一般社団法人
国際数理科学協会会報

No.112/2019.10

編集委員： 藤井淳一（委員長）

目次

国際数理科学協会 2019 年度年会

年会担当理事 濵田 悦生

国際数理科学協会 2019 年度年会の各分科会が、以下の内容で開催されましたので、ご報告いたします。

「統計的推測と統計ファイナンス」分科会研究集会

世話人: **濵田悦生**（大阪大学）, **地道正行**（関西学院大学）

開催日時: 2019 年 8 月 24 日 (土) 10:30〜17:00

場所: 関西学院大学 梅田キャンパス 1401 号教室

1　**辻 健太朗** (大阪府立大学 大学院工学研究科), **林 利治** (大阪府立大学 大学院工学研究科)

『多重代入法による欠測の処理とその応用』

サンプル調査における欠測を処理する方法として代入法があるが, 単純な単一代入法には, 推定値の分散を過小評価するという問題がある. それを解決するように発展した方法が多重代入法であり, この講演では, その手順, 使用例などを紹介した.

2　**吉田 俊輔** (大阪府立大学 大学院工学研究科), **林 利治** (大阪府立大学 大学院工学研究科)

『データの欠測を考慮して判別を行う Additive LS-SVM の精度への調整パラメータの影響』

高齢者の身体情報等から 3 つに分類された QOL (生活の質) を判別する問題において, Wang et al. (2018) は欠測を考慮して判別を行う additive LS-SVM を提案した. 本発表では, それに含まれる調整パラメータの判別精度への影響を調べるためのシミュレーション実験の結果を述べ, 調整により精度が向上することを報告した.

3　**山本 渉** (大阪府立大学 大学院工学研究科), **林 利治** (大阪府立大学大学院工学研究科)

『サポートベクターマシンに含まれる調整パラメータの高速な選択法の紹介』

サポートベクターマシンにおける調整パラメータ選択の高速化手法を紹介した. Fayed et al. (2019) による高速化手法 SVM-ICDF-CC は彼らの実験において, 通常の SVM と比較して, 同程度のテスト分類精度を達成しながら, 約 5〜20 %の計算時間での学習を実現したことを報告した.

4　**野村 魁** (大阪府立大学 大学院工学研究科), **林 利治** (大阪府立大学 大学院工学研究科)

『制約付き勾配ブースティング木とその調整パラメータの選択に関する検討』

予測値に制約がある回帰問題に対し, Israeli et al. (2019) による勾配ブースティング木を用いた学習アルゴリズムがある．それは, 適合度と制約のバランスを調整するパラメータを持つ．本研究では, そのパラメータの選択法を新たに提案し, Israeli et al. (2019) の選択法と比較した.

5　**齋藤 美桜里** (関西学院大学 商学部), **地道 正行** (関西学院大学 商学部)

『 R による GIS データの可視化 (仮) 』

地域分析の際に用いる行政区域ごとの位置・属性・数値情報がまとめられた統計 GIS データは各府省等が無償で提供しており、ダウンロードすることで取得出来る。このように取得したデータへの解釈を容易にするため、統計ソフト R を活用して地図上にデータを表現することを試みた。本研究では、ggplot2 パッケージと leaflet パッケージによる 2 つの可視化手法について解説した。また、近年注目を集める GIS 分析パッケージ sf についても解説を行った。

6　**髙岸 茉莉子** (大阪大学 大学院基礎工学研究科)

『係留寸描法を用いた回答傾向の違いの補正について』

質問紙調査において，回答者によって異なる回答傾向を検知し，補正するための方法として係留寸描法がある．本報告では，その係留寸描法に基づく過去の補正法と比較した上で，新たな補正法を提案した.

7　**濵田 悦生** (大阪大学 大学院基礎工学研究科)

On causal inference without counterfactuals

統計的因果推論において反事実を想定しないモデルとして確率過程を利用した動態モデルがあるが, そこでの重要な仮定である local independence に対して, 潜在的反応変量での強く無視出来る可能性による条件付き独立性との関係を考察した.

8　**地道 正行** (関西学院大学 商学部) , **宮本 大輔** (奈良先端科学技術大学院大学 先端科学技術研究科), **阪 智香** (関西学院大学 商学部), **永田 修一** (関西学院大学商学部)

『探索的財務ビッグデータ解析：前処理の並列化』

昨年度の研究では、財務関連の情報を含むデータベースから抽出された規模の大きい粗データファイルを、多様なデータ解析環境で扱えるファイル形式 (CSV ファイル) に変換する工程 (前処理) について述べ、これらの工程を再現可能なものとすることを試みた。今年度は、これらの工程を GNU parallel 環境を利用した並列化を検討し、速度 (Velocity) を向上させることを検討した。

9　**林 利治** (大阪府立大学 大学院工学研究科)

『単位根領域を持つ閾値自己回帰モデルにおける最小 2 乗推定』

定常状態と単位根状態を持つ 1 次閾値自己回帰モデルにおいて, Gao et al. (2013) は最小 2 乗推定量の漸近性質を明らかにした．この講演では, 2 次閾値自己回帰において, シミュレーション実験により 1000 時刻までの観測からでも定常状態のパラメータの推定精度は高くないことを示し, その原因と対処法を報告した.

「代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会」（ALGI）

日時：2019 年 8 月 31 日（土）〜 9 月 1 日（日）

場所：九州大学 伊都キャンパス IMI コンファレンスルーム

招待講演者： **勝股審也**（国立情報学研究所） **竹内泉**（産業技術総合研究所）

長谷川勇（スクウェア・エニックス） **前原貴憲**（理化学研究所）

幹事：**西澤弘毅**（神奈川大学）、**津曲紀宏**（崇城大学）

世話人：**河村彰星**（九州大学）、**溝口佳寛**（九州大学）

8 月 31 日（土）

1. 招待講演: **勝股 審也** (国立情報学研究所 ERATO 蓮尾メタ数理システムデザインプロジェクト)

題目: 物理情報システムへの数学的アプローチ

梗概: ERATO 蓮尾メタ数理システムデザインプロジェクトでは, ソフトウェアシステム開発のため形式手法を, 物理情報システムの開発に拡張し, 安全で高品質な工業製品の作成に, 理論・応用の両面から貢献することを目指しております. 本プロジェクトのメタ理論的統合グループ (グループ 0) では, 物理情報システムの形式化と構築において基礎となる概念の数学的定式化と分析を進めています. 講演ではプロジェクトの紹介と, 本グループで得られた以下の結果についてご紹介します.

・双模倣関係のゲームによる特徴づけの一般化 [小森田ら LICS'19] 状態遷移系内の二つの状態の等価性として広く用いられているのが双模倣関係です. いくつかのタイプの状態遷移系においては, それらの上の双模倣関係を二人ゲームの勝利可能位置により特徴づけることが可能ですが, この結果を一般化する方法は知られていませんでした. 本研究では状態遷移系を余代数に, 関係の概念をファイバー圏により一般化し, 関手の余稠密持ち上げ [Sprunger ら CMCS '18] が定める双模倣関係に対して, それを勝利可能位置として特徴づけるゲームが構成できることを示しました.

・リカレントニューラルネットワークの微分 [Sprunger & 勝股 LICS'19] リカレントニューラルネットワーク (RNN) は時系列データを処理するようにニューラルネットを拡張したもので, Mealy 機械と類似の構造を持ちます. 本研究ではニューラルネットのパラメータ調整に欠かせない微分演算を RNN に拡張する方法を与えました. この微分演算は Cockett らの微分圏の公理を満たし, また RNN を微分して有限展開したものが, RNN を有限展開して微分する Backpropagation through time (BPTT) と呼ばれる操作と一致することを示しました.

2. **Devi Rahmah Sope** (近畿大学)

題目: On a Fuzzification and Comparison of Clustering Indices.

梗概: Fuzzy clustering is given by assigning to each data a set of membership degree to clusters. Quality of such a clustering is evaluated by measuring compactness and separateness. In crisp clustering, many clustering indices are proposed. In this article, we try to fuzzify these clustering indices by using membership degrees with higher order exponent and evaluate the effect in optimization problem.

3. **冨田 悠** (京都大学 数理解析研究所)

題目: Constructing non-symmetric closed categories from planar combinatory algebra

梗概: Realizability において用いられる assembly, modest set の圏の構成を平面ラムダ計算や, 対応する組合せ代数に適用することにより, Cartesian closed catalogue や symmetric monoidal closed category

よりも弱い構造である closed category, closed multi-category などが得られる．これら圏構造を与えるための, 構成の基となる組合せ代数に要求される必要条件や十分条件を述べる．

4. 招待講演: **竹内 泉** (産業技術総合研究所)

題目: 数学と変数

梗概: Mathematics has various usages of variables. There arise a question: Although mathematics has various kinds of variables, how did Frege banish such variables and represent mathematics by his predicate logic with only bound variables? In industrial words of the same question: How do we express various kinds of variables in formal proof systems, such as Coq, Isabelle, and so on, which have only free variables and bound variables? Analysing such usages and interpreting them into predicate logic have the following two significance. The first significance is an academic one. The analysis of usages of variables helps the studies of the histories of mathematics, logic and philosophy. By using the usages of variables as a clue, we can compare the theories by Aristotle, Leibniz and Frege. The other one is industrial. By proving mathematical theorems in formal proof systems, we can verify the specifications of softwares. This study shows the interpretations of various kinds of variables into predicate logic.

5. **本浦 庄太** (日本電気株式会社)

題目: On Logic for Conditional Probabilities of Propositional Formulae

梗概: Popper proposed, in his work (Popper, 1959), a notion of conditional probability whose arguments are propositional formulae, which is called a Popper function. In this talk, we first explain that an instance of many-sorted monadic second-order logic can define the class of Popper functions, up to isomorphism. We then prove that, for any first-order formula in which any occurrence of a propositional formula is an argument of the predicate symbol for Popper function, it is decidable whether or not the formula is valid. At the end of the talk, we mention a technique to calculate the range of the value of a given conditional probability under given conditions expressed by such first-order formulae.

6. **藤井 宗一郎** (京都大学 数理解析研究所)

題目: Enriched categories and tropical mathematics

梗概: We point out a connection of enriched category theory over a quantale and tropical mathematics. Quantales or complete idempotent semirings, as well as matrices with coefficients in them, are fundamental concepts in both fields. We show that standard category-theoretic constructions on matrices, namely composition, right extension, right lifting and the Isbell hull, can unify various notions in tropical mathematics and related fields.

7. **安田 康史** (神奈川大学)

題目: Relationship among orders, semigroups, and quantales

梗概: Nishizawa and Furusawa showed a relational embedding of powerset quantales in RAMiCS 2012. To analyze the embedding, we studied the relationship among orders, semigroups, and quantales.

8. **西澤 弘毅** (神奈川大学)

題目: Correspondences among classes of weak preorders, partial semigroups, and quantales

梗概: Our goal is to extend the relational embedding of powerset quantales to a dual equivalence between the category of powerset quantales and the category of some class of preorders. In this talk, we define 6 pullbacks in Cat meaning correspondences among classes of weak preorders, partial semigroups, and quantales.

9 月 1 日（日）

1. 招待講演: **長谷川 勇** (スクウェア・エニックス)

   題目: ゲーム開発への代数・論理・幾何と情報科学の適用

   梗概: 近年のゲームの大規模化に伴い，ゲーム開発や，それらの品質保証にかかる工数が増大し，ゲーム開発における問題の一つとなっている．こうした開発工数の増大への対策として，ゲーム開発に数学・情報科学を組み合わせた手法を適用することで，これまで機械化が難しく人手に頼っていた工程を自動化し，生産性を向上できる可能性がある．本講演では，モデル検査によるスクリプトの検証など，ゲーム開発に数学・情報科学を適用した事例を紹介する．

2. **塚田 武志** (東京大学)

   題目: 不動点算術とプログラム検証

   梗概: TBA

3. **立木 秀樹** (京都大学 人間・環境学研究科)

   題目: 非構成的対象を扱った証明からのプログラム抽出

   梗概: TBA

4. 招待講演: **前原 貴憲** (理化学研究所)

   題目: 代数的・幾何的・論理的制約下の劣モジュラ関数最大化

   梗概: 劣モジュラ集合関数を近似最大化する問題は基本的な組合せ最適化問題であり，機械学習・データマイニングなど幅広い領域に応用をもつ．近年我々はこの問題を集合よりも複雑な制約領域，たとえば束・複体・論理式で指定されるグラフなどに拡張してきた．本発表では現在劣モジュラ最大化がどのような制約で解かれているかを代数・幾何・論理との関係を中心に紹介する．

5. **田中康平** (信州大学 経法学部)

   題目: Topological and combinatorial methods in symmetric motion planning

   梗概: M. Farber によって導入された topological complexity はロボットモーションの設計に関わる位相不変量である．Farber らはその後，対称性を考慮した symmetric topological complexity を導入した．本講演では，symmetric topological complexity の組合せ論的近似，およびその精密化について，loop-free category を用いた考察を紹介したい．

6. **山形頼之** (産業技術総合研究所)

   題目: Recent progress of consistency proofs of equational systems inside bounded arithmetics

   梗概: We report some results extending a consistency proof of Cook and Urqhart's PV minus induction inside S22.

「確率モデルと最適化」分科会

世話役：**北條仁志**（大阪府立大学）

日本オペレーションズ・リサーチ学会 研究部会「不確実状況下における意思決定とその周辺」

（主査 **小出武** (甲南大学)，幹事 **井上 真二** (関西大学)）との共催

日時： 2019 年 8 月 23 日（金）14:00〜17:00 （13:30 開場）

場所： JEC 日本研修センター 神戸元町 会議室 B-1

兵庫県神戸市中央区元町通 2 丁目 3 番 2 号 ジェムビル 2 階

（JR 元町駅・阪神元町駅から徒歩 3 分，阪急神戸三宮から徒歩 8 分）

http://www.jec.ne.jp/kobe/access/index.html

講演 1

蓮池 隆（早稲田大学），**一藤 裕**（長崎大学）

『様々な Web データ・Wifi ログデータを活用した観光者行動解析』

概要：ビッグデータ解析があらゆる分野で実施されている中，観光分野においてもその必要性は認められているが，まだ発展途上である．本講演において，Web 上から取得可能なデータのみならず，Wifi やモバイル端末から得られるアクセスログデータを活用し，宿泊場所の予約から当日の観光行動までの解析手法について紹介する．

講演 2

宝崎 隆祐（防衛大学校）

『警備ゲームに関する最近の話題』

概要：2001 年 9.11 に米国で発生した国際テロによる同国の Homeland Security 政策は OR の分野にも大きな影響を与え，警備ゲームの研究が促進した観がある．警備ゲームの多くの研究では，情報取得における侵入者側の警備側に対する優位性を理由として，シュタッケルベルグ・ゲームとして問題をモデル化する傾向にある．本発表では，筆者の研究内容を紹介しつつ，このゲームに特徴的な解法等について解説する．

＊寄稿

非可換数学の華

— Löwner-Heinz 不等式 —

藤井 正俊　　大阪教育大学　名誉教授

1　はじめに

ここでは、ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素を単に作用素と呼ぶことにします。作用素 A が positive $(A \geq 0)$ であるとは,

$$(Ax, x) \geq 0 \quad x \in H$$

が成り立つこととします。特に、A が positive かつ invertible のとき、$A > 0$ で表します。行列で言えば、A が 非負定値 (positive semidefinite) であることが positive $(A \geq 0)$ に、正定値が $A > 0$ に当たります。また、自己共役作用素 A, B に対して、$A - B \geq 0$ によって、作用素順序 $A \geq B$ が自然に導入されます。$\mathbb{R}^+$ 上で定義された連続関数 f による functional calculus がこの順序を保存する、すなわち

$$A \geq B \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f(A) \geq f(B)$$

のとき、f を作用素単調といいます。ここで、冪関数について重要な事実を述べねばなりません。作用素の非可換性が働いて、

$$t \ \rightarrow \ t^{\alpha} \ \textbf{は、}\alpha \in [0,1] \ \textbf{のときのみ、作用素単調である。}$$

通常、これは Löwner-Heinz inequality と呼ばれています。以下 (LH) で表わします。[26], [22], [28]

t^2 が作用素単調でないことは、次の行列から知られます：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

また、これより、$\alpha > 1$ のとき、t^{α} は作用素単調ではないことが知られます。

さて、(LH) より、$\alpha \in [0,1]$ に対して、α-幾何平均 $\#_{\alpha}$ が次のような形で定義されます：

$$A \#_{\alpha} B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^{\alpha} A^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } A > 0,\ B \geq 0,$$

cf. [29], [30], [1]。このように定義すると、複雑そうに見えますが、A と B が交換可能であれば、数の場合と同じように、

$$A \#_{\alpha} B = A^{1-\alpha} B^{\alpha}$$

特に、$\alpha = \frac{1}{2}$ の場合は、

$$A \# B = \sqrt{AB}$$

となります。

一般的には、Kubo-Ando [25] による作用素平均の理論によって、非負作用素単調関数と作用素平均の間には、アフィン - 同型が

$$A \ \sigma \ B = A^{\frac{1}{2}} f(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } A > 0,\ B \geq 0$$

によって与えられます。特に、

$$f(x) = 1 \ \sigma \ x$$

は作用素平均 σ の表現関数と呼ばれています。なお、作用素平均は、次の３条件を満たす２項演算を言います：

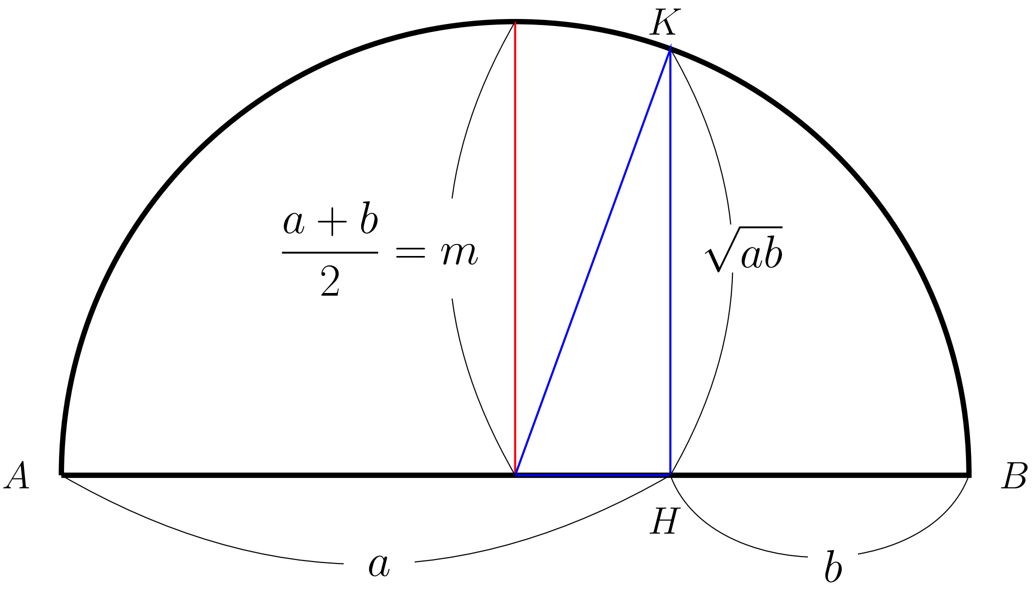
Monotonicity:	$A \le C,\ B \le D \ \Rightarrow \ A \ \sigma \ B \le C \ \sigma \ D$
Upper semi-continuity:	$A_n \downarrow A,\ B_n \downarrow B \ \Rightarrow A_n \ \sigma \ B_n \downarrow A \ \sigma \ B$
Transformer inequality:	$T^*(A \ \sigma \ B)T \le (T^*AT) \ \sigma \ (T^*BT)$ for all T
(Normalization:	$1 \ \sigma \ 1$)

2　算術一幾何平均の不等式

まず、平均の不等式の中で、最もポピュラーなのが、算術-幾何平均の不等式だと思います。

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \qquad (a, b \ge 0)$$

これに対する平面幾何的な証明の中で、筆者が気に入っているのが次の図によるものです：



図には明示してしていないが、$\triangle AKB$ が直角三角形を形成することが肝要で、大工道具の術の内、曲尺で平方根の値がわかるということはこれに依っているようです。実際に、$b=1$ としておいて、曲尺の角を K に合わせ、さらに、A, B 両方を曲尺に合わせると、$\sqrt{a}$ が KH として出現します。

さて、正作用素 A, B に対して、算術平均は正数の場合と同様に

$$A \nabla B = \frac{A+B}{2}$$

で定義されます。算術一幾何平均の不等式は、正作用素に対しても成立します：

$$A \nabla B \ge A \# B$$

算術一幾何平均の不等式の有力な一般化は、重みを付けるという方法です。重み付き算術平均は、

$$A \nabla_\alpha B = (1-\alpha)A + \alpha B$$

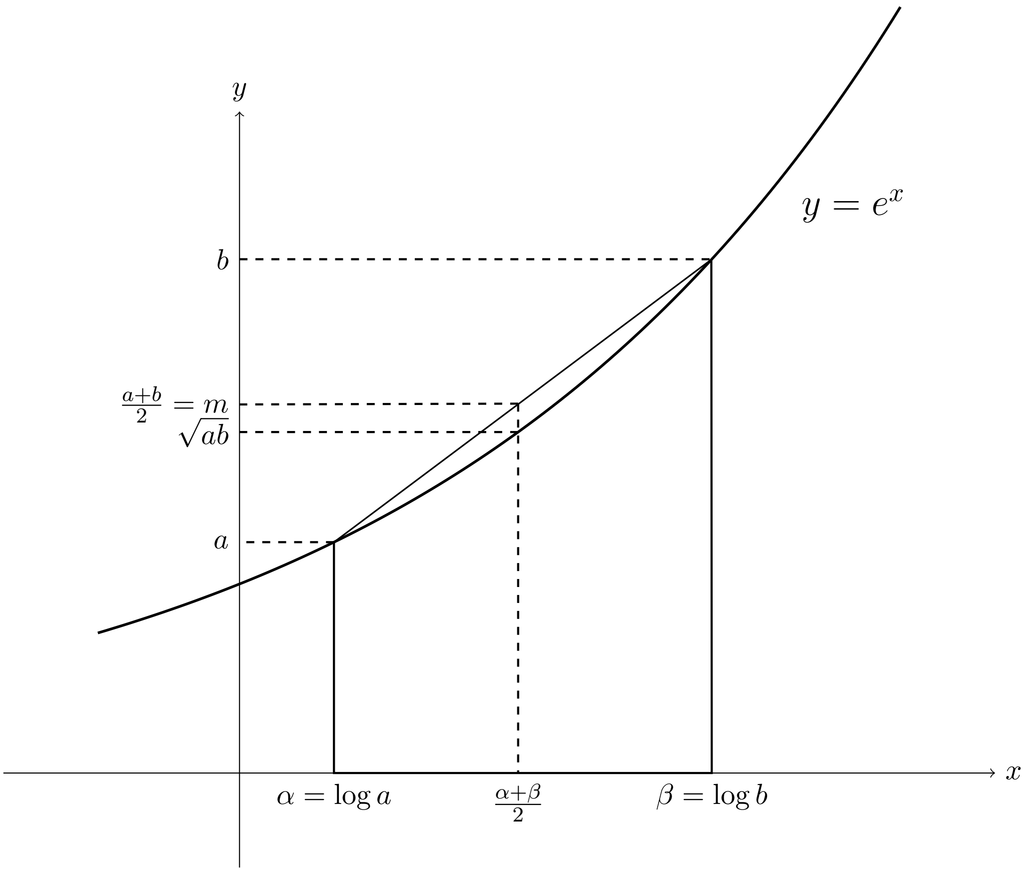
で定義されます。

重み付き算術一幾何平均の不等式

$$(1-\alpha)a + \alpha b \geq a^{1-\alpha} b^{\alpha} \quad 0 \leq \alpha \leq 1, a, b > 0$$

このように、重みを付けると、途端に上記の証明は、これには不適応と言わざるを得ません。しかし、つぎに示す算術一幾何平均の不等式の証明は、重み付きのそれに対しても、完全に対処できることが容易に検証できます。
実際に、a, b の幾何平均は、a, b 間の距離を $D_g(a, b) = \log|a-b|$ で定めたときの中点であることが重要な点である。(算術平均は、当然のことながら、$D_a(a, b) = |b-a|$ で定めたときの中点になっています。)

[解析的証明]　この証明を標語的に言えば、「指数関数が凸であることの不等式による表現が算術-幾何平均の不等式である」ということになります。



正作用素に対する重み付き算術一幾何平均の不等式は、

$$A \nabla_\alpha B \geq A \#_\alpha B$$

と表せます。

3 PAMS1972

Löwner-Heinz inequality と作用素幾何平均に纏わる研究の進展を歴史的見地から見るとき、1972 年は特別な意味を持つと思います。アメリカ数学会の紀要の 36 巻 1 号の Shorter Note Section に 2 編の論文が掲載されています。

[P] G. K. Pedersen, *Some operator monotone functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **36**(1972), 309–310.

[PT] G. K. Pedersen and M. Takesaki, *The operator equation* $THT = K$, Proc. Amer. Math. Soc., **36**(1972), 311–312.

前者は、(LH) の見事な証明の提示のために書かれたものです。使う道具は、スペクトル半径 $r(\cdot)$ の可換性:

$$r(XY) = r(YX)$$

と、A が自己共役ならば、$r(A) = \|A\|$, そして、どんな作用素に対しても

$$r(X) \le \|X\|$$

が成立することだけです。

Sexy proof of (LH) by Pedersen
$I = \{\alpha \in [0,1];\ x^\alpha \text{ is operator monotone }\}$ とおく。
$0, 1 \in I$ なので、I が凸、即ち、

$$2\alpha, 2\beta \in I \ \Rightarrow\ \alpha + \beta \in I$$

を示せばよい。結論を書き直せば、

$$A^{-1} \ge B \ge 0 \ \Rightarrow\ A^{-(\alpha+\beta)} \ge B^{\alpha+\beta}, \text{i.e., } A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} B^{\alpha+\beta} A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \le 1$$

さて、仮定より、$A^{-1} \ge B \ge 0$ の下では、

$$A^\alpha B^{2\alpha} A^\alpha \le 1,\ A^\beta B^{2\beta} A^\beta \le 1, \text{i.e., } \|A^\alpha B^\alpha\| \le 1,\ \|B^\beta A^\beta\| \le 1$$

これより、準備してきたことを繋ぎ合わせることにより、結論を得ます :

$$\|A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} B^{\alpha+\beta} A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\| = r(A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} B^{\alpha+\beta} A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}) = r(A^\alpha B^{\alpha+\beta} A^\beta)$$

$$\le \|A^\alpha B^{\alpha+\beta} A^\beta\| \le \|A^\alpha B^\alpha\| \|B^\beta A^\beta\| \le 1.$$

次に、後者の論文 [PT] は、表題の作用素方程式の解の存在の同値条件を議論しています。定理は

Theorem PT. *For given* $A, B \ge 0$ *with nonsingular* A*, there exists a solution* $X \ge 0$ *of* $XAX = B$ *if and only if* $(A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \le aA$ *for some* $a > 0$*. This condition will be satisfied if* A *is invertible or, more generally, if* $B \le a^2 A$ *for some* $a > 0$*.*

そして、最後に次のような注意があります。*If* A *is invertible, then the operator equation* $XA^{-1}X = B$ *has a unique solution*

$$X = A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}.$$

1972 年当時は、まだ作用素幾何平均という概念が抽出されていなかったので、何とも残念なのですが、この解は正に幾何平均 $A\#B$ そのものです。なお、Matrix Theory では、この方程式は Riccati equation と呼ばれています。
実際には、作用素幾何平均は、Pusz-Woronowicz (1975）を経て、今や有名な Ando の Lecture Note (1978) に至り、作用素行列を用いて、次のような形で表出されました： $A, B \geq 0$ に対して、

$$A \,\#\, B = \max\{X \geq 0;\ \begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \geq 0\}$$

ここで、A が invertible であるとすると、

$$\begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \geq 0 \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} 1 & A^{-\frac{1}{2}}XA^{-\frac{1}{2}} \\ A^{-\frac{1}{2}}XA^{-\frac{1}{2}} & A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow\ A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \geq (A^{-\frac{1}{2}}XA^{-\frac{1}{2}})^2$$

$$\Rightarrow\ (A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \geq A^{-\frac{1}{2}}XA^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\ A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} \geq X$$

従って、$A \,\#\, B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$
この議論は、1980 年の Kubo-Ando の作用素平均の理論に統一されました。（第 1 節の最後の部分がそのまとめです。）

4 (LH) に連関する不等式

(LH) は、多様な顔を持っていることを同値なノルム不等式を幾つか挙げることにより示します。[10], [19]

Theorem 4.1. 次の不等式は（*LH)* と同値である *(A,* $B \geq 0$ とする。）:

(1) $\|B^tA^tB^t\| \leq \|BAB\|^t$ *for* $0 \leq t \leq 1$.
(2) $\|A^tTB^{1-t}\| \leq \|AT\|^t\|TB\|^{1-t}$ *for* $0 \leq t \leq 1$ *and arbitrary* T.
(3) $\|ABA\| \leq \|A^2B\|$
(4) $\|TS\| \geq \|ST\|$ *if* ST *is selfadjoint.*
(5) $\|(A\#_tB)^{\frac{1}{2}}(C\#_tD)^{\frac{1}{2}}\| \leq \|A^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}\|^{1-t}\|B^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}\|^t$ *for* $0 \leq t \leq 1$.
(6) $(T^*AT)^t \geq T^*A^tT$ *for contraction* T *and* $0 \leq t \leq 1$.

(1) は、Araki [3] によりますが、次のようにも変形できます：
(1’) $\|B^tA^tB^t\| \geq \|BAB\|^t$ for $t \geq 1$.
(1”) $\|A^tB^t\| \leq \|AB\|^t$ for $0 \leq t \leq 1$.
(5) は Corach-Porta-Recht [5] 、(6) は Hansen [21] によります。

一方、Heinz [22] は、(LH) よりもう少し強い不等式を示しています：

Heinz inequality. Let $A,\ B \geq 0$. Then

$$\|AT + TB\| \geq \|A^tTB^{1-t} + A^{1-t}TB^t\| \quad \text{for } 0 \leq t \leq 1 \text{ and arbitrary } T.$$

これにも同値な不等式が幾つかあります。[27], [4], [6], [7], [11], [14]

Theorem 4.2. (1) $\|R^*RT + TSS^*\| \geq 2\|RTS\|$ *for arbitrary* R, S, T.
(2) $\|STR^{-1} + S^{-1}TR\| \geq 2\|T\|$ *for invertible selfadjint* S, R *and arbitrary* T
(3) $\|STS^{-1} + S^{-1}TS\| \geq 2\|T\|$ *for invertible selfadjint* S *and arbitrary* T
(4) $\|ReA^2T\| \geq \|ATA\|$ *for* $A \geq 0$ *and selfadjoint* T.
(5) $\|ReTS\| \geq \|ST\|$ *if* ST *is selfadjoint.*

Theorem 2.1 (4) と Theorem 2.2 (5) を比べることにより、Heinz 不等式が (LH) より強い不等式であることが分かります。また、 Theorem 2.2 (1) 等より、Heinz 不等式は、算術幾何平均不等式のノルム版だと解釈できます。

5 Ando-Hiai inequality

Ando-Hiai [2] による log-majorization theorem は、次のように表されています: $\alpha \in [0,1]$ と正定値行列 A, B に対して、

$$(A\#_\alpha B)^r \succ_{(\log)} A^r\#_\alpha B^r \quad (r \geq 1).$$

が成り立つところが実際に証明されているのは、次の作用素不等式

$$A\#_\alpha B \leq 1 \implies A^r\#_\alpha B^r \leq 1 \quad \text{for } r \geq 1$$

で、Ando-Hiai inequality (AH) と呼ばれています。 この証明に必要な器材は、(LH) だけだと言えます。

Proof of (AH).

仮定：$A \#_\alpha B \leq 1 \Leftrightarrow (A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha \leq A^{-1} \Leftrightarrow C^\alpha \leq A^{-1} \Leftrightarrow C^{-\alpha} \geq A$

結論：$r = 1 + \epsilon$ ($\epsilon \in [0,1]$) として、

$$A^r\#_\alpha B^r = A^{\frac{1}{2}}(A^\epsilon \#_\alpha A^{-\frac{1}{2}}B^rA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} \leq 1$$

を示せばよい。
そこで、右辺の括弧の中を調べます。
(i) (LH) より、$A^\epsilon \leq C^{-\alpha\epsilon}$ が分かります。
(ii) 次に、$A^{-\frac{1}{2}}B^rA^{-\frac{1}{2}} \leq C^{(1-\alpha)\epsilon+1}$ を示します。
そのために、記号と必要な公式を用意します：$\alpha \notin [0,1]$ に対して、

$$A\natural_\alpha B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}} \quad (A, B > 0)$$

$$A\natural_\alpha B = B\natural_{1-\alpha}A = B(B^{-1}\natural_{\alpha-1}A^{-1})B$$

これを使うと、(ii) が得られます：

$$\begin{aligned} A^{-\frac{1}{2}}B^rA^{-\frac{1}{2}} &= A^{-\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}CA^{\frac{1}{2}})^rA^{-\frac{1}{2}} \\ &= A^{-1} \natural_r C = C(C^{-1} \#_{r-1} A)C \\ &\leq C(C^{-1} \#_\epsilon C^{-\alpha})C = C^{(1-\alpha)\epsilon+1} \end{aligned}$$

(i), (ii) より、$A^{\epsilon} \#_{\alpha} A^{-\frac{1}{2}}B^rA^{-\frac{1}{2}} \le C^{-\alpha\epsilon} \#_{\alpha} C^{(1-\alpha)\epsilon+1} = C^{\alpha} \le A^{-1}$ が分かり、結論が得られます：

$$A^r\#_{\alpha}B^r = A^{\frac{1}{2}}(A^{\epsilon} \#_{\alpha} A^{-\frac{1}{2}}B^rA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} \le A^{\frac{1}{2}}A^{-1}A^{\frac{1}{2}} = 1$$

この２変数化は次の形で与えられます。 [12], [15], [14]

Generalized Ando-Hiai inequality (GAH).
If $A\#_{\alpha}B \le 1$ for $\alpha \in [0,1]$ and positive operators A, B, then $A^r\#_{\beta}B^s \le 1$ for $r, s \ge 1$, where $\beta = \frac{\alpha r}{\alpha r+(1-\alpha)s}$.

(GAH) の表し方については、次の方が良いかもしれません：

If $A\#_{\frac{1}{q+1}}B \le 1$ for some $q > 1$ and positive operators A, B, then $A^r\#_{\frac{r}{qs+r}}B^s \le 1$ for $r, s \ge 1$.

それはさておき、(GAH) については、２つの one-sided 版は同値であって、さらにそれらは Furuta inequality の別表現であることが知られています。すなわち、

次の３つは同値:
(i) $A\#_{\alpha}B \le 1 \ \Rightarrow\ A^r\#_{\frac{\alpha r}{\alpha r+(1-\alpha)}}B \le 1$ for $r \ge 1$.
(ii) $A\#_{\alpha}B \le 1 \ \Rightarrow\ A\#_{\frac{\alpha}{\alpha+(1-\alpha)s}}B^s \le 1$ for $s \ge 1$.
(iii) Furuta inequality

さて、ごく最近の (AH) に関する発展として、次の結果が [31], [24] にあります。
$\alpha \notin [0,1]$ に対して、２項演算 $\natural_{\alpha}$ は次で定義していました：

$$A\natural_{\alpha}B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\alpha}A^{\frac{1}{2}} \quad (A, B > 0)$$

Theorem S. For $\alpha \in [-1,0]$ and $A, B > 0$,

$$A\natural_{\alpha}B \le 1 \ \Rightarrow\ A^r\natural_{\alpha}B^r \le 1 \quad \text{for } r \in [0,1].$$

以前に、(AH) を一般化した手法が、Theorem S に対して有効かどうかであるが、次のことが成立します:

Lemma 5.1. *If $A\natural_{\alpha}B \le 1$ for $\alpha \in [-1,0]$ and positive invertible operators A and B, then $A^r\natural_{\beta}B \le 1$ for $r \in [0,1]$, where $\beta = \frac{\alpha r}{\alpha r+(1-\alpha)}$.*

Lemma 5.2. *If $A\natural_{\alpha}B \le 1$ for $\alpha \in [-1,0]$ and positive invertible operators A and B, then $A\natural_{\beta}B^s \le 1$ for $s \in [\frac{-2\alpha}{1-\alpha}, 1]$, where $\beta = \frac{\alpha}{\alpha+(1-\alpha)s}$.*

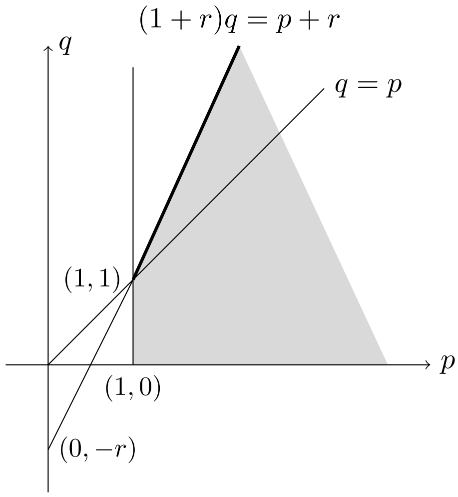
ここで、s に関する制限 $s \in [\frac{-2\alpha}{1-\alpha}, 1]$ は、$\beta \in [-1,0]$ を保証するためのものです。
この２つの補題を組み合わせることによって、Theorem S の一般化が得られます：

Theorem 5.3. *If $A\natural_{\alpha}B \le 1$ for $\alpha \in [-1,0]$ and positive invertible operators A and B, then $A^r\natural_{\beta}B^s \le 1$ for $r \in [0,1]$ and $s \in [\frac{-2\alpha r}{1-\alpha}, 1]$, where $\beta = \frac{\alpha r}{\alpha r+(1-\alpha)s}$.*

6 Furuta inequality

よく知られているように、古田不等式は (LH) の見事な一般化であります。

Furuta Inequality (FI)



If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$,

(i) $$(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (B^{\frac{r}{2}} B^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

and

(ii) $$(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}} A^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

hold for $p \geq 0$ and $q \geq 1$ with $(1+r)q \geq p + r$.

Furuta inequality に関する文献は、[17], [18], [8], [9], [32]、[14]　など多岐にわたります。
(FI) が (LH) を含んでいることは、$r = 0$ とすると、付帯条件が $q \geq p$ となることにより検証されます。一方で、(LH) より付帯条件において等号成立のときが最も重要で、α-geometric mean を用いてそれを表すと次のように整理されます :

If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$

$$A^{-r} \ \#_{\frac{1+r}{p+r}} \ B^p \leq A$$

holds for $p \geq 1$.

(FI) をこのように表すと、Kamei [23] より精密な結果が得られます:

If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$

$$A^{-r} \ \#_{\frac{1+r}{p+r}} \ B^p \leq B \ (\leq A)$$

holds for $p \geq 1$.

Lemma 2.1 を古田不等式の形式に翻訳すると次のようになります。

Theorem 6.1. *If $A \geq B > 0$, then*

$$A^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq A$$

holds for $p \leq -1$ and $r \in [-1, 0]$.

7 Grand Furuta inequality

Ando-Hiai inequality の出現の後、Furuta 自身によって、それと (FI) を補完する作用素不等式が提案されました。[20], [13]

Grand Furuta inequality (GFI) *If $A \geq B > 0$ and $t \in [0,1]$, then*

$$[A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} \leq A^{1-t+r}$$

holds for $r \geq t$ and $p, s \geq 1$.

実際、(GFI) の下で、(FI) 及び (AH) の位置は次のようになっています :

$$\text{(GFI) for } t=1,\ r=s \iff \text{(AH)}$$

$$\text{(GFI) for } t=0,\ (s=1) \iff \text{(FI)}$$

さて、(GFI) も (FI) と同様に次のように表現できます:
If $A \geq B > 0$ and $t \in [0,1]$, then

$$A^{-r+t} \ \#_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} \ (A^t \ \natural_s \ B^p) \leq A$$

holds for $r \geq t$ and $p, s \geq 1$.

従って、上記の議論と同様にして、Theorem 2.3 を (GFI)-型で書き下すことができます :

Theorem 7.1. *If $A \geq B > 0$, then*

$$A^{-r+1}\natural_{\frac{r}{r+(p-1)s}}(A\#_sB^p) \leq A$$

holds for $p \leq -1$, $r \in [0,1]$ and $s \in [\frac{-2r}{p-1}, 1]$.

この結果と (GFI) との比較から、次のことが期待されます:

Conjecture 7.2. *If $A \geq B > 0$ and $t \in [0,1]$, then*

$$A^{-r+t} \ \natural_{\frac{1-t+r}{r+(p-t)s}}(A^t\#_sB^p) \leq A$$

holds for $p \leq -1$, $r \in [0,t]$ and $s \in [\frac{-2r}{p-t}, 1]$.

現時点で示せることは、次のところまでです :

Theorem 7.3. *If $A \geq B > 0$ and $t \in [0,1]$, then*

$$A^{-r+t} \ \natural_{\frac{1-t+r}{r+(p-t)s}}(A^t\#_sB^p) \leq A$$

holds for $p \leq -1$, $r \in [0,t]$ and $s \in [\max\{\frac{-t}{p-t}, \frac{-2r-(1-t)}{p-t}\}, 1]$.

なお、端の値 $s = \frac{-t}{p-t}, \frac{-2r-(1-t)}{p-t}$ では、成立していることが確かめられます。

Proposition 7.4. *If $A \geq B > 0$ and $t \in [0,1]$, then*

$$A^{-r+t} \ \natural_{\frac{1-t+r}{r+(p-t)s}}(A^t\#_sB^p) \leq A$$

holds for $p \leq -1$, $r \in [0,t]$ and $s = \frac{-2r-(1-t)}{p-t}$.

Proposition 7.5. *If $A \geq B > 0$ and $t \in [0,1]$, then*

$$A^{-r+t} \ \natural_{\frac{1-t+r}{r+(p-t)s}}(A^t\#_sB^p) \leq A$$

holds for $p \leq -1$, $r \in [0,t]$ and $s = \frac{-t}{p-t}$.

参考文献

[1] T. Ando, *Topics on Operator Inequalities*, Lecture Note, Hokkaido University, Sapporo, 1978.

[2] T. Ando and F. Hiai, *Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities*, Linear Algebra Appl., **197, 198** (1994), 113–131.

[3] H. Araki, *On an inequality of Lieb and Thirring*, Let. Math. Phys., **19** (1990), 167–170.

[4] G. Corach, H. Porta and L. Recht, *An operator inequality*, Linear Algebra Appl., **142** (1990), 153–159.

[5] G. Corach, H. Porta and L. Recht, *Convexity of the geodesic distance on spaces of positive operators*, Illinois J. Math., **38** (1994), 87–94.

[6] J. Fujii, M. Fujii, T. Furuta and R. Nakamoto , *Norm inequalities related to McIntosh type inequality*, Nihonkai Math. J., **118** (1993), 827–830.

[7] J. Fujii, M. Fujii, T. Furuta and R. Nakamoto , *Norm inequalities equivalent to Heinz inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **3** (1992), 67–72.

[8] M. Fujii, *Furuta's inequality and its mean theoretic approach*, J. Operator Theory, 23 (1990), 67–72.

[9] M. Fujii, *Furuta inequality and its related topics*, Ann. Funct. Anal., **1** (2010), 28–45.

[10] M. Fujii and T. Furuta , *Löwner-Heinz, Cordes and Heinz-Kato inequalities*, Math. Japon., **38** (1993), 73–78.

[11] M. Fujii, T. Furuta and R. Nakamoto , *Norm inequalities in the Corach-Porta-Recht theory and operator means*, Illinois J. Math., **40** (1996), 527–534.

[12] M. Fujii, M. Ito, E. Kamei and A. Matsumoto, *Operator inequalities related to Ando-Hiai inequality*, Sci. Math. Japon., **70** (2009), 229–232.

[13] M. Fujii and E. Kamei, *Mean theoretic approach to the grand Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 2751–2756.

[14] M. Fujii, J. Mićić Hot, J. Pečarić and Y. Seo, *Recent Developments of Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Element, Zagreb, Monographs in Inequalities **4**, 2012.

[15] M. Fujii and E. Kamei, *Ando-Hiai inequality and Furuta inequality*, Linear Algebra Appl., **416** (2006), 541–545.

[16] M. Fujii and Y. Seo, *reverse inequalities of Cordes and Löwner-Heinz inequalities*, Nohonkai Math. J., **16** (2005), 145–154.

[17] T. Furuta, $A \geq B \geq 0$ *assures* $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ *for* $r \geq 0,\ p \geq 0,\ q \geq 1$ *with* $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), 85–88.

[18] T. Furuta, *Elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan Acad. **65** (1989), 126.

[19] T. Furuta, *Norm inequalities equivalent to Löwner-Heinz theorem*, Rev. Math. Phys., **1** (1989), 135–137.

[20] T. Furuta, *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization*, Linear Algebra Appl., **219** (1995), 139–155.

[21] F. Hansen, *An operator inequality*, Math. Ann., **246** (1980), 249–250.

[22] E. Heinz, *Beitrage zur Storungstheorie der Spectral-zegung*, Math. Ann., **123** (1951), 415–438.

[23] E. Kamei, *A satellite to Furuta's inequality*, Math. Japon. 33 (1988), 883–886.

[24] M. Kian and Y. Seo, *Norm inequalities related to the matrix geometric mean of negative power*, Sci. Math. Japon., Online, 2018–7.

[25] F. Kubo and T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann., **246** (1980), 205–224.

[26] K. Löwner, *Über monotone Matrix function*, Math. Z., **38** (1934), 177–216.

[27] A. McIntosh, *Heinz inequalitiesand perturbation of spectral families*, Macquarie Math. Reports, 1979.

[28] G. K. Pedersen, *Some operator monotone functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **36**(1972), 309–310.

[29] G. K. Pedersen and M. Takesaki, *The operator equation* $THT = K$, Proc. Amer. Math. Soc., **36**(1972), 311–312.

[30] W. Pusz and S. L. Woronowicz, *Functional calculus for sesquilinear formsand the purification map*, Rep. Math. Phys., **8** (1975),159–170.

[31] Y. Seo, *Matrix trace inequalities related to the Tsallis relative entropy of negative order*, J. Math. Anal. Appl., **472** (2019), 1499–1508.

[32] K. Tanahashi, *Best possibility of the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 141–146.