一般社団法人
国際数理科学協会会報

No.107/2018.7

編集委員： 藤井淳一（委員長）

目次

国際数理科学協会 2018 年度年会

年会担当理事 濵田 悦生

国際数理科学協会 2018 年度年会の各分科会が、以下の内容で開催されます。プログラム未定部分は、追ってお知らせすることになると思います。ご予定の調整よろしくお願いします。

「統計的推測と統計ファイナンス」分科会研究集会

日時: 2018 年 8 月 25 日 (土) 10:00–17:00
場所: 関西学院大学 梅田キャンパス 1402 号教室
幹事: 濵田悦生（大阪大学）, 地道正行（関西学院大学）

プログラム

午前の部

10:30–11:00
野村 魁 (大阪府立大学 大学院工学研究科), **林 利治** (大阪府立大学 大学院工学研究科)
『Adaptive P-spline の紹介と罰則に関する重み修正法の提案』

11:00–11:30
道家 悠太 (大阪府立大学 大学院工学研究科), **林 利治** (大阪府立大学 大学院工学研究科)
『関数型説明変数を伴う混合効果モデルにおける適応的な平滑化パラメータの選択法』

11:30–12:00
水間 浩太郎 (大阪大学 大学院基礎工学研究科), **濵田 悦生** (大阪大学 大学院基礎工学研究科)
『ディリクレ過程を利用した高速アルゴリズム』

12:00–12:30
柳 麻衣 (関西学院大学 商学部), **阪 智香** (関西学院大学 商学部), **地道 正行** (関西学院大学 商学部)
『配当金支払金額の探索的データ解析』

午後の部

13:30–14:10
倉田 澄人 (大阪大学 大学院基礎工学研究科), **濵田 悦生** (大阪大学 大学院基礎工学研究科)
『ダイバージェンスに基づくモデル評価規準の一致性と頑健性について』

14:10–14:50
濵田 悦生 (大阪大学 大学院基礎工学研究科)
『統計的因果推論における傾向スコアのある傾向』

14:50–15:30
地道 正行 (関西学院大学 商学部) , **宮本 大輔** (奈良先端科学技術大学院大学 先端科学技術研究科), **阪 智香** (関西学院大学 商学部), **永田 修一** (関西学院大学 商学部)
『探索的財務ビッグデータ解析: 前処理, データラングリング, 再現可能性』

15:30–15:40 休憩

15:40–16:30
林 利治 (大阪府立大学 大学院工学研究科)
『ディリクレ過程混合を事前分布とするベイズ推定のクラスタリング問題への応用』

16:30–17:00 総合討論

「代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会」（ALGI）分科会

日時：2018 年 8 月 27 日（月） 午後〜8 月 28 日（火）
場所：崇城大学 池田キャンパス F 号館 203 講義室
幹事：西澤弘毅（神奈川大学), 津曲紀宏（崇城大学）

「確率モデルと最適化」分科会 2018 年度年会

（日本オペレーションズ・リサーチ学会「不確実性環境下の意思決定モデリング」
（主査 北條仁志 (大阪府立大学)，幹事 中西真悟 (大阪工業大学)）との共催）

世話役：北條仁志（大阪府立大学）
日時：2018 年 8 月 24 日 (金) 12:30–17:00
場所：JEC 日本研修センター 十三 小会議室　　大阪府大阪市淀川区十三本町 1 丁目 12–15
http://www.jec.ne.jp/juso/index.html

参加ご希望の方は、8 月 10 日 (金) までに北條 (hojo@cs.osakafu-u.ac.jp) までご一報ください。

プログラム

12:45–13:35　**落合 夏海** (大阪大学), **大西 匡光** (大阪大学)
『日本の先物市場における日中の価格変動要因に関する分析』

13:40–14:30　**平林 直樹** (大阪府立大学)
『不確実性環境下でのリアルタイム生産スケジューリング』

14:45–15:35　**玉置 光司** (愛知大学)
『技術革新導入の最適タイミング』

15:40–16:30　**大村 雄史** (元近畿大学)
『「問題解決のためのＯＲ」 教育』

＊寄稿

光量子力学の行列表示 — 代数的光量子 (場の) 力学

藤井淳一 （大阪教育大学）

だいぶん前に考えていたことであるが、寄稿の都合がうまくつかなかったので、発表の機会を失ってしまったノートをここで発表させていただきたい。内容的にはあまり理論物理に詳しくない情報科学の学生向けに、光通信で使われるコヒーレント光を行列表示によってとっつき易くする試みである。ちょっと用語がとっつきにくいかもしれないので、[1] の解説を引用すると、

> 通常のレーザー光は（近似的に）コヒーレント状態と呼ばれる量子状態にあり量子力学的に不可避なゆらぎを伴っている ⋯ 、特殊なケースとしてスクイズド状態と呼ばれる量子状態がある

ということで、ネットで該当部分はアクセス可能なので、詳しくは [1] で見ていただくとして、光通信では重要な概念であることをお分かりいただけたらと思う。もう少し補足すれば、一般の光では、周波数や位相はそろっていないので、光の周波数・位相変調のため，波形がきれいなものが必要で、そのために開発された半導体レーザの光では，ほとんど一つの波長の光しか出さず周波数や位相を変調して信号を送ることができるということである。このような光のことを「コヒーレント光」と呼ぶ。英語の coherent は,「きれいに整っている」という意味である。このような変調の方式 (周波数変調や位相変調) は電波ではよく使われていますが，光伝送では最先端の技術で，弱い光でも受信できるようになったり，たくさんの光を一本の光ファイバで送れるようにできるそうである。

これを説明する枠組みとして考えるきっかけになったのは、尾畑による代数的確率論（量子確率論）のテキスト [2][1] の中で、非対称テンソルの Fermi-Dirac 統計に従う枠組みについては、2 次行列レベルで簡潔な説明をしていてわかりやすくなっているが、肝心の「光」の方は無限次元が避けられないとはいえ、難しいままになっている事に対する不満があったからである。特に量子通信理論では、Bose-Einstein 統計に基づくといわれる対称テンソルの「光」のみなので、必要とされる枠組みはもっと少なく、もっととっつきやすい形でないと、なかなか専門以外の学生が学びにくい。とりあえず、生成消滅作用素や個数作用素も含めて、コヒーレントベクトル周辺の基本的な枠組みのみを、全く物理抜きで描く試みである。このような分解において、コヒーレント光の展開係数が正規分布になっていることを示すのが当面の目標である。

厳密性より、イメージ・とっつきやすさを重視するので、出発点は、

$$
\text{消滅作用素 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \\ 0 & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \text{生成作用素 } A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & \\ 1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \\ 0 & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}
$$

---

[1] 因みにこの本の最初の読みにくい名前の著者は、Luigi Accardi という量子情報の専門家である。名古屋大学に滞在中に共同研究された内容のようである。

とする（これらは非有界作用素であるため、まともに導入するとかなりうるさくなるので、あくまで「眺めてわかるように・簡単に計算できるように」をモットーにして、厳密性を犠牲にしている。正確には 1-mode Boson-Fock space と呼ばれる量子調和振動子を表現する空間上の作用素のことである)。

　このように設定すると、何もいわずとも自動的に CCR などと言われる

ボゾン交換関係
$$AA^* - A^*A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = I$$

はすぐわかるし、異空間への埋め込みを決めれば（正確には $f \in H_1$ について、消滅作用素 $A(f)$ として A の非零部分 $\sqrt{n}$ を $\sqrt{n}V_n(f) : \xi^{\otimes n} \mapsto \sqrt{n}\langle f, \xi\rangle \xi^{\otimes(n-1)}, H_n \to H_{n-1}$ という埋め込みに置き換えると）、一般の Boson-Fock space $H_0 \oplus H_1 \oplus \cdots$ 上の作用素と見ることも可能である（形式上テンソル抜きで述べられる。$\|V_n(f)\| = \|f\|$ となることもすぐわかる）。すると、上ですでに一度計算したが

個数作用素 (光子数作用素)
$$N = A^*A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

もごく見やすい単純な体格行列で、各成分が固有値であることが見て取れるし

$$\textbf{真空ベクトル}\ \Phi_0 = \Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{として、}\textbf{光子数確定状態}\ \Phi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow n+1\ \text{番目} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

とすれば、これらが N の固有値 n に対する固有ベクトルで、CONS をなし、

$$A\Phi_0 = 0,\ \ A\Phi_n = \sqrt{n}\Phi_{n-1},\ \ A^*\Phi_n = \sqrt{n+1}\Phi_{n+1},\ \ A^{*n}\Phi_0 = \sqrt{n!}\Phi_n$$

など、ちょっとした計算練習問題レベルとなる。上記の性質から、$z \in \mathbb{C}$ について

$$\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\Phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n A^{*n}}{n!}\Phi_0 \quad \left(\text{resp.}\ \ \exp f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(f)^{*n}}{n!}\Phi_0\right)$$

（複雑な形とはいえ、固有ベクトルを求めるつもりならこの形は類推可能である）は

$$A\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}\Phi_{n-1} = z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\Phi_n = z\xi(z)$$
$$A(g)(\exp f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(g)A(f)^{*n}\Phi_0}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\langle g, f\rangle A(f)^{*(n-1)}\Phi_0}{n!} = \langle g, f\rangle \exp f$$

となって、A (resp. $A(g)$) の固有値 z (resp. $\langle g, f\rangle$) に対する固有ベクトルになっていることが分かる。このノルムは、

$$\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{n!}} = e^{|z|^2/2} \quad \left(\text{resp. } \langle \exp f, \exp g\rangle = e^{\langle f,g\rangle} \text{より } e^{\|f\|^2/2}\right)$$

であるから、A の固有値 z に対する単位固有ベクトルは

$$\Psi(z) = \frac{\xi(x)}{e^{|z|^2/2}} = e^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\Phi_n \quad \left(\text{resp. } e^{-\|f\|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A(f)^{*n}}{n!}\Phi_0\right)$$

となることが分かる。これ（$\exp f$ 自身も）を**コヒーレントベクトル**という。最小限の枠組みはこれでおわりであるが、逆にたどれば、物理学では出発点となっている概念を

$$\textbf{位置作用素 } Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(A + A^*), \quad \textbf{運動量作用素 } P = \frac{1}{\sqrt{2}i}(A - A^*)$$

（これらは、複素空間の話だがユニタリ同型で、$L^2(\mathbb{R})$ に落とすと、$x, -i\frac{d}{dx}$ にあたる）と定められる（$A(f)$ についての位置作用素は **Segal 場作用素**になる）。

せっかくなので、続けてもう少し難しい計算をしよう。

$$zA^* - \bar{z}A = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{z} & 0 & \cdots & & \\ z & 0 & -\sqrt{2}\bar{z} & 0 & \cdots & \\ 0 & \sqrt{2}z & 0 & -\sqrt{3}\bar{z} & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

は固有値純虚数のみの反対称作用素で、

ワイル作用素 $$W(z) = \exp(zA^* - \bar{z}A)$$

はユニタリになる。Taylor 展開して計算可能だが、うっとうしいので 1 列目で我慢すると、

$$(zA^* - \bar{z}A)^1\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (zA^* - \bar{z}A)^2\Phi_0 = \begin{pmatrix} -|z|^2 \\ 0 \\ \sqrt{2}z^2 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (zA^* - \bar{z}A)^3\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3z|z|^2 \\ 0 \\ \sqrt{3!}z^3 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$(zA^* - \bar{z}A)^4\Phi_0 = \begin{pmatrix} 3|z|^4 \\ 0 \\ -6\sqrt{2}z^2|z|^2 \\ 0 \\ \sqrt{4!}z^4 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (zA^* - \bar{z}A)^5\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 15z|z|^4 \\ 0 \\ -10\sqrt{3!}z^3|z|^2 \\ 0 \\ \sqrt{5!}z^5 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$
(zA^* - \bar{z}A)^6\Phi_0 = \begin{pmatrix} -15|z|^6 \\ 0 \\ 45\sqrt{2}z^2|z|^4 \\ 0 \\ -15\sqrt{4!}z^4|z|^2 \\ 0 \\ \sqrt{6!}z^6 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (zA^* - \bar{z}A)^7\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -105z|z|^6 \\ 0 \\ 105\sqrt{3!}z^3|z|^4 \\ 0 \\ -21\sqrt{5!}z^5|z|^2 \\ 0 \\ \sqrt{7!}z^7 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \cdots
$$

となって、一般的には

$$
(zA^* - \bar{z}A)^n\Phi_0 = \begin{pmatrix} \vdots \\ -\dfrac{n!}{2^3\cdot 3!(n-6)!}\sqrt{(n-6)!}z^{n-6}|z|^6 \\ 0 \\ \dfrac{n!}{2^2\cdot 2(n-4)!}\sqrt{(n-4)!}z^{n-4}|z|^4 \\ 0 \\ -\dfrac{n!}{2\cdot(n-2)!}\sqrt{(n-2)!}z^{n-2}|z|^2 \\ 0 \\ \sqrt{n!}z^n \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow n+1\text{ 番目} \\ \\ \\ \end{matrix}
$$

であることが（容易ではないものの）確かめられる。したがって、ベクトル x の $m+1$ 番目の「m-成分」($m = 0, 1, 2, ...$) を、$x^{(m)}$ とするとき、

$$
\begin{aligned}
W(z)\Phi_0^{(n)} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(zA^* - \bar{z}A)^k\Phi_0}{k!}\right)^{(n)} = \left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(zA^* - \bar{z}A)^k\Phi_0}{k!}\right)^{(n)} \\
&= \frac{(zA^* - \bar{z}A)^n\Phi_0^{(n)}}{n!} + \frac{(zA^* - \bar{z}A)^{n+2}\Phi_0^{(n)}}{(n+2)!} + \frac{(zA^* - \bar{z}A)^{n+4}\Phi_0^{(n)}}{(n+4)!} + \cdots \\
&= \frac{\sqrt{n!}z^n}{n!} + \frac{-\dfrac{(n+2)!}{2\cdot n!}\sqrt{n!}z^n|z|^2}{(n+2)!} + \frac{\dfrac{(n+4)!}{2^2\cdot 2\cdot n!}\sqrt{n!}z^n|z|^4}{(n+4)!} + \cdots \\
&= \frac{z^n}{\sqrt{n!}} + \frac{z^n(-|z|^2)}{2\sqrt{n!}} + \frac{z^n(-|z|^2)^2}{2^2\cdot 2\sqrt{n!}} + \frac{z^n(-|z|^2)^3}{2^3\cdot 3!\sqrt{n!}}\cdots \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-|z|^2)^k}{2^k k!}\sqrt{n!}z^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-|z|^2)^k}{2^k k!}\frac{z^n}{\sqrt{n!}} = e^{-|z|^2/2}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}
\end{aligned}
$$

となる、したがって、

$$
W(z)\Phi_0 = \Psi(z)
$$

となって、ワイルユニタリ作用素によって真空ベクトルからコヒーレントベクトルが生成されることが分かる。

以上のように説明が比較的とっつきやすく展開できる（ただ、大きな行列を書くので市販のテキスト向きではないかもしれない)。物理的な媒体として、この概念の下に量子通信理論が組み立てられているといっても良い。最近はこれらを 2 つ組み合わせたスクィズド光も注目されているが。その割りにこの概念に届くまでの道のりが少々長すぎて、非専門家には敷居が高い。量子力学の本では載っていないものもあるので、分厚く難解な本を全部読破しても結局でてこないという悲惨なこともある。（もっとも平易だと思われる上記テキスト [2] でさえ、コヒーレントベクトル導入に関しては、証明はすべて省かれているので、実在感が乏しくなる。）この試論なら、基本的な教養程度の大学数学がわかっていればたった 2 ページで登場し、性質が計算可能になり、わかった気分になるのではないだろうか。

参考文献

[1] 井上恭, 工学系のための量子工学, 森北出版, 2008.
https://www.morikita.co.jp/data/mkj/015411mkj.pdf

[2] 明出伊 類似, 尾畑 伸明, 量子確率論の基礎, 牧書店, 2003.