一般社団法人

国際数理科学協会会報

No.106/2018.4

編集委員： 藤井淳一（委員長）

目次

総会議事録

２０１８年3月２５日

場所：大阪教育大学　天王寺キャンパス　本館３０６号室

時間：２０１８年3月２５日　　３時〜４時

議長：代表理事　植松康祐

出席者（代議員）：植松康佑、藤井淳一、富永雅、八木厚志、濵田 悦生、地道正行、
西澤弘毅、会沢成彦、道工勇、北條仁志、石井博昭、佐藤俊輔

出席者（顧問）藤井正俊、寺岡義伸、長尾壽夫

総代議員数 29 名、出席者数 27 名（委任状含）、総会は成立。

[決算の概要]

1) 会費については、未納会員への督促により高い納付率となってきました。また、過年度未納分についてもほぼ回収できました。一部長期未納者については、SCMJ 誌の配本をストップしています。
2) 海外書籍取次業者（EBSCO）からは前年に引き続き多くの注文がありました。(約 100 万円）
3) 業務効率化を引き続き行い、全体では、115 万円程度の赤字です。
4) 印刷費が、予算 50 万円に対して、実績約 70 万円となっていますが、これは支払い日〆の関係で SCMJ 発行 4 回分となっているためで、2018 年度は支払い２回分とし、37 万円の見込みです。

［協会活動］

1) SCMJ 誌の発行については、既に Vol.80-1.2.3 を発行致しました。また、発刊スケジュールの遅れも、前年度で解消されました。
2) 投稿総数、国内・海外、採択率の報告
3) 従来から問題になっていた、論文ページの統一を過去に遡ってすすめています。(e-XX ページを廃止し、雑誌ページに統一)

4) FIM 特集号については、和多田淳三先生が中心に進めて下さっており、今年度 Vol.81-3 か来年度 Vol.82-1 あたりでの発行を予定しています。論文 7 本の内、 6 本まで査読済みとのことです。
5) ） 2017 年・2018 年（3 月）までの新規会員の報告（敬称略）
   ① 本多泰理（ホンダヒロタダ）・NTT ネットワーク基盤技術研究所・専門：関数方程式
   ② 菰田千恵子（コモダチエコ）・久留米工業高等専門学校
6) 新編集委員として、二名の先生が就任されました。
   (a) Phillip Isaac （国名：オーストラリア）
   (a) Minghao Chen （国名：中華人民共和国）

［決定事項・審議事項］

1) 植松康祐先生（大阪国際大学）の代表理事任期 1 年間の延長が決定いたしました。会沢成彦先生（大阪府立大学）の監事任期 1 年間の延長が決定いたしました。
2) ３月中に代議員選挙を信任投票の形式で行いました。全員の信任がなされました。代議員の年齢構成についても話合いがなされました。
3) 寺岡義伸先生より栗栖忠先生の名誉会員就任推薦がありました。
4) 30 名定員の代議員について、現在 1 名枠が空いています。会員より綿森葉子先生（大阪府立大学）・林利治先生（大阪府立大学）の代議員推薦がありました。
5) デジタルオブジェクト識別子 (略称 DOI) の必要性が話し合われました。一定の意義が認められ、新規の論文投稿にもプラスと考えられることから、デジタルオブジェクト識別子 (略称 DOI) 取得の方向で、事務局が動くことになりました。
6) 編集委員就任依頼にあたり、対外的信頼性や雑誌 quality 維持の観点より手続きや用件の強化が話し合われました。また、現在の海外 Editor へ新 Editor 紹介を依頼することになりました。
7) 投稿論文に対して、賞を贈る活動が停滞していることが話し合われました。
8) 協会が保有している数学雑誌の取扱いについて話し合われました。貴重なものもある筈だが本当に売却できるあてはないかといった内容です。協会では、リストを作成し、HP 上で公開し、連絡あった先と売却・譲渡について交渉することになりました。
9) 会報への寄稿原稿については、現在まで藤井淳一先生（大阪教育大学）に委任している状態です。負担軽減の観点から、編集部より出席者の先生方にお声かけをお願いしました。
10) 掲載論文のページチャージについて話し合われました。

理事会議事録

総会終了後、ただちに理事会が開催された。理事 10 名（委任状含む）、監事 1 名が出席されたので、理事会は成立し、総会での決議事項は全て全員の賛成が得られ承認された。以下に財務諸表（2018 年 3 月 7 日付監事会沢成彦監査済）を掲載する。（2017 年度貸借対照表、及び 2017 年度決算予算表）

2017年度　　　貸借対照表
(17/1/1-17/12/31)

(￥)会計

借方			貸方		
科　目	期　首	期　末	科　目	期　首	期　末
固定資産(保証金)			協会活動予備資金		
流動資産	2,416,116	2,869,103	出版基盤強化積立金	500,000	500,000
(定期預金)			TOTAL INDEX 積立金	414,993	414,993
(普通預金)	2,416,116	2,869,103	IT機器積立金		
(現金)			事務所移転積立金		
			事務機購入積立金		
安全資産ファンド	6,873,301	6,873,301	減価償却積立金		
			回転資金		
			繰越金	7,764,946	8,827,411
合　計	9,289,417	9,742,404	合　計	9,289,417	9,742,404

外貨会計

借方			貸方		
科　目	期　首	期　末	科　目	期　首	期　末
固定資産			協会活動予備資金	$27,745.79	$37,173.57
流動資産			IT機器積立金		
定期預金(★)	$1,070.13	$1,070.67	＄ー￥準備金		
普通預金(★)	$26,675.66	$36,102.90	繰越金		
$国債2(★)	$0.00	$0.00	合　計　＄	$27,745.79	$37,173.57
合　計＄	$27,745.79	$37,173.57			
(ユーロ)(★)	€ 2,074.40	€ 2,074.40	(ユーロ)	€ 2,074.40	€ 2,074.40
￥マルチマネー	8,515,864	8,515,936	￥マルチマネー	¥8,515,864	8,515,936
￥普通預金	3,732,345	1,132,361	￥普通預金	¥3,732,345	1,132,361

数理科学推進基金会計

借方			貸方		
科目	期　首	期　末	科目	期　首	期　末
清水基金	1,000,000	1,000,000	ISMS受賞基金	1,000,000	1,000,000
功力基金	100,000	100,000	国際研究交流基金	1,737,510	1,737,510
石原	2,000,000	2,000,000	通信費	0	0
その他	538,580	538,580	交通費	0	0
			繰越金	901,070	901,070
合計	3,638,580	3,638,580	合計	3,638,580	3,638,580

★印は、為替相場変動リスクあり

＊　2017年度決算予算表
(2017年/1/1-/12/31)

収　入			
科　　　目	17年度実績	17年度予算	18年度予算
前年度繰越金	-		
	-		
刊行物頒布代(書店)	420,018	420,000	400,000
刊行物頒布代(書店)海外＄より	1,048,075	800,000	800,000
会費			
機関会員　A(旧協力校)			
機関会員　B(交換誌)			
賛助会員(機関会員)	418,776	400,000	400,000
正会員(国内)	723,000	800,000	700,000
ページチャージ・別刷	33,006	100,000	50,000
事務所解約保証金(特別収入項目)			
設備更新積立金			
(イ)減価償却積立金取り崩し分			
(ロ)回転資金取り崩し分			
(ハ)事務機購入積立金取り崩し分			
預金利子	313		
($→¥:調整項目)	1,140,650	1,318,000	1,258,000
雑収入			
合　　　　計	3,783,838	3,838,000	3,608,000

支　出			
科　　　目	17年度実績	17年度予算	18年度予算
通信交通輸送費(ｲ+ﾛ+ﾊ)	191,223	150,000	180,000
(ｲ)　編集通信交通費	-		-
(ﾛ)　査読通信費			
(ﾊ)　抜刷等輸送費	191,223	150,000	180,000
原稿料	12,000	18,000	18,000
租税公課	600		-
印刷費	708,015	500,000	370,000
組版委託費・書籍整理費	125,480	180,000	180,000
SE委託費(辻本氏)	270,220	300,000	300,000
消耗品代		10,000	10,000
備品代(OA機器soft,本代,rental server)	82,975	50,000	50,000
人件費	1,340,555	1,600,000	1,450,000
借事務所代	813,072	810,000	810,000
電話代	72,847	70,000	70,000
振込料・手数料	10,766	10,000	10,000
電気代	36,586	30,000	40,000
保険料	8,794	10,000	10,000
税金	70,000	70,000	70,000
会費(学術団体)	-	30,000	
雑費	40,705		40,000
合　　　　計	3,783,838	3,838,000	3,608,000

＊寄稿

コーシー・シュワルツの不等式を巡って

瀬尾　祐貴 (大阪教育大学)

1　はじめに

コーシー・シュワルツの不等式とは、内積空間 H の任意のベクトル x, y に対して、その内積の絶対値の 2 乗が 2 つのベクトルの内積の積で押さえられるというもので、式で書くと、

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \tag{1.1}$$

が成り立つことを言います。また、等号が成立するのは、x と y が一次従属の時に限ります。$x \in H$ に対して、$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ とおくと、これは H 上のノルムを与えます。これを用いると、コーシー・シュワルツの不等式は

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \tag{1.2}$$

になります。解析学を勉強するときの、基本中の基本の不等式の一つです。これは、高校の数学 B で学習する「ベクトル」の領域で、ベクトルの内積の基本性質の一つとして紹介されています。ただし、すべての教科書で記載があるわけではありません。高等学校での、内積の定義は、$\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ のなす角を θ としたとき、

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

で、2 つのベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の内積を決めます。ただし、$|\overrightarrow{a}|$ は、ベクトル $\overrightarrow{a}$ の大きさを表します。$|\cos\theta| \leqq 1$ ですから、次の性質はすぐにわかります。

$$|\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}| \leqq |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$$

だから、一部の教科書では、明らかだとして、この性質を全く記載していないのかもしれません。でも、教科書によっては、そのあたりの説明も詳しく解説しているものもあります。しかし、いずれにしても、「コーシー・シュワルツの不等式」という名前の記載はありません。その点、参考書では、丁寧に (1.1) の不等式のことを「コーシー・シュワルツの不等式」という名前をつけて、高校生の印象に残るようにしています。実際、教科書に、コーシー・シュワルツの不等式という名前が記載されていたら、高校生は、こんなに簡単に証明できるのに、なぜ、コーシー・シュワルツの不等式のように名前がついているのだろうかと疑問に思うかもしれません。そういう疑問を持つ高校生は、大学で解析学の授業を受けるとその疑問が解決することになります。実は、平面ベクトルや空間ベクトルだけでなく、一般的な内積空間であれば、いつでも不等式 (1.1) が成り立つからです。もしくは、高校の先生方がその背景にある数学の奥深さの一端を生徒に教えるかもしれません。学問の世界では、そのような疑問のサイクルというのは必要な視点と思うのですが、残念ながら、最近はより精選する方向で、削除をする方向で教科書は編纂されているようです。次期学習指導要領の改定では、この「ベクトル」の分野は、数学 C に移され、理系の高校生しか学習をしない分野になりそうです。即ち、高校生の一部しか、このような内容を学ばないということになる方向で議論が進んでいると聞いています。しかし、このような、「ベクトル」の分野は、多変数のものの見方や考え方の一番の基本的な考え方だと思うのですが、その基本的な考え

方を一部の高校生しか学ばなくていいのでしょうか、今後とも、教育課程がどのように変わっていくのかは、十分に気を付けてみる必要がありそうです。

さて、教科書は、このあと、「内積と成分」というところで、$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2), \overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$ のとき、

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

になることを、余弦定理の応用で導いています。ベクトルの内積が、成分の前どうしの積と後ろどうしの積の和になっているのですが、このような計算方法はあまりありませんから、生徒にとっては一所懸命に覚えることになります。行列を学んでいたころであれば、連立方程式の簡便な書き方として

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

この対応から、計算規則が見えてきます。

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by.$$

従って、内積もこのような行列での積として眺めると、コーシー・シュワルツの不等式 (1.2) はつぎのように書き換えることが可能になります。

$$\left| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right| \le \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

そして、今回の私たちの話題は、コーシー・シュワルツの不等式を (1) のように眺めるとしたら、当然一般的な行列の場合はどうなるのだろうかという自然な疑問に対して、数学的な考察をしてみようということです。このような一般化の考え方は大切です。繰り返しになりますが、行列の積を勉強した後で、内積を上のように見直したとき、行ベクトルどうしの積だと思わずに、これを 1 行 2 列の行列と 2 行 1 列の行列の積だと考えると、では、一般的にはどうなるだろうかという疑問です。もちろん、平面ベクトルの内積を考えたとき、では、2 次元でなく、3 次元にしたらどうなるのか、と考えることも一般化であるし、大切な見方考え方です。高校時代には数学においてもいろいろな一般化を、発展的な見方を知っておく、もしくは、経験しておくことは大切です。それが、「主体的・対話的で深い学び」の一番の基本であると思います。高校生にとって、類推、一般化、発展的、特殊化、具体化などの数学的な考え方は、とても難しい考え方です。早い段階から、それらがどのようなものかを知っておくことはとても大切と考えます。それにより、まったく新しいものの見方を見出すことがあるかもしれません。

さて、次節から、本題の行列版のコーシー・シュワルツの不等式の定式化とその応用について述べたいと思います。

2　行列版のコーシー・シュワルツ不等式

複素数を成分に持つ $n \times n$ の行列の全体、即ち、n 次正方行列の全体を $\mathbb{M}_n = \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ と表すことにします。本稿の内容は、一般のサイズの行列即ち、$m \times n$ 行列でも、同じように議論できますが、考えやすい点を考慮して、n 次正方行列の場合に限定して考察を進めたいと思います。$A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n$ に対して、その共役転置行列を $A^* = (\overline{a_{ji}})$ で表すことにします。x が、列ベクトル、$n \times 1$ 行列とすると、x^* は $1 \times n$ 行列、即ち、行ベクトルになります。$A = A^*$ のときに、A はエルミット行列であると

言います。このとき、エルミット行列 A の固有値はすべて実数になりますが、すべての固有値が 0 以上の時に、A は半正定値、特に、すべての固有値が 0 より完全に大きい時は、正定値であると言います。$A \in \mathbb{M}_n$ に対して、A が半正定値のときに、$A \geq 0$ とかくことにします。また、A が正定値行列の時は、$A > 0$ とかきます。これは、任意のゼロでない列ベクトル $x \in \mathbb{C}^n$ に対して、$x^*Ax > 0$ であることに意味します。そして、重要なことは、これによって、エルミット行列全体に半順序構造が入ることです。即ち、2 つのエルミット行列 A, B に対して、$A - B \geq 0$ が成り立つとき、$A \geq B$ とかくことにします。また、$A - B > 0$ のときは、$A > B$ とかきます。最後に、$A \in \mathbb{M}_n$ に対して、$(A^*A)^{1/2}$ を A の絶対値と呼んで、$|A|$ とかくことにします。行列論の本では、この記号は行列式を表すのですが、ここでは、複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して、その絶対値を $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ とかくことを、行列の表記にも援用していることになります。さて、ベクトルの内積の行列版をどのように考えるかですが、初めにで述べたように、次のように考えることができます。$\mathbb{M}_n$ を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としてみたときに、$X, Y \in \mathbb{M}_n$ に対して、その内積を

$$\langle X, Y \rangle = Y^*X$$

と定義します。明らかに、正値性、線形性、対称性の性質を満たします。では、肝心のコーシー・シュワルツの不等式はどうなるのでしょうか。ベクトル版の (1.1) や (1.2) をそのまま行列を用いて、書き下すと

$$|\langle X, Y \rangle|^2 \leq \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle$$

もしくは、その両辺の平方根を取って、

$$|\langle X, Y \rangle| \leq \sqrt{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle}$$

になります。右辺の各項 $\langle X, X \rangle$ と $\langle Y, Y \rangle$ はそれぞれ正定値ですが、一般的にその積は正定値とは限りません。例えば、

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のとき、A と B は、それぞれ正定値行列ですが、その積 $AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ となり、エルミット行列にさえなりません。勿論、正定値行列ではありません。従って、この式化は意味を成しません。そこで、幾何平均 $\sqrt{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle}$ の非可換版が考えられないか。このようなときに大切な考え方は、類推です。数の時の議論を考えることによって、非可換版の幾何平均の構成を考えることにしましょう。ここで、幾何平均ですが、そのもとの平方根は、$a > 0$ に対して、方程式 $x^2 = a$ の正の解を $x = \sqrt{a}$ とかくのでした。では、同じように、2 つの正の数 $a, b > 0$ に対して、方程式 $x^2 = ab$ を考えましょう。その正の解は $x = \sqrt{ab}$ で、a と b の幾何平均です。そこで、方程式を変形して、$xa^{-1}x = b$ とします。行列の場合でも、A が正定値のとき、任意の Y に対して、Y^*AY はいつでも正定値になることはすぐにわかります。従って、正定値性を保持するための変形といえるでしょう。そこで、非可換版の幾何平均は、A, B を正定値行列とした場合、

$$XA^{-1}X = B \tag{2.1}$$

の解であると考えてみることにしましょう。この解 X を 2 つの正定値行列 A, B の幾何平均だと考えてみましょうということです。これが数の時は、確かに幾何平均になっているからです。これを数学では、類推的な考え方というのでした。もちろん、これが正しい推測である保証はありません。その解がきちんと求まるのかどうかをチェックしなければいけません。そして、その解が幾何平均としての性質をある

程度は満たしていなければなりません。では、早速、分析をはじめましょう。その解 X はどのような形をしているのでしょうか。真ん中の A^{-1} が消えなくてはいけないので、そして、X も正定値ですから、

$$X = A^{1/2} Y A^{1/2}$$

という形でないとうまくいかないことはわかります。代入してみましょう。

$$B = XA^{-1}X = A^{1/2}YA^{1/2}A^{-1}A^{1/2}YA^{1/2} = A^{1/2}Y^2A^{1/2}$$

となり、$Y^2 = A^{-1/2}BA^{-1/2}$ がわかります。従って、$Y = (A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}$ となります。即ち、方程式 (2.1) の解は

$$X = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}$$

であることがわかりました。やや、複雑な形になりましたが、これは、確かに方程式 (2.1) の解になっています。そして、A, B がもし可換ならば、普通に指数の計算ができますので、右辺を計算すると $X = A^{1/2}B^{1/2}$ になります。つまり、$X = \sqrt{AB}$ です。さらに、B が正定値ですから、$A^{-1/2}BA^{-1/2}$ も正定値で、その平方根も正定値です。そして、両側に同じ $A^{1/2}$ がかかっているのですから、確かに、X は正定値になっています。いつも、類推が正しい方向を示すとは限りませんが、今回は存外にうまくいきました。そこで、X を正定値行列 A, B の行列幾何平均と呼ぶことにしましょう。そして、記号として、 $A \sharp B$ とかくことにします。即ち、 2 つの正定値行列 A, B に対して、行列版の幾何平均を

$$A \sharp B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}$$

で定義します。可逆でないときは、次の極限として定義します。

$$A \sharp B = \lim_{\varepsilon \to 0}(A + \varepsilon I) \sharp (B + \varepsilon I)$$

このとき、次のような幾何平均として持つべき良い性質を持ちます。

補題 2.1 ([3]). $A, B, C, D \in \mathbb{M}_n$ を半正定値行列とする。

(1) A と B が可換のときは、$A \sharp B = \sqrt{AB}$.

(2) 単調性を持つ。$A \le C,\ B \le D$ ならば、$A \sharp B \le C \sharp D$

(3) トランス不等式を満たす。$T^*(A \sharp B)T \le T^*AT \sharp T^*BT$ が任意の行列 T に対して成り立つ。また、T が可逆な時は、等号が成立する。

(4) 対称性を持つ。$A \sharp B = B \sharp A$

もう少し一般的な作用素平均の性質としての証明については、[10, 第 5 章] や [12, 8] を見てください。補題 2.1 (1) をみれば、行列版のコーシー・シュワルツの不等式は、行列幾何平均を用いて、

$$|\langle X, Y\rangle| \le \langle X, X\rangle \sharp \langle Y, Y\rangle$$

となるのではないかと、予想されます。このようにいろいろと類推をしてみるということが大切です。実際、X, Y を列ベクトルにすると、もとのコーシー・シュワルツの不等式が出てきます。妥当な一般化といえるでしょう。しかし、残念なことに、この定式化は成立しません。実際、2×2 行列で、

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおきますと、$|\langle X,Y\rangle| = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となりますが、$\langle X,X\rangle \sharp \langle Y,Y\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となりますので、2 つの行列に順序関係はつきません。従って、不等式は成立しません。先ほどはうまく類推できましたが、いつでもうまくいくわけではありません。そんなときは、なぜうまくいかなかったのか、その点をもう少し詰めて考えることも大切です。ベクトルの時は、内積は複素数なので 1 次元ですが、行列値内積の場合は、次元が 2 以上になるので、上の例のように関係がつかなくなることが起こります。そこで、2 者の間に同一の方向性を持たせるための工夫が必要になります。それが、行列の極分解です。$A \in \mathbb{M}_n$ に対して、$A = U|A|$ となるユニタリ行列 $U \in \mathbb{M}_n$ が存在します。作用素の場合は、一般にはユニタリにはなりませんが、行列の世界では、必ずユニタリ行列になるように再構成できます。

この極分解を用いて、行列に対して、次のようなコーシー・シュワルツの不等式を得ることができます。さらに、ある種の核条件の下で、等号成立を与える必要十分条件も見つけることができます。それは、非可換版の一次従属性です。

定理 2.2 ([2, 4])**.** 2 つの行列 $X, Y \in \mathbb{M}_n$ に対して、$U \in \mathbb{M}_n$ を極分解 $\langle X,Y\rangle = U|\langle X,Y\rangle|$ のユニタリ行列とします。このとき、

$$|\langle X,Y\rangle| \le \langle X,X\rangle \sharp U^*\langle Y,Y\rangle U \tag{2.2}$$

が成り立つ。また、$\ker X \subset \ker YU$ という核条件のもとで、等号が成立するための必要十分条件は、$YU = XW$ を満たす $W \in \mathbb{M}_n$ が存在することです。

証明　本稿の一番大切な式ですから、簡単に証明を与えておくことにします。X は、一般的には可逆とは限りませんが、簡単のために、可逆だと仮定します。そして、次の評価式がキーになります。$YU - X(X^*X)^{-1}X^*YU$ を考えて、

$$\begin{aligned} 0 &\le (YU - X(X^*X)^{-1}X^*YU)^*(YU - X(X^*X)^{-1}X^*YU) \\ &= U^*Y^*YU - U^*Y^*X(X^*X)^{-1}X^*YU \\ &= U^*\langle Y,Y\rangle U - |\langle X,Y\rangle|\langle X,X\rangle^{-1}|\langle X,Y\rangle| \end{aligned}$$

となりますから、結果的に

$$|\langle X,Y\rangle|\langle X,X\rangle^{-1}|\langle X,Y\rangle| \le U^*\langle Y,Y\rangle U$$

がわかります。ここで、行列幾何平均の定義に従って、計算をすると、仮定より、$\langle X,X\rangle$ は可逆ですから、

$$\begin{aligned} &\langle X,X\rangle \sharp |\langle X,Y\rangle|\langle X,X\rangle^{-1}|\langle X,Y\rangle| \\ &= \langle X,X\rangle^{1/2}\left(\langle X,X\rangle^{-1/2}|\langle X,Y\rangle|\langle X,X\rangle^{-1}|\langle X,Y\rangle|\langle X,X\rangle^{-1/2}\right)^{1/2}\langle X,X\rangle^{1/2} \\ &= \langle X,X\rangle^{1/2}\left((\langle X,X\rangle^{-1/2}|\langle X,Y\rangle|\langle X,X\rangle^{-1/2})^2\right)^{1/2}\langle X,X\rangle^{1/2} \\ &= \langle X,X\rangle^{1/2}\left((\langle X,X\rangle^{-1/2}|\langle X,Y\rangle|\langle X,X\rangle^{-1/2})\right)\langle X,X\rangle^{1/2} \\ &= |\langle X,Y\rangle| \end{aligned}$$

最後に、行列幾何平均の単調性を用いると、

$$\begin{aligned} |\langle X,Y\rangle| &= \langle X,X\rangle \sharp \langle X,X\rangle \sharp |\langle X,Y\rangle|\langle X,X\rangle^{-1}|\langle X,Y\rangle| \\ &\le \langle X,X\rangle \sharp U^*\langle Y,Y\rangle U \end{aligned}$$

となり、求めたいコーシー・シュワルツの不等式が成り立つことがわかりました。

(証明終)

私たちは、上のように行列版のコーシー・シュワルツの不等式を得たわけですが、これは、本当にベクトルに対するコーシー・シュワルツの不等式 (1.1) の自然な拡張になっているのでしょうか。ちょっと、確かめてみましょう。x と y を n 次元の列ベクトルとします。内積 $\langle x, y\rangle$ は複素数ですから、極分解すると、ある実数 $\theta \in \mathbb{R}$ があって、$\langle x, y\rangle = e^{i\theta}|\langle x, y\rangle|$ とできます。このとき、定理 2.2 を用いると

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle \sharp\, e^{-i\theta}\langle y, y\rangle e^{i\theta} = \sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$$

となり、(1.1) がわかります。極分解の U が見ずらいという場合には、X, Y に少し条件を加えますと、次のようにシンプルなコーシー・シュワルツの不等式になります。

系 2.3 ([4])**.** n 次正方行列 X, Y に対して、$\langle X, Y\rangle$ が半正定値行列の時は、

$$\langle X, Y\rangle \leq \langle X, X\rangle \sharp \langle Y, Y\rangle$$

が成り立つ。

3 行列版コーシー・シュワルツ不等式の拡張

解析学の基本中の基本の不等式ですから、ベクトル版のコーシー・シュワルツの不等式 (1.1) は、さまざまに研究されています。この節では、今得られた行列版コーシー・シュワルツの不等式 (2.2) の応用をいくつか紹介しましょう。

$A \in \mathbb{M}_n$ が半正定値行列の時、(1.1) より、任意のベクトル $x, y \in \mathbb{C}^n$ に対して、$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle Ax, x\rangle\langle Ay, y\rangle$ が成り立つことはすぐにわかります。では、一般的な行列の時はどうなるのでしょうか。Halmos [9] は次のように、A の極分解を考えて、混合コーシー・シュワルツ不等式

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle |A|x, x\rangle\langle |A^*|y, y\rangle \tag{3.1}$$

を示しました。さて、私たちは、定理 2.2 の簡単な応用として、次の混合コーシー・シュワルツの不等式を導くことができます。これをもっても、定理 2.2 の有用性がわかると思います。

定理 3.1. $A \in \mathbb{M}_n$ を n 次正方行列とする。任意の $X, Y \in \mathbb{M}_n$ に対して、

$$|\langle AX, Y\rangle| \leq \langle |A|X, X\rangle \sharp\, U^*\langle |A^*|Y, Y\rangle U$$

が成り立つ。ただし、U は、極分解 $\langle AX, Y\rangle = U|\langle AX, Y\rangle|$ のユニタリ行列である。

証明 A の極分解を $A = V|A|$ とします。このとき、$V|A|V^* = |A^*|$ となることに気を付けてください。さて、定理 2.2 により、

$$\begin{aligned}|\langle AX, Y\rangle| &= \langle V|A|X, Y\rangle = \langle |A|^{1/2}X, |A|^{1/2}V^*Y\rangle \\ &\leq \langle |A|^{1/2}X, |A|^{1/2}X\rangle \sharp\, U^*\langle |A|^{1/2}V^*Y, |A|^{1/2}V^*Y\rangle U \\ &= \langle |A|X, X\rangle \sharp\, U^*\langle |A^*|Y, Y\rangle U.\end{aligned}$$

(証明終)

　このように考えますと、さらにいろいろな行列版のコーシー・シュワルツ不等式のバリエーションが考えられそうです。

[7] において、古田は (3.1) の加重版が成立することを示しました。$A \in \mathbb{M}_n$ に対して、

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle |A|^{2\alpha}x, x\rangle\langle |A^*|^{2\beta}y, y\rangle \tag{3.2}$$

が、任意の $x, y \in \mathbb{C}^n$ と $\alpha + \beta = 1$ を満たす任意の $\alpha, \beta \in [0, 1]$ に対して成り立つ。さて、これに対する行列版はどうなるでしょうか。

定理 3.2 ([6])**.** $A \in \mathbb{M}_n$ とする。任意の $X, Y \in \mathbb{M}_n$ に対して、$U \in \mathbb{M}_n$ を $\langle AX, Y\rangle$ の極分解を与えるユニタリ行列とする。このとき、

$$|\langle AX, Y\rangle| \leq \langle |A|^{2\alpha}X, X\rangle \ \sharp \ U^*\langle |A^*|^{2\beta}Y, Y\rangle U$$

が、$\alpha + \beta = 1$ を満たす任意の $\alpha, \beta \in [0, 1]$ に対して成り立つ。

ベクトル版の不等式 (3.2) ときちんと対応していることがわかります。ところで、A が可逆の時、$\alpha = 0$ に対して、$|A|^{2\alpha} = I$ ですが、A が可逆でないときは、$|A|^{2\alpha}$ は、$|A|$ の値域への射影 $P_{|A|}$ になります。従って、$\alpha = 0$ もしくは、$\beta = 0$ のときは、次のような不等式になります。

$$|\langle AX, Y\rangle| \leq \langle P_{|A|}X, X\rangle \ \sharp \ U^*\langle |A^*|^2Y, Y\rangle U$$

そして、対称的に

$$|\langle AX, Y\rangle| \leq \langle |A|^2X, X\rangle \ \sharp \ U^*\langle P_{|A^*|}Y, Y\rangle U$$

になります。

　これもうまくいきました。さらに、議論できないでしょうか。[13] で、Lin は、(3.2) の精密化を考えました。$A \in \mathbb{M}_n$ とゼロでない $y \in \mathbb{C}^n$ とします。もし、$z \in \mathbb{C}^n$ が、$Az \neq 0$ で、かつ、A^*y が z と直交しているならば、

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 + \frac{\langle |A^*|^{2\beta}y, y\rangle|\langle |A|^{2\alpha}x, z\rangle|^2}{\langle |A|^{2\alpha}z, z\rangle} \leq \langle |A|^{2\alpha}x, x\rangle\langle |A^*|^{2\beta}y, y\rangle \tag{3.3}$$

が、任意の $x \in \mathbb{C}^n$ と $\alpha + \beta = 1$ を満たす任意の $\alpha, \beta \in [0, 1]$ に対して成り立つ。

不等式 (3.3) は、加重混合コーシー・シュワルツ不等式 (3.2) の右辺にそれだけの量を加えても、まだ不等式が成り立つことを示しています。では、これの行列版はどうなるのでしょうか。右辺の補正項をどのように行列化するかがポイントになりますが、すでに準備はできています。

定理 3.3 ([6])**.** $A \in \mathbb{M}_n$ とします。任意の $X, Y \in \mathbb{M}_n$ と $\alpha + \beta = 1$ を満たす任意の $\alpha, \beta \in [0, 1]$ に対して、$\langle |A|^{2\alpha}Z_1, X\rangle = 0$、$\langle |A^*|^{2\beta}Z_2, Y\rangle = 0$、$\langle AZ_1, Z_2\rangle = 0$ を満たす $Z_1, Z_2 \in \mathbb{M}_n$ をとります。このとき、

$$|\langle AX, Y\rangle| \leq \langle |A|^{\alpha}P^{\perp}_{|A^*|Z_2}|A|^{\alpha}X, X\rangle \ \sharp \ U^*\langle V|A|^{\beta}P^{\perp}_{|A|Z_1}|A|^{\beta}V^*Y, Y\rangle U$$

が、成り立つ。ただし、$U \in \mathbb{M}_n$ は、$\langle AX, Y\rangle$ の極分解のユニタリ行列で、$V \in \mathbb{M}_n$ は、A の極分解のユニタリ行列です。そして、$P^{\perp}_{|A^*|Z_2}$ は、$|A^*|Z_2$ の値域の直交補空間への射影を表します。

この定理 3.3 は、明らかに、定理 3.2 の精密化になっています。このように非可換化がうまくいけば、逆に Lin の精密化は次のように考えるべきではないかという新しい提案もできます。つまり、非可換化

によって、もう一度可換の場合の議論を見直すことにもつながります。$A \in \mathbb{M}_n$ とします。任意のベクトル $x, y \in \mathbb{C}^n$ に対して、$\langle Ax, z_1\rangle = 0$、$\langle A^*y, z_2\rangle = 0$、$\langle Az_2, z_1\rangle = 0$　を満たすベクトル $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^n$ をとります。このとき、

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \left(\langle |A|^{2\alpha}x, x\rangle - \frac{|\langle |A|^{2\alpha}x, z_2\rangle|^2}{\langle |A|^{2\alpha}z_2, z_2\rangle}\right)\left(\langle |A^*|^{2\beta}y, y\rangle - \frac{|\langle |A^*|^{2\beta}y, z_1\rangle|^2}{\langle |A^*|^{2\beta}z_1, z_1\rangle}\right)$$

が成り立つ。これをみると、Lin の精密化は、一方向の精密化であることがわかります。

4　行列版コーシー・シュワルツ不等式の一般化

この節では、さらに行列版のコーシー・シュワルツの不等式 (2.2) の拡張を考えていきましょう。コーシー・シュワルツの不等式は、x, y の 2 つの変数が現われます。そこで、これを 3 つの変数にしたらどうなるか？と考えてみます。まず、Richard [14] は次のような拡張を考えました。$x, y, z \in H$ で、$z \neq 0$ とします。このとき、

$$\left|\frac{\langle z, y\rangle\langle x, z\rangle}{\|z\|^2} - \frac{1}{2}\langle x, y\rangle\right| \leq \frac{1}{2}\|x\|\,\|y\| \tag{4.1}$$

が、成り立つ。2 つのベクトル x, y 以外にもう一つベクトル z を取ってきても、常に、上の不等式 (4.1) が成り立つことを言っています。そして、特に、$z = x$ もしくは、$z = y$ のときが、コーシー・シュワルツの不等式 (1.1) になっています。そこで、コーシー・シュワルツの不等式 (1.2) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ を、複素数 $\langle x, y\rangle$ が、原点を中心で、半径が $\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$ の円の内部にあるというように解釈してみます。すると、上の Richard の不等式 (4.1) は、

$$\left|2\frac{\langle z, y\rangle\langle x, z\rangle}{\langle z, z\rangle} - \langle x, y\rangle\right| \leq \|x\|\,\|y\|$$

と変形できますから、新しい複素数 $2\frac{\langle z,y\rangle\langle x,z\rangle}{\langle z,z\rangle}$ が、中心 $\langle x, y\rangle$ で、半径 $\|x\|\,\|y\|$ の円の内部にあるというように解釈できます。さらに、Buzano [1] は、Richard の不等式から次の不等式

$$|\langle y, z\rangle\langle z, x\rangle| \leq \frac{1}{2}\left(\|x\|\,\|y\| + |\langle x, y\rangle|\right)\|z\|^2 \tag{4.2}$$

を導きました。これも、$z = x$ とおけば、コーシー・シュワルツの不等式 (1.1) を導きますので、拡張になっています。両辺に 2 をかけて、さらに $\|z\|^2$ でわると、

$$\left|2\frac{\langle y, z\rangle\langle z, x\rangle}{\|z\|^2}\right| \leq \|x\|\,\|y\| + |\langle x, y\rangle|$$

となります。複素数 $2\frac{\langle z,y\rangle\langle x,z\rangle}{\langle z,z\rangle}$ の存在範囲を示していることがわかります。

さて、Richard の不等式 (4.1) も Buzano の不等式 (4.2) もいずれも、コーシー・シュワルツの不等式 (1.2) の一般化になっています。私たちは前節において、行列版のコーシー・シュワルツの不等式を得ているわけですから、当然、それに対応する行列版がどうなるのかと考えることは自然なことでしょう。しかし、そのためには、もともとの不等式を行列版に直すために少し工夫が必要になります。すべてを内積で表してみましょう。Richard の不等式 (4.1) は、

$$\left|\frac{\langle z, y\rangle\langle x, z\rangle}{\langle z, z\rangle} - \frac{1}{2}\langle x, y\rangle\right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle} \tag{4.3}$$

とできるでしょう。Buzano の不等式 (4.2) も、

$$\left|\frac{\langle y,z\rangle\langle z,x\rangle}{\langle z,z\rangle}\right| \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle} + |\langle x,y\rangle|\right) \tag{4.4}$$

と内積の形に直します。すると、その行列版がどうなるのか、容易に推測ができることになります。行列版のコーシー・シュワルツの不等式を用いると、次のように、Richard の不等式の行列版を考えることができます。

定理 4.1 (行列版の Richard 不等式 [5]). 任意の $X,Y,Z \in \mathbb{M}_n$ に対して、Z^*Z は、可逆で、$2\langle Z,Y\rangle\langle Z,Z\rangle^{-1}\langle X,Z\rangle - \langle X,Y\rangle$ の極分解を与えるユニタリ行列を U とします。このとき、

$$\left|\langle Z,Y\rangle\langle Z,Z\rangle^{-1}\langle X,Z\rangle - \frac{1}{2}\langle X,Y\rangle\right| \le \frac{1}{2}\left(\langle X,X\rangle \sharp U\langle Y,Y\rangle U\right) \tag{4.5}$$

が成り立つ。

定理 4.1 における行列版の Richard の不等式 (4.5) は、ベクトル版の Richard の不等式 (4.3) にきれいに対応していることがわかると思います。さらに、行列版の Buzano 不等式が成り立つ。これも、ベクトル版の Buzano の不等式 (4.4) にきちんと対応していることがわかります。

定理 4.2 (行列版 Buzano 不等式 [5]). 任意の $X,Y,Z \in \mathbb{M}_n$ に対して、Z^*Z は、可逆で、$2\langle Z,Y\rangle\langle Z,Z\rangle^{-1}\langle X,Z\rangle - \langle X,Y\rangle$ の極分解を与えるユニタリ行列を U とします。このとき、

$$V^*\left|\langle Z,Y\rangle\langle Z,Z\rangle^{-1}\langle X,Z\rangle\right|V \le \frac{1}{2}\left(\langle X,X\rangle \sharp U^*\langle Y,Y\rangle U + W^*|\langle X,Y\rangle|W\right)$$

が成り立つようなユニタリ行列 $V,W \in \mathbb{M}_n$ が存在する。

さて、これらの証明であるが、次の補題を示せば、十分でしょう。

補題 4.3 ([5]). 任意の $X,Y \in \mathbb{M}_n$ と直交射影 $P \in \mathbb{M}_n$ に対して、$\langle(2P-I)X,Y\rangle$ の極分解を与えるユニタリ行列を U とする。このとき、

$$|\langle PX,Y\rangle - \frac{1}{2}\langle X,Y\rangle| \le \frac{1}{2}(\langle X,X\rangle \sharp U^*\langle Y,Y\rangle U)$$

が成り立つ。

証明 P は、直交射影であるから、$2P-I$ はユニタリである。従って、定理 2.2 の行列版のコーシー・シュワルツ不等式より、

$$\begin{aligned}2|\langle PX,Y\rangle - \frac{1}{2}\langle X,Y\rangle| &= |\langle(2P-I)X,Y\rangle| \\ &\le \langle(2P-1)^*(2P-I)X,Y\rangle \sharp U^*\langle Y,Y\rangle U \\ &= \langle X,X\rangle \sharp U^*\langle Y,Y\rangle U\end{aligned}$$

が成り立つ。 (証明終)

実際、$2\langle Z,Y\rangle\langle Z,Z\rangle^{-1}\langle X,Z\rangle - \langle X,Y\rangle = Y^*(2Z(Z^*Z)^{-1}Z^* - I)X$ となりますが、$Z(Z^*Z)^{-1}Z^*$ は、Z の値域への射影を表していますから、補題 4.3 から定理 4.1 は、わかります。また、行列において、絶対値を外すときは、複素数とは違って、三角不等式は成立しません。そのとき、Thompson の不等式 [15] によって、任意の $A,B \in \mathbb{M}_n$ に対して、$|A+B| \le V|A|V^* + W|B|W^*$ を満たすようなユニタリ行列 V,W が存在します。これを用いて、定理 4.1 より、定理 4.2 が成立します。

5 行列版コーシー・シュワルツ不等式の改良

ここでは、コーシー・シュワルツの不等式 (1.1) の部分的な改良について、述べたいと思います。ただ、そのままの改良ではなく、次の形に変形したものを考えます。$A \in \mathbb{M}_n$ を半正定値行列とします。このとき、コーシー・シュワルツの不等式 (1.1) から、任意のベクトル $x, y \in \mathbb{C}^n$ に対して、

$$|\langle Ax, y\rangle| \leq \sqrt{\langle Ax, x\rangle\langle Ay, y\rangle}$$

が成り立ちます。もし、このときに、さらに、x と y が直交していたら、

$$|\langle Ax, y\rangle| \leq \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}\sqrt{\langle Ax, x\rangle\langle Ay, y\rangle}$$

が、成り立つ [11, 15]。ただし、$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ は、A の固有値とする。この系数は $\lambda_n > 0$ ならば、完全に 1 より小さいので、もとのコーシー・シュワルツの不等式よりよい評価になっています。この不等式はウイーランドの不等式と言って、作用素論の中でも、重要な不等式の一つです。さて、この不等式の行列版を考えてみましょう。前節までの話が分かっていれば、証明はさておき、その式化はできると思います。

定理 5.1 ([4])**.** $A \in \mathbb{M}_n$ を半正定値行列とします。任意の $X, Y \in \mathbb{M}_n$ に対して、もし $\langle X, Y\rangle = 0$ ならば、

$$|\langle AX, Y\rangle| \leq \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}\right)(\langle AX, X\rangle \sharp U^*\langle AY, Y\rangle U)$$

が成り立つ。ただし、$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ は、A の固有値とする。

まだまだ、行列版コーシー・シュワルツの不等式をもとにした議論はできると思いますが、このあたりで一端終わりにしたいと思います。藤井は、[2] で、ヒルベルト空間上の有界線形作用素に対して、定理 2.2 の形で、コーシー・シュワルツの不等式の定式化を成しました。それから、早や、10 年の歳月が流れていますが、行列版のコーシー・シュワルツ不等式の研究は緒に就いたばかりです。若い数学の研究者がこの分野に興味関心を持っていただければ幸甚に存じます。

謝辞 本研究は、JSPS 科研費 JP 16K05253 の助成を受けたものです。

参考文献

[1] M.L. Buzano, *Generalizzazione della diseguaglianza di Cauchy-Schwarz.*(Italian), Rend. Sem. Mat. Univ. c Politcch. Torino **31** (1971/73), 405–409 (1974).

[2] J.I. Fujii, *Operator-valued inner product and operator inequalities*, Banach J. Math. Anal., **2** (2008), 59–67.

[3] M. Fujii, J. Mićić Hot, J. Pečarić and Y. Seo, *Recent Developments of Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Monographs in Inequalities 4, Element, Zagreb, 2012.

[4] M. Fujimoto and Y. Seo, *Matrix Wielandt inequality via the matrix geometric mean*, to apear in Linear Multilinear Algebra.

[5] M. Fujimoto and Y. Seo, *Matrix Richard inequality via the geometric mean*, J. Math. Inequal., **12**, No.1, (2018), 107–111.

[6] M. Fujimoto and Y. Seo, *Mixed Schwarz inequalities via the matrix geometric mean*, preprint.

[7] T. Furuta, *A simplified proof of Heinz inequalities and scrutiny of its equality*, Proc. Amer. Math. Soc., **97** (1986), 751–753.

[8] T. Furuta, J. Mićić Hot, J. Pečarić and Y. Seo, *Mond–Pečarić Method in Operator Inequalities*, Zagreb, Element, 2005.

[9] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, GTM 19, 2nd Ed., Springer-Verlag, 1982.

[10] 日合文雄　柳研二郎, ヒルベルト空間と線形作用素, 牧野書店, 1995 年.

[11] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matric analysis*, Cambridge University Press, 1985.

[12] F. Kubo and T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann., **246**(1980), 205–224.

[13] C. S. Lin, *Heinz's Inequality and Bernstein's Inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **97** (1997), 2319–2325.

[14] U. Richard, *Sur des inégalités du type Wirtinger et application aux équations différentielles ordinaires*, Collquium of Analysis held in Rio de Janeiro, August, (1972)., 233–244.

[15] F. Zhang, *Matrix Theory*, Springer, New York, 2011.

address: `4-698-1 Asahigaoka Kashiwara Osaka 582-8582 Japan`

e-mail: `yukis@cc.osaka-kyoiku.ac.jp`

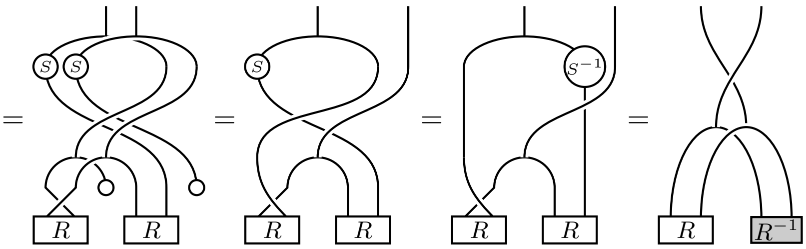
寄稿訂正：準三角 Hopf モジュールの弦表現

藤井 淳一（大阪教育大学 教育協働学科 理数情報講座）

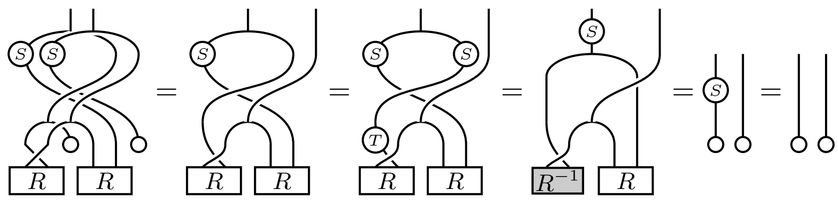
本会報の以前の号（2017July,No.103）の私の寄稿「準三角 Hopf モジュールの弦表現」を読み直していたところ、明らかな間違いを見つけましたので、お詫びいたしますとともに、ここで訂正させていただきます。該当箇所は、P.9 の補題 6 の証明の一部です：

補題 6. $R_{21} \bullet (R_{23}R_{13}R_{12}R_{14}R_{24}) = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}.$

の中の $R_{21} \bullet R_{23} = I \otimes I$ の証明の部分で間違って、

$R_{21} \bullet R_{23} =$  $= I \otimes I.$

と書いてしまいましたが、2 つ目の図の左下クロスがおかしくなっていたりいろいろミスがあり、以下のように訂正いたします：

$R_{21} \bullet R_{23} =$  $= I \otimes I.$