 **modular S-matrix** $S = (s_{ij})$ と呼ばれる可逆行列があることである：

- 直和 $\oplus$ は圏論的には双積であり、各対象に **dual** X^* が以下の意味で決まる:
  次の射 $e_X : X^* \otimes X \to \mathbb{C}$, $i_X : \mathbb{C} \to X \otimes X^*$ が常にある 

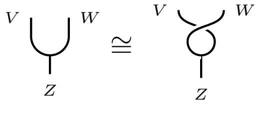
- すべての対象は単純対象の有限集合 $\mathcal{V} = \{V_j | j \in J\}$ で生成され、$\mathcal{V}^* = \mathcal{V}$;
  $X = \oplus_{j\in J} N_j V_j \quad \big(N_j = \dim \mathbf{Hom}(X, V_j)\big)$.
  テンソル積の単位元になる **真空対象** V_0 が $\mathcal{V}$ に含まれる; $V_0 \otimes A = A \otimes V_0 = A$.
- 次の自然同型射がある:
  braiding $\sigma_{V,W}$ 

  , **twist** θ_V 

  $\theta_{V\otimes W} = \theta_V \otimes \theta_W \, \sigma_{W,V} \sigma_{V,W}$
- $\exists n \in \mathbb{N}$; $\mathbf{Hom}(A, B) \cong \mathbb{C}^n$（ベクトル空間として）。特に単純対象については、
  $\mathbf{Hom}(V_i, V_j) = \{0\}$ $(i \neq j)$, $\mathbf{End}(V_j) = \mathbf{Hom}(V_j, V_j) = \mathbb{C}$.
- **modularity**: 複素行列 $S = (s_{ij}) \in \mathbf{Hom}(V_0, V_0) = \mathbb{C}$ が可逆である; $s_{ij} =$ 

- **fusion** (or **splitting**) として、次の**半単純分解**がある（非負整数 N_{ij}^k は重複度）：

$$V_i \otimes V_j = \bigoplus_k N_{ij}^k V_k.$$

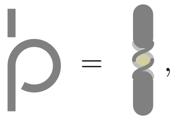
- **rotation** R_{VW}^Z という自然同型射を持つ: 

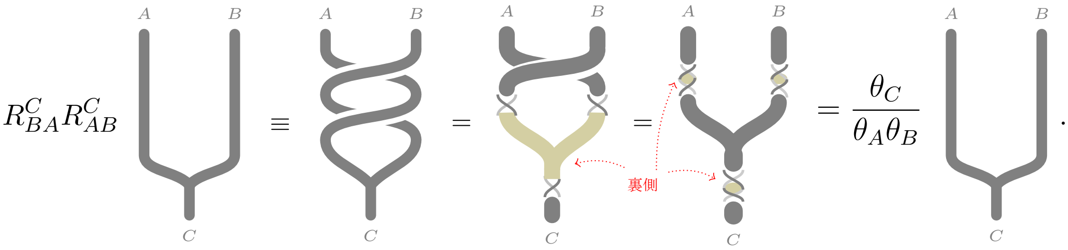
  .

リボンの説明がないが、乱暴に言えば、弦の変形を「幅を持たせたリボン」(framed link) に置き換えて考察可能なことである。このことを使って次の性質を証明してみよう：

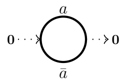
[1)] 余計なことであるが、ネットで検索すると、こういう物理・数学的な概念よりも、子供のキャラクターとしての「(星の) カービー」が飛び回っている姿のほうが多くヒットする。

定理 1 (**monodromy equation**). $R^Z_{WV}R^Z_{VW} = \dfrac{\theta_Z}{\theta_V\theta_W}I.$

Proof. リボン的には $\theta_V \mapsto$  なので、弦 V, W, Z をリボン A, B, C に見直してたどることで性質が得られる：

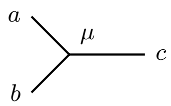


□

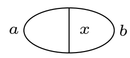
さて、上記にいくつか出てきた自然同型は TQC ではたいていフェーズ変換（絶対値 1 の複素数倍）で表されることになる。MTC の単純対象（の同型類）は TQC では（準）粒子と解釈され、e_X, i_X (およびこれらの対称形 e^*_X, i^*_X は TQC では同じになる) の解釈から、X の dual X^* は粒子 a の**「反粒子」**$\bar{a}$ と解釈され、真空対象 V_0 は真空粒子 $\mathbf{0}$ で表す（1 で表している文献も多い）。それらの**生成** $\mathbf{0} \to a \otimes \bar{a}$ **消滅** $a \otimes \bar{a} \to \mathbf{0}$ を合わせて得られる $\mathbf{Hom}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbb{C}$、すなわち「生成消滅過程」 はスカラーになるが、1 以上の正値であることがわかり、「a **の量子次元** d_a」と呼ばれる。それは、次の定理のように、非負行列 $\mathbf{N}$ を定めたときの最大固有値となること（Perron-Frobenius の定理の変形）からもわかる：

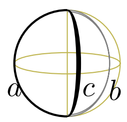
定理 2.
$$d_a d_b = \sum_x N^x_{a,b} d_x = \sum_x (\mathbf{N}_a)_{bx} d_x.$$

重複度を込めた議論を厳密にする場合、N^x_{ab} 次元の標準基底 $1, 2, ..., \mu, ..., N^x_{ab}$ を固定して

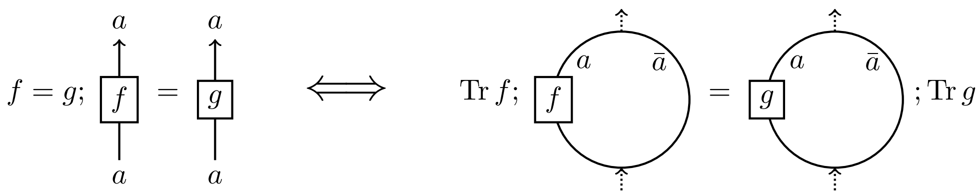


$$\mu = 1, 2, ..., N^c_{ab}$$

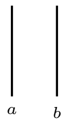
とあらわす。もう一つ特別な閉じた弦の図形として、その形から $\boldsymbol{\theta}$**-net** $\Theta(a, b, x) =$  (ただし、フュージョンの性質で成り立たない物もあるので、その場合は 0 とする; $N^x_{a,b} = 0 \iff \Theta(a, b, x) = 0$) . 0 のときは便宜的に $N^x_{a,b}/\Theta(a, b, x) = 0$ とする。さらに、スカラー評価値として、3 次元として球面上に平等に配置した場合、下図のように「半円周 3 つ分」と見れるので、量子次元の積の平方根と標準化する：

$\Theta(a, b, c) =$  $= \sqrt{d_a d_b d_c}.$

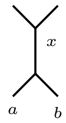
TQC の顕著な性質として、同じ空間への射は上下をつなぎ合わせて閉じたもの（量子次元的に言えば、反粒子との生成消滅過程）を「量子トレース」と言い、トレースを取った時の同値性と元の同値性が対応する：



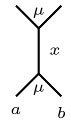
定理 3.



$$= \sum_x \frac{N_{a,b}^x d_x}{\Theta(a,b,x)}$$

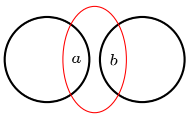


$$= \sum_{x,\mu} \sqrt{\frac{d_x}{d_a d_b}}$$

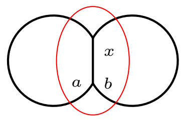


.

Proof. トレースを取った変形の赤い部分を取り出せばわかる：



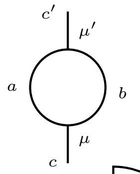
$$= d_a d_b = \sum_x N_{a,b}^x d_x = \sum_x \frac{N_{a,b}^x d_x}{\Theta(a,b,x)}$$



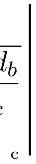
. □

同様にバブル解消公式も得られる：

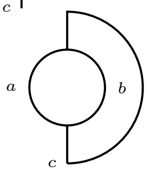
定理 4.



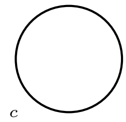
$$= \delta_{c,c'} \delta_{\mu,\mu'} \sqrt{\frac{d_a d_b}{d_c}}$$



Proof.



$$= \Theta(a,b,c) = \sqrt{d_a d_b d_c} = \sqrt{\frac{d_a d_b}{d_c}} d_c = \sqrt{\frac{d_a d_b}{d_c}}$$

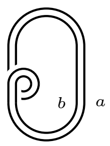


. □

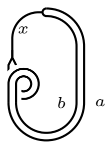
これらの性質を使うと次の関係式が得られる：

補題 1. $\theta_a \theta_b s_{a,b} = \mathrm{Tr}\, \theta_{a\otimes b} = \sum_x N_{a,b}^x \theta_x d_x.$

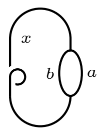
Proof. $\mathrm{Tr}\, \theta_{a\otimes b} =$



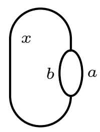
$$= \sum_x \frac{N_{a,b}^x d_x}{\Theta(a,b,x)}$$



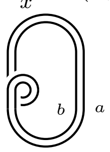
$$= \sum_x \frac{N_{a,b}^x d_x}{\Theta(a,b,x)}$$



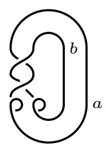
$$= \sum_x \frac{N_{a,b}^x d_x \theta_x}{\Theta(a,b,x)}$$



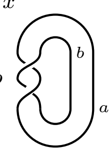
$= \sum_x \frac{N_{a,b}^x d_x \theta_x}{\Theta(a,b,x)} \Theta(a,b,x) = \sum_x N_{a,b}^x d_x \theta_x$. となる一方、



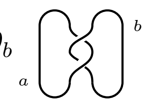
$$=$$



$$= \theta_a \theta_b$$



$$= \theta_a \theta_b$$



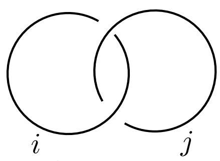
$$= \theta_a \theta_b s_{a,b}.$$

□

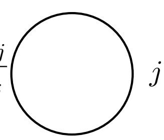
したがって S 行列の「バランス等式」が得られる：

定理 5 (balancing equation). $s_{a,b} = \sum_x N_{ab}^x \frac{\theta_x}{\theta_a \theta_b} d_x.$

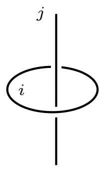
一方、自明な等式



$$= s_{ij} = \frac{s_{ij}}{d_j} d_j = \frac{s_{ij}}{d_j}$$

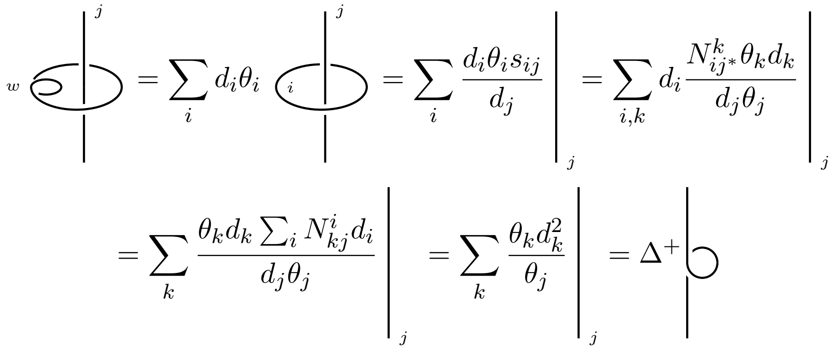


の j のトレースをやめて、



$$= \frac{s_{ij}}{d_j}$$

がわかる。一方バランス等式 $s_{ij} = \frac{\sum_k N_{ij^*}^k \theta_k d_k}{\theta_i \theta_j}$ を使って、**Gauss sum** $\Delta^\pm = \sum_x d_x^2 \theta_x^\pm$ と、**積分ベクトル** $w = \sum_x d_x x$ （$d_w = \sum_x d_x^2 = D^2$ で D は**総量子次元**と呼ばれる）を考えよう。すると、



となって、右上の図に対応するものが得られる。初めの図は Δ^+ というスカラー倍をするだけの同型変形ということであり、本数を増やしても反対のスピンでも（Δ^-）でも同様である。これが Kirby move の TQC 的な様相である。

参考文献

[1] B.Bartlett, Categorical Aspects of Topological Quantum Fiels Theiries, Master Thesis, Utrecht Univ., 2005.

[2] 藤井淳一, TQC におけるモジュラー S 行列をめぐって, 大阪教育大学 紀要第 III 部門, **64**(2016), 15–33.

[3] 藤井淳一, トポロジカル量子計算とカテゴリー, 国際数理科学協会会報, **95**(2015), 3–10. http://www.jams.or.jp/kaiho/kaiho-95.pdf

[4] N.Reshetikhin and V.G.Turaev, Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups, In vent. Math., **103**(1991), 547–597 .