一般社団法人

国際数理科学協会会報

No.103/2017.7

編集委員： 藤井淳一（委員長）

目次

平成 29（2017）年度国際数理科学協会年会分科会

年会担当理事 濵田悦生

国際数理科学協会２０１７年度年会の各分科会が、以下のように開催されますのでお知らせいたします。

「確率モデルと最適化」分科会

代表者：菊田健作（兵庫県立大学）

世話役：北條仁志（大阪府立大学）

日本オペレーションズ・リサーチ学会 研究部会「不確実性環境下の意思決定モデリング」（主査 北條仁志 (大阪府立大学)，幹事 中西真悟 (大阪工業大学)）との共催

日時：2017 年 8 月 25 日（金）13:15–17:30

場所：大阪工業大学梅田キャンパス 204 セミナー室

大阪市北区茶屋町 1 番 45 号

アクセス：https://www.oit.ac.jp/rd/access/index.html

プログラム

13:15–14:10 **井上 真二**（関西大学）

『On Bivariate Software Reliability Assessment Technologies』

14:15–15:10 **吉冨 康成**（京都府立大学）

『確率的ジョブショップスケジューリング問題の近似解法』

15:25–16:20 **中出 康一**（名古屋工業大学）

『lead time quotation model の解析』

16:25–17:20 **花田 良子**（関西大学）, **仲川 勇二**（関西大学）

『多目的最適化問題のパレートフロンティア探索法と金融工学等への応用』

参加ご希望の方は、8 月 15 日 (火) までに北條 (hojo@cs.osakafu–u.ac.jp) までご一報ください。

「統計的推測と統計ファイナンス」分科会研究集会

世話人：地道 正行 (関西学院大学 商学部)

連絡先：濵田 悦生 (大阪大学 大学院基礎工学研究科)

日時: 2017 年 8 月 19 日 (土) 10:00–17:00

場所: 大阪府立大学 中百舌鳥キャンパス A14 棟 3 階 A14–321 教室

プログラム

午前の部

10:00–10:30 **岩貞 侑那** (大阪府立大学 大学院理学系研究科), 林 利治 (大阪府立大学 大学院工学研究科)

『ニューラルネットワークにおける重みの学習と汎化誤差』

10:30–11:00 **道家 悠太** (大阪府立大学 大学院工学研究科), 林 利治 (大阪府立大学 大学院工学研究科)

『関数型の説明変数を伴う混合効果モデルのパラメータ推定』

11:00–11:30 **川崎 悠介** (大阪府立大学 大学院工学研究科), 林 利治 (大阪府立大学 大学院工学研究科)

『先読みを利用した粒子フィルタによる状態推定』

11:30–12:10 **倉田 澄人** (大阪大学 大学院基礎工学研究科), 濵田 悦生 (大阪大学 大学院基礎工学研究科)

『ロバスト性を持ったモデル評価規準族の応用について』

午後の部

13:30–14:10 **田辺 竜ノ介** (大阪大学 大学院基礎工学研究科), **加茂 憲一** (札幌医科大医療人育成センター), **伊森 晋平** (大阪大学 大学院基礎工学研究科), **福井 敬祐** (大阪国際がんセンター 治験臨床研究管理室兼がん対策センター)

『一般化線形モデルにおける二項分布のパラメータ n の推定』

14:10–14:50 **濵田 悦生** (大阪大学 大学院基礎工学研究科)

“On a misuse of sufficient statistics in the exponential family”

14:50–15:30 **地道 正行** (関西学院大学 商学部) , **宮本 大輔** (奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科), **阪 智香** (関西学院大学 商学部), **永田 修一** (関西学院大学 商学部)

『Spark + R 環境を利用した財務ビッグデータ解析』

15:30–15:40 休憩

15:40–16:30 **林 利治** (大阪府立大学 大学院工学研究科)

『 Nested case–control データに基づく Cox 回帰モデルのパラメータ推定』

16:30–17:00 総合討論

「代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会」（ALGI）

日時：2017 年 8 月 28 日（月）午後〜8 月 29 日

場所：鹿児島大学 郡元キャンパス 理学部 1 号館 101 講義室

幹事：西澤弘毅（神奈川大学）, 津曲紀宏（崇城大学）

世話人：古澤仁（鹿児島大学 大学院理工学研究科（理学系）

＊寄稿

準三角 Hopf モジュールの弦表現

藤井 淳一（大阪教育大学 教育協働学科 理数情報講座）

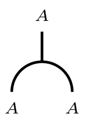
はじめに

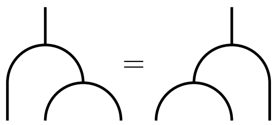
ここ何年かは色々大変でしたが、今年度から大学改組の影響で所属がわかりにくい名前に変わりました。今後とも、どうぞよろしくお願いします。

さて、量子群や Lie 環などに深く関わる Hopf 代数の話題ですが、なかなかわかりやすいテキストがなく、特に Sweedler convension が学生にあまり受けが良くないので困っていたところ、graphical calculus と言われる弦理論的に string で計算する手法を見つけ、気に入りました。そこで、先に [6] で Hopf 代数の弦表現についてまとめました。まず基礎として、次とその次の節では [6] の証明抜きでダイジェストを述べ、準三角 Hopf module（表現）の話に入ります。module の弦表現はわりとあるので、Drinfel'd 元やリボン元などの弦表現的考察のほうが珍しいかもしれません。

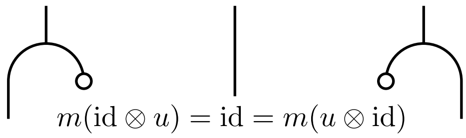
1. Hopf 代数の弦表現

まずは、体 $\mathbb{K}$ 上の**代数** A の演算を書き直します。テンソル積が基本になるので、本来はモノイダル（テンソル）圏で語られるべきものですが、あとで少し触れることにして、圏論はとりあえずおいておきます（基本的なことは、[5] で述べておきました）。量子計算同様、弦表現はここでは「下から上に眺め、テンソル積は横に並べる」という原則を立てておきます。弦表現では、端を一程度固定したうえで位相的な状態を変えない（3 次元内の）連続変形なら同じとみなす **isotopic** という性質で同一視していることになります。したがって、代数の演算は以下のようにあらわせます:

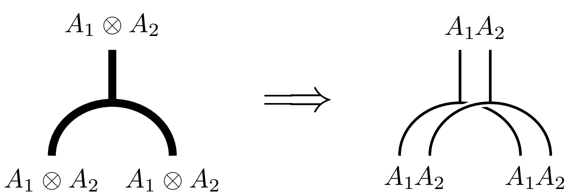
積 $m: \begin{array}{l} A \otimes A \to A \\ a \otimes b \mapsto ab \end{array}$ 

, **結合法則**：$m(\mathrm{id} \otimes m) = m(m \otimes \mathrm{id})$ 

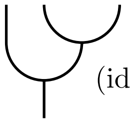
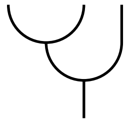
unit $u: \begin{array}{l} \mathbb{K} \to A \\ (t \mapsto tI) \end{array}$ 

,  $m(\mathrm{id} \otimes u) = \mathrm{id} = m(u \otimes \mathrm{id})$

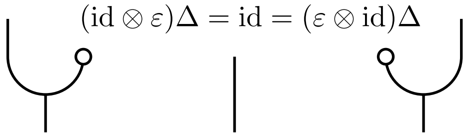
ここで、id は恒等写像で、スカラー t はどこにでもくっつくことができるので、あえて $\circ$ などの記号で「止め」の形にします。2 つの代数 (A_k, m_k, u_k) のテンソル積 $(A_1 \otimes A_2, m_{12}, u_{12})$ については、テンソル積の性質として独立計算制を採るので $m_{12} = (m_1 \otimes m_2)(\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})$ となる必要があります。ここで、テンソルの入替として、**braiding** τ:  を使っていますが、$A_1 \otimes A_2$ 自体も 2 本とすると、次のように表せます：

m_{12} : 

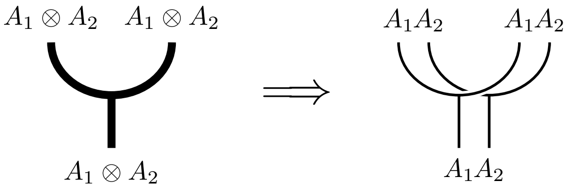
余代数では、演算は以下のようになります：

余積 $\Delta : A \to A \otimes A$ , **結合法則**：  $(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta$ 

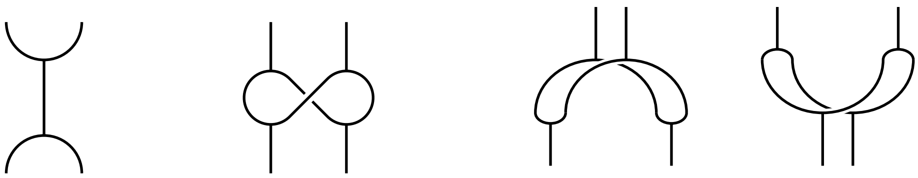
$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta = \mathrm{id} = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta$

counit $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ , 

2つの余代数 $(A_k, \Delta_k, \varepsilon_k)$ のテンソル積 $(A_1 \otimes A_2, \Delta_{12}, \varepsilon_{12})$ については、上記同様です $(\Delta_{12} = (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(\Delta_1 \otimes \Delta_2))$：

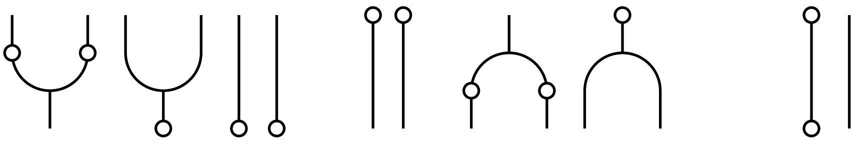
Δ_{12}： 

さらに**双代数**の場合は、Δ, ε が積で準同型であることが必要で、上記のことから、まず余積 Δ については、次の図で表現されます (m_{AA}, Δ_{AA} は $A \otimes A$ の積・余積)：



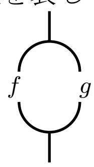
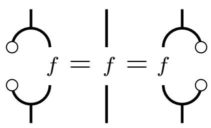
$$\Delta m = (m \otimes m)(\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(\Delta \otimes \Delta) = m_{AA}(\Delta \otimes \Delta) = (m \otimes m)\Delta_{AA},$$

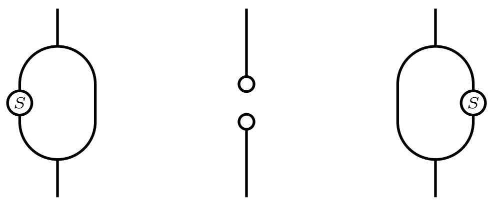
unit, counit については、余積, 積とのかかわりで、



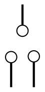
$(u \otimes u)\Delta = \Delta u = u \otimes u$ $\quad$ $\varepsilon \otimes \varepsilon = m(\varepsilon \otimes \varepsilon) = \varepsilon m$ $\quad$ $\varepsilon u = \mathrm{id}$

ということになることに注意しましょう。これらは準同型性を表しています。

次に、線形写像 f, g の**畳み込み積**を $f * g = m(f \otimes g)\Delta$:  で定義しますと、この積での単位元は、 より $u\varepsilon$  であり、id の逆元を**対合射 (antipode)** S: Ⓢとします：



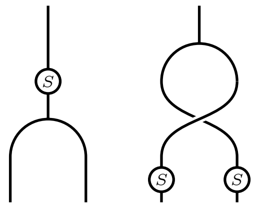
$$m(S \otimes \mathrm{id})\Delta = u\varepsilon = m(\mathrm{id} \otimes S)\Delta$$

対合射は、存在すれば一意的で、各写像はHopf代数に依存するので、$f, g : A \otimes A \to A$ の場合は、単位元は $u(\varepsilon \otimes \varepsilon)$  であることに注意すると、次の結果が示せます:

定理 1. 対合射は反準同型である:

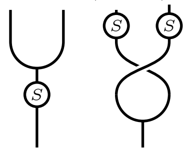
$$S(xy) = S(y)S(x) \quad :$$

$$S(m(x \otimes y)) = m\tau(S \otimes S)(x \otimes y)$$

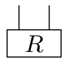


$$Sm = m\tau(S \otimes S)$$

双対的に
$\Delta S = (S \otimes S)\tau\Delta$

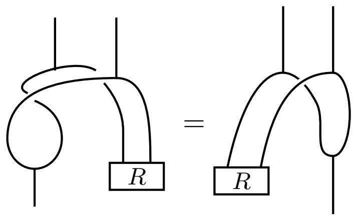


2. 準三角 Hopf 代数

Hopf代数 A のテンソル積 $A \otimes A$ 上の次を満たす可逆な元 R 

$$\Delta^{op} R \equiv \tau\Delta(x)R = R\Delta(x)$$

$$m(\tau\Delta(x) \otimes R) = m(R \otimes \Delta(x))$$

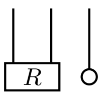
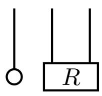
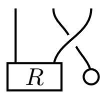
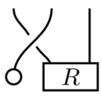


が存在するHopf代数を**準余可換**といいます。さらに、

$$R_{12} = R \otimes I, \quad R_{23} = I \otimes R, \quad R_{13} = (\mathrm{id} \otimes \tau)R_{12} = (\tau \otimes \mathrm{id})R_{13}$$

とするとき、 $$(\Delta \otimes \mathrm{id})R = R_{13}R_{23}, \qquad (\mathrm{id} \otimes \Delta)R = R_{13}R_{12}$$

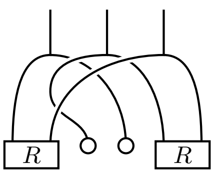
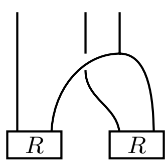
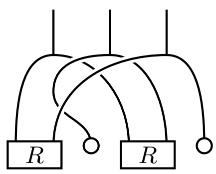
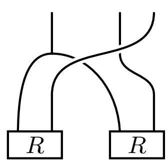
これが存在するHopf代数を**準三角**あるいは**braided**といいますが、R_{ij} それぞれの弦表現は、

$R_{12} =$  $R_{23} =$  $R_{13} =$  $=$ 

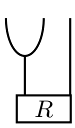
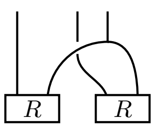
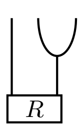
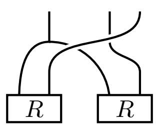
と (単位元を表示しないときは u が代用品だから) 考えられます。また、その関係式は、

$$R_{13}R_{23} = m(R_{13} \otimes R_{23}), \qquad R_{13}R_{12} = m(R_{13} \otimes R_{12})$$

より、$A \otimes A \otimes A$ の三重テンソル積Hopf代数の積を考える必要があります:

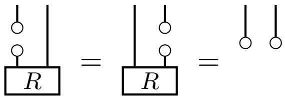
$R_{13}R_{23} =$  $=$  $R_{13}R_{12} =$  $=$ 

したがって、R_{ij} の**準三角条件**は、

 $=$  $R_{13}R_{23}$  $=$  $R_{13}R_{12}$

となります。ここで R は**普遍 R 行列**と呼ばれ、**Yang-Baxter 方程式** $R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$ が成り立ち、準三角Hopf代数の基本性質として以下が得られます:

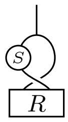
定理 2. 　普遍 R 行列を持つ準三角 Hopf 代数 $A = (A, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ について、

1. $(u\varepsilon \otimes \mathrm{id})R = (\mathrm{id} \otimes u\varepsilon)R = I \otimes I$, i.e., 

2. $R^{-1} = (S \otimes \mathrm{id})R$ となり、S^{-1} が存在し、
   $R = (S^{-1} \otimes \mathrm{id})R^{-1} = (\mathrm{id} \otimes S)R^{-1}$, $R^{-1} = (\mathrm{id} \otimes S^{-1})R$
3. $R = (S \otimes S)R = (S^{-1} \otimes S^{-1})R$.

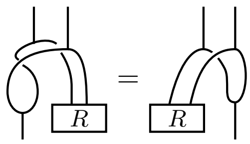
3. 準三角 Hopf 代数の Drinfel'd 元とリボン元

ここで、module を考えるベースになるので、Drinfel'd 元について触れておきましょう。基本文献は [3] ですが、ある程度 [7] でも見ることができます。

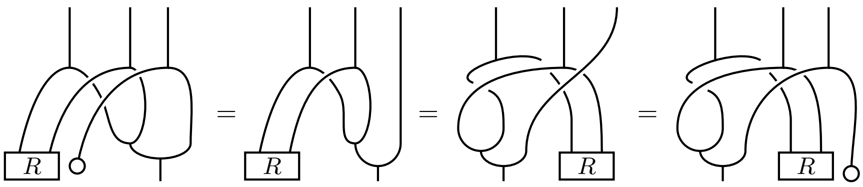
Drinfel'd 元とは、$\boldsymbol{u} = m(S \otimes \mathrm{id})\tau^{-1}R =$ 

のことで、まず S^2 との絡みとして、次の証明を弦表現で書き換えて見ましょう。

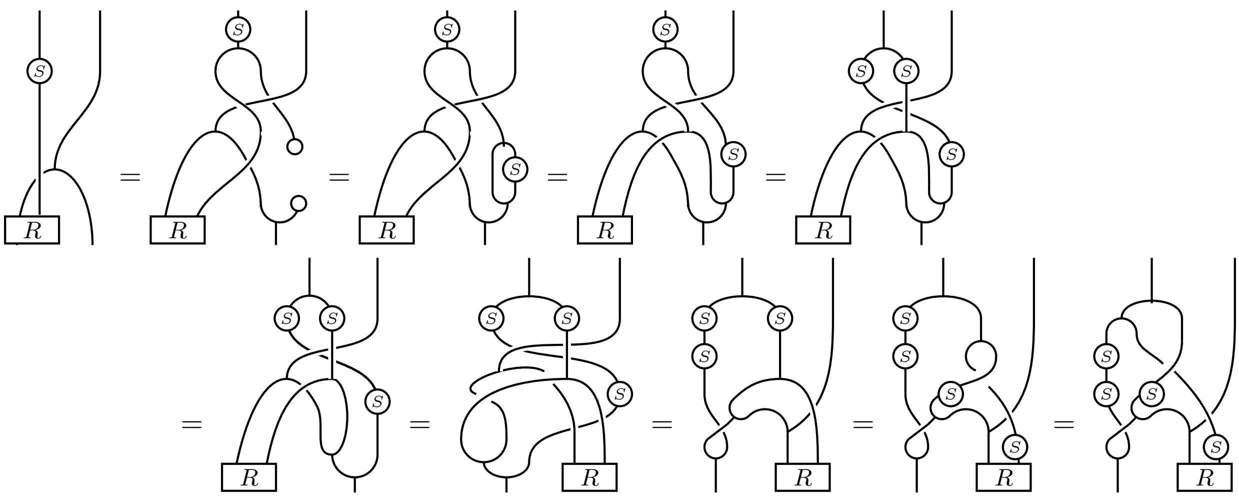
定理 3. 　$S^2(x)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}x \quad (\forall x \in A)$.

Proof. まず、R の性質として、

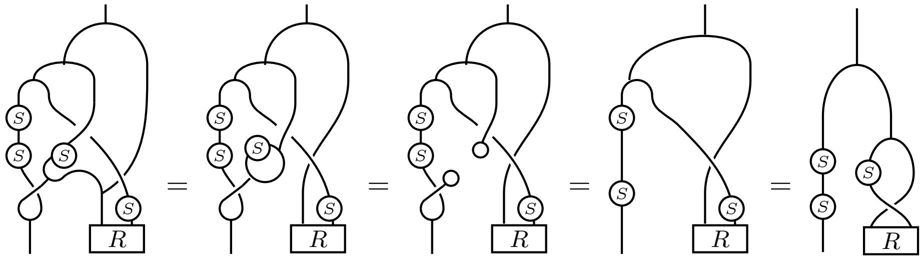
なので、次のことを確認する：

$(R \otimes I)(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(x)) =$ 

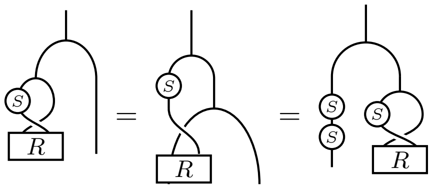
$= (\tau\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(x))(R \otimes I)$. 　その上で、



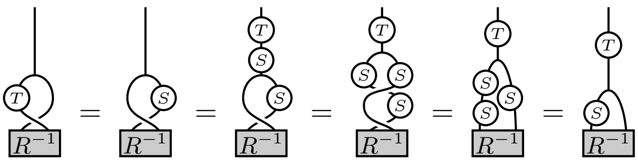
ここで、最後の図の上部を閉じて積を取ると、



したがって、ひとつ前の左辺も上部を閉じて、

$\boldsymbol{u}x =$  $= S^2(x)\boldsymbol{u}.$ □

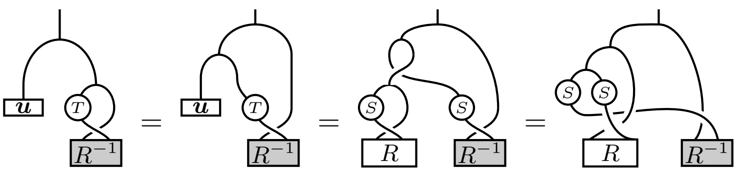
次に、$T = S^{-1}$ として、$(S \otimes S)R = R$, $(S \otimes S)R^{-1} = R^{-1}$ であることから、

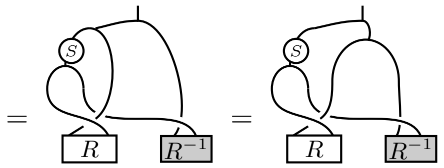
$\tilde{\boldsymbol{u}} =$ 

とするとき、次がわかります：

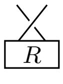
定理 4. $\boldsymbol{u}$ は可逆で、逆元は $\tilde{\boldsymbol{u}}$ である。

Proof. 定理 2 より、$\boldsymbol{u}T = \boldsymbol{u}S^{-1}(x) = S^2(S^{-1}(x))\boldsymbol{u} = S(x)\boldsymbol{u}$ となるので、

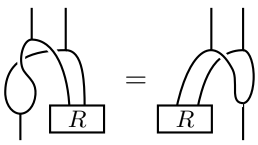
$\boldsymbol{u}\tilde{\boldsymbol{u}} =$ 

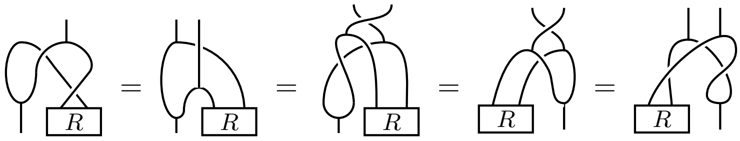
 $= S(I)I = I.$

したがって、$\boldsymbol{u}$ が可逆で、逆元は $\tilde{\boldsymbol{u}}$ である。 □

さらなる Drinfel'd 元の性質を見ましょう。$R_{21} =$  とするとき、以下がわかります：

補題 5. $\Delta(x)R_{21} = R_{21}\tau\Delta(x), \quad \Delta(x)R_{21}R = R_{21}R\Delta(x) \qquad (\forall x \in A).$

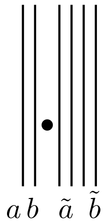
Proof. R の性質として、重なりが逆のもの  も成り立つので、

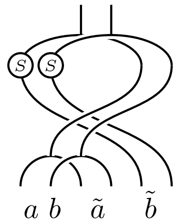
$\Delta(x)R_{21} =$  $= R_{21}\tau\Delta(x).$

したがって、$\Delta(x)R_{21}R = R_{21}\tau\Delta(x)R = R_{21}R\Delta(x)$. $\square$

ここで、次に $A^2 \equiv A\otimes A$ への A^4 の右作用 $\bullet$ を次で定義します $(\tilde{a},\tilde{b}\in A^2)$：

$$(a\otimes b)\bullet(\tilde{a}\otimes\tilde{b}) = (S\otimes S)(\tilde{b})(a\otimes b)\tilde{a}$$



$=$


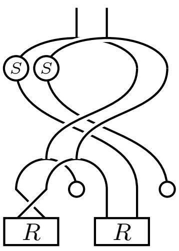
すると、$(S\otimes S)(\tilde{a})(S\otimes S)(\tilde{b}) = (S\otimes S)(\tilde{b}\tilde{a})$ なので、この作用は結合的になります:

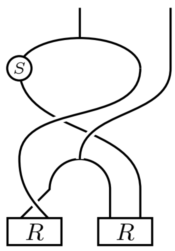
$$\begin{aligned}(a\otimes b)\bullet(\tilde{a_1}\tilde{a_2}\otimes\tilde{b_1}\tilde{b_2}) &= (S\otimes S)(\tilde{b_1}\tilde{b_2})(a\otimes b)\tilde{a_1}\tilde{a_2} = S(\tilde{b_2})S(\tilde{b_1})(a\otimes b)\tilde{a_1}\tilde{a_2}\\ &= \big(S(\tilde{b_1})(a\otimes b)\tilde{a_1}\big)\bullet(\tilde{a_2}\otimes\tilde{b_2}) = \big((a\otimes b)\bullet(\tilde{a_1}\otimes\tilde{b_1})\big)\bullet(\tilde{a_2}\otimes\tilde{b_2})\end{aligned}$$

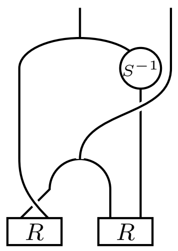
このとき、まず次の結果を示します：

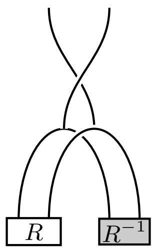
補題 6. $R_{21}\bullet(R_{23}R_{13}R_{12}R_{14}R_{24}) = \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}$.

Proof. 一つずつ片付けていこう：

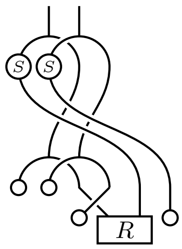
$R_{21}\bullet R_{23} =$


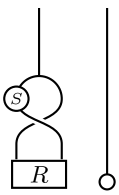
$=$


$=$


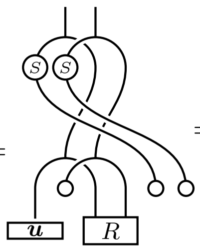
$=$


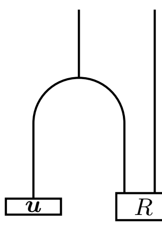
$= I\otimes I$.

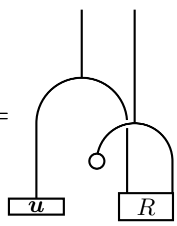
$R_{21}\bullet(R_{23}R_{13}) = (I\otimes I)\bullet R_{13} =$


$=$


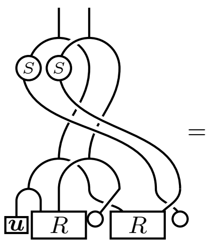
$= \boldsymbol{u}\otimes I$.

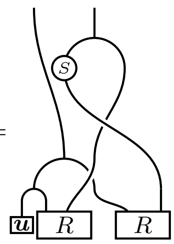
$R_{21}\bullet(R_{23}R_{13}R_{12})$
$= (\boldsymbol{u}\otimes I)\bullet R_{12} =$


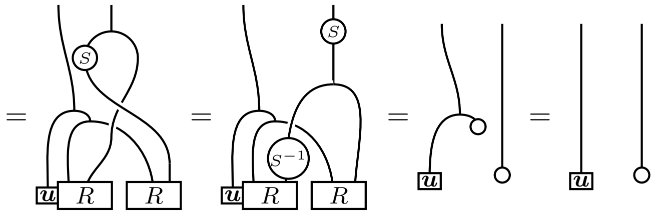
$=$


$=$


$= (\boldsymbol{u}\otimes I)R$.

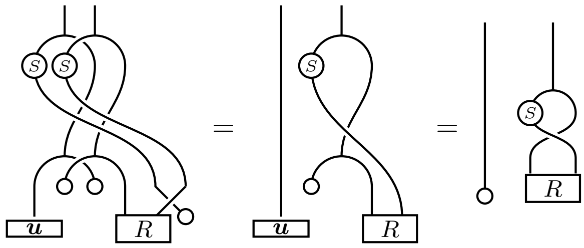
$R_{21}\bullet(R_{23}R_{13}R_{12}R_{14}) = (\boldsymbol{u}\otimes I)R\bullet R_{14} =$


$=$




$= \boldsymbol{u} \otimes I.$ さらに、

$(\boldsymbol{u} \otimes I) \bullet R_{24} =$

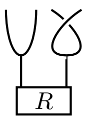


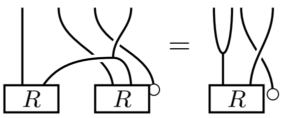
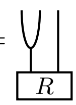
$= \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}$

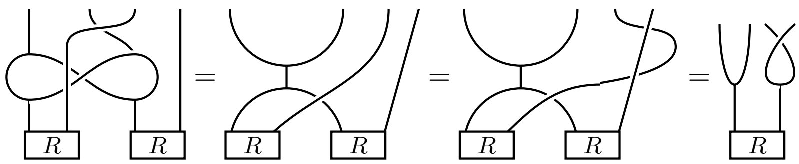
なので、全部合わせると、$R_{21} \bullet (R_{23}R_{13}R_{12}R_{14}R_{24}) = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}.$ □

A^4 の元として、$R_{12} = R \otimes I \otimes I$ なので、右作用の S がかかる部分は自明になって、$R_{21} \bullet R_{12} = R_{21}R$ となることに注意すると、準三角性より直ちに次がわかります：

系. $(R_{21}R) \bullet (R_{13}R_{23}R_{14}R_{24}) = (R_{21}) \bullet (R_{12}R_{13}R_{23}R_{14}R_{24}) = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}.$

補題 7. $R_{13}R_{23}R_{14}R_{24} =$  .

Proof. $R_{14}R_{24} =$  となるので、$R_{13}R_{23} =$  より、



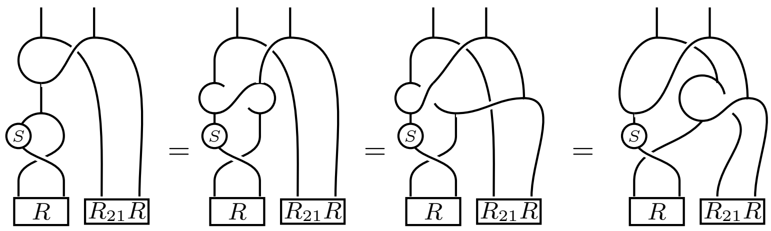
□

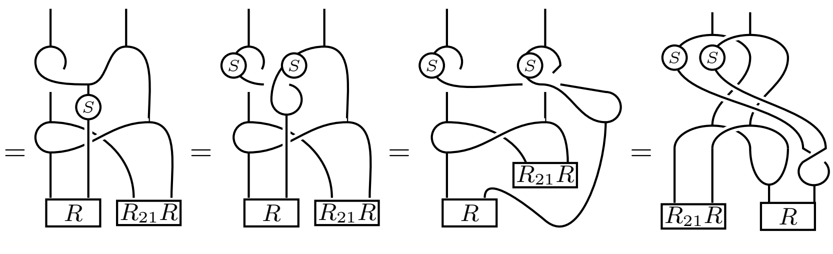
したがって、以下の定理が得られます。

定理 8. $\Delta(\boldsymbol{u}) = (R_{21}R)^{-1}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u})(R_{21}R)^{-1}.$

Proof. $\Delta(\boldsymbol{u})(R_{21}R) = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}$ を示す。補題 5,7 と系より、

$\Delta(\boldsymbol{u})R_{21}R =$



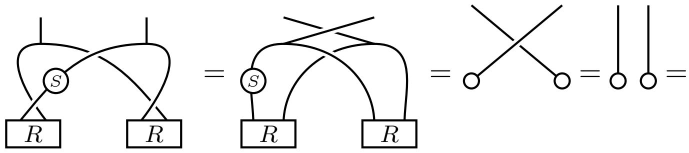


$= (R_{21}R) \bullet (R_{13}R_{23}R_{14}R_{24}) = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}.$ □

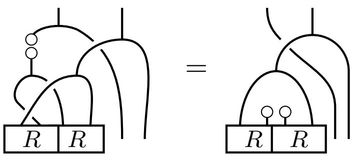
さて次に、準三角 Hopf 代数 A の**リボン元** $\boldsymbol{v}$ とは、A の中心可逆元で、

$$\Delta(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v})(R_{21}R)^{-1}, \qquad \boldsymbol{v} = S(\boldsymbol{v})$$

を満たすものを言い、これを持つとき、A は **ribbon Hopf Algebra** と呼ばれます。ここで、$Q = R_{21}R$ は **monodromy 元**とも呼ばれますが、

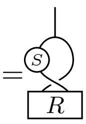
$(\mathrm{id}\otimes S)R_{21}R_{21} =$  $= I\otimes I$

となって、$R_{21}^{-1} = (\mathrm{id}\otimes S)R_{21}$ だから、$Q^{-1} = (R_{21}R)^{-1} = R^{-1}R_{21}^{-1} = (S\otimes\mathrm{id})R(\mathrm{id}\otimes S)R_{21}$ であり、さらに R 同様

$(u\varepsilon\otimes\mathrm{id})Q(x\otimes y) =$  $= I\otimes m(I\otimes I)(x\otimes y) = x\otimes y$

より、$(u\varepsilon\otimes\mathrm{id})Q = I\otimes I = (u\varepsilon\otimes\mathrm{id})Q^{-1}$ であることに注意しましょう。また、

$$S(\boldsymbol{v}^{-1})\boldsymbol{v} = S(\boldsymbol{v}^{-1})S(\boldsymbol{v}) = S(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{-1}) = S(I) = I$$

なので、$S(\boldsymbol{v}^{-1}) = \boldsymbol{v}^{-1}$ も成り立つし、$\boldsymbol{v}^{-1}$ も中心元である。Drinfel'd 元 $\boldsymbol{u} =$  について、次のことが弦計算するまでもなくわかります：

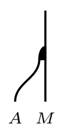
補題 9. $\Delta(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{-1}) = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{-1}\otimes\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{-1}$ ($\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{-1}$は**群的元**), $\varepsilon(\boldsymbol{v})(=\varepsilon(\boldsymbol{v})I) = I,\quad \boldsymbol{v}^2 = S(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$.

一般に、リボン元 $\boldsymbol{v}$ はあるとは限りませんが、準三角 Hopf 代数 A はリボン元を持つように拡張可能です:

定理 (Reshetikhin-Turaev)**.** 準三角 Hopf 代数 (A,R) に対し、$\boldsymbol{v}$ との形式和拡張 $\tilde{A} = \{a+b\boldsymbol{v}|a,b\in A\}\supset A\equiv\{a+0\boldsymbol{v}\}$ を以下の演算で考えると、$(\tilde{A},R,\boldsymbol{v})$ はリボン元 $\boldsymbol{v}$ を持つ準三角 Hopf 代数となる。

$$(a+b\boldsymbol{v})(a'+b'\boldsymbol{v}) = (aa'+bb'\boldsymbol{u}S(\boldsymbol{u})) + (ab'+ba')\boldsymbol{v}, \qquad S(a+b\boldsymbol{v}) = S(a)+S(b\boldsymbol{v},$$
$$\Delta(a+b\boldsymbol{v}) = \Delta(a)+\Delta(b)Q^{-1}(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}), \qquad \varepsilon(a+b\boldsymbol{v}) = \varepsilon(a)+\varepsilon(b).$$

4. 準三角 Hopf 代数の module

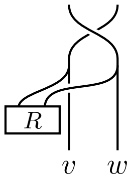
Hopf 代数 A の **Hopf(左) モジュール** M は弦表現として、 のように表現されていますが、上部構造として A が結合的に作用するので、感覚的には、作用は積とさほど変わりません。接合部分の角度で代数の積・余積か module への作用かは判別できるので、今後簡便性のため、接合部分の着色は省略することにします。

左モジュール全体は、自然にモノイダル圏になります（実際には left dual を持つ圏です）。そこでの **braiding** $\sigma_{V,W}$ は、圏論的には次の性質で特徴づけられる自然同型です：

$$\sigma_{U,V\otimes W} = (\mathrm{id}\otimes\sigma_{U,W})(\sigma_{U,V}\otimes\mathrm{id}), \qquad \sigma_{U\otimes V,W} = (\sigma_{W,V}\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\sigma_{V,W})$$

さて、

$$\sigma_{V,W}(v\otimes w)=\tau^{-1}(R(v\otimes w))$$

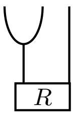
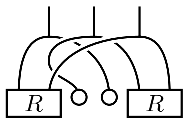
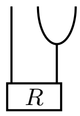
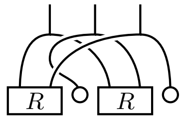


と定めた $\sigma_{V,W}=\sigma^{R}_{V,W}$ を R-**braiding** と呼びます。個々での目標は次の結果です:

定理 10. A が準三角 Hopf 代数であることと A-module のなす圏が braided であることは同値である。

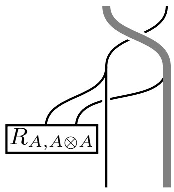
Proof. まず、実際に上記の braiding の条件を満たしていることを示しておこう。

ここで、R 行列の性質として、

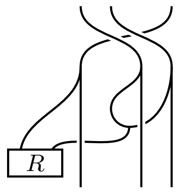
$(\Delta\otimes\mathrm{id})R$  $=$  $R_{13}R_{23}$, $(\mathrm{id}\otimes\Delta)R$  $=$  $R_{13}R_{12}$

となることを思い出そう。すると、例えば、最初の braiding の式については、上記の後者の関係に注意して、$\tau=\tau_{U,V\otimes W}$ とすると、

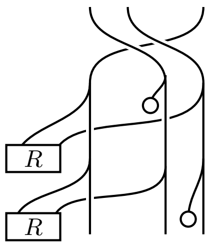
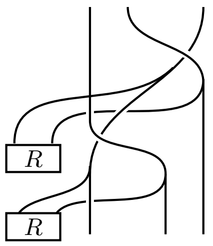
$$\sigma_{U,V\otimes W}(u\otimes(v\otimes w))=\tau(R_{A,A\otimes A})(u\otimes(v\otimes w))$$



$=$

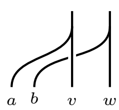


$$=\tau\left((\mathrm{id}\otimes\Delta)R\right)(u\otimes v\otimes w)=\tau(R_{13}R_{12})(u\otimes v\otimes w)=\tau R_{13}(R_{12}(u\otimes v\otimes w))$$

$=$  $=$  $=(\mathrm{id}\otimes\sigma_{U,W})(\sigma_{U,V}\otimes\mathrm{id})(u\otimes v\otimes w)$

となって、もう一方も同様に示せるので、braiding の条件を満たしていることがわかる。

ここで、逆に A-module 上に自然同型として braiding $\sigma_{V,W}$ が与えられたとしよう。$V\cong\mathrm{Hom}(A,V)$ を示す写像 $\bar{v}a=av$ を考える。ただしテンソルを取ったときの作用の弦表現は、

$(\bar{v}\otimes\bar{w})(a\otimes b)=$ 

と上下関係を定めておく。A での braiding $\sigma_{A,A}$ を

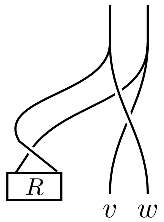
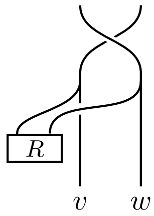
$$\overline{\sigma_{V,W}(v\otimes w)}(a\otimes b)=\sigma_{V,W}(\bar{v}\otimes\bar{w})(a\otimes b)\equiv\tau^{-1}(\bar{v}\otimes\bar{w})\sigma_{A,A}(a\otimes b)=(\bar{w}\otimes\bar{v})\sigma_{A,A}(a\otimes b)$$

となるように定めると、

$$R=\tau_{A,A}\sigma_{A,A}(I\otimes I)$$

で $\sigma_{V,W}$ を定める R 行列ができる。実際（[10] 修正）、

$$\sigma_{V,W}(v \otimes w) = \sigma_{V,W}(\bar{v} \otimes \bar{w})(I \otimes I) = \tau^{-1}(\bar{v} \otimes \bar{w})\sigma_{A,A}(I \otimes I)$$

$$= \tau^{-1}(\bar{v} \otimes \bar{w})\tau^{-1}R =$$  $=$  $= \tau^{-1}(R(v \otimes w))$

となって、元の braiding の定義と整合的であり、上記の計算を逆にしていくと、

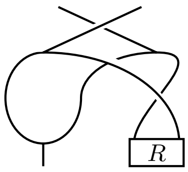
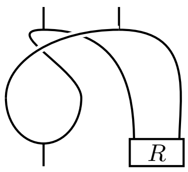
$$\tau((\mathrm{id} \otimes \Delta)R)(u \otimes v \otimes w) = \sigma_{U,V\otimes W}(U \otimes (v \otimes w))$$
$$= (\mathrm{id} \otimes \sigma_{U,W})(\sigma_{U,V} \otimes \mathrm{id})(u \otimes v \otimes w) = \tau(R_{13}R_{12})(u \otimes v \otimes w)$$

より、$(\mathrm{id} \otimes \Delta)R = R_{13}R_{12}$ がわかり、同様に $(\Delta \otimes \mathrm{id})R = R_{13}R_{23}$ も得られる。

一方、σ の A-線型性により、

$$R\Delta(x) = R(\delta(x)(I \otimes I)) = \tau\sigma(\Delta(x)I \otimes I) = \tau x\sigma(I \otimes I) = \tau x\tau^{-1}R = \tau\left(\Delta(x) \cdot \tau^{-1}R\right)$$

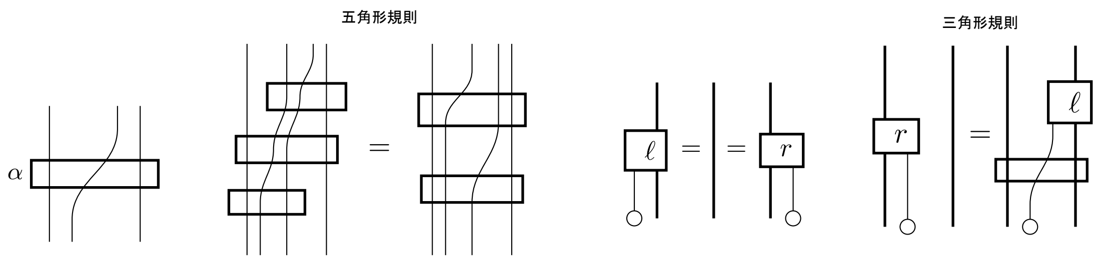
となるが、最後の $\Delta(x)$ の左作用 (積 $\cdot$) を上記同様に弦表現的に下からと解釈すると

右辺 $=$  $=$  $= (\tau\Delta(x))R.$

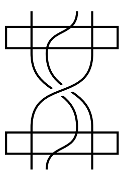
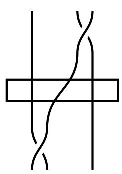
となって、準余可換性が言えて、R は普遍 R 行列であることが確かめられた。 □

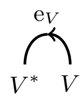
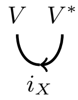
5. おわりに — Hopf module の圏論的弦表現のまとめ

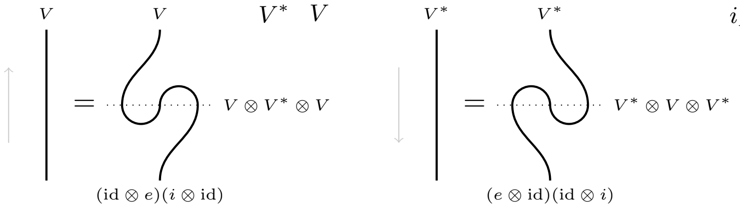
最後に、Hopf module がなす圏の弦表現に目を向けましょう。**モノイダル圏**とは、五角形規則を満たす結合組替同型 α と、三角形規則を満たす左右の単位元吸収同型 r, ℓ があることでした：



圏が **braided** とは、加えて「六角形規則」(逆向きと対) をみたす braiding があることです：

六角形規則：  $=$ 

V の **dual** V^* と**評価射** $e_V\colon V^*\otimes V\to I$  , **余評価射** $i_V\colon I\to V\otimes V^*$  が、



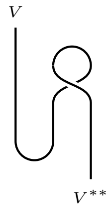
を伴って、常に存在するときに **rigid(compact)** であるといわれます。Hopf 代数 A の有限次元表現 (= 有限次元 (左)module) 全体のなす圏 **rep**A は共役空間を dual として、rigid braided monoidal 圏となります。

この圏が**リボン圏**であるとは、次の性質を持つ自然同型 $\delta_V:\ V\to V^{**}$ があるときです:

$$\delta_{V\otimes W}=\delta_V\otimes\delta_W,\qquad \delta_I=\mathrm{id},\qquad \delta_{V^*}=(\delta_V^*)^{-1}.$$

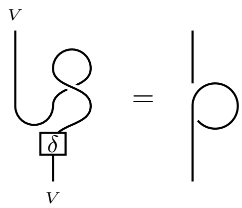
この時、次の逆向き自然同型 ψ が定まります：

$$\psi_V=(\mathrm{id}\otimes e)(\mathrm{id}\otimes\sigma^{-1})(i\otimes\mathrm{id}):\ V^{**}\to V,$$

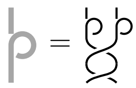


これはさらに、次の **twist(balancing 射)** と呼ばれる自然同型 θ

$$\theta_V=\psi_V\delta_V:\ V\to V$$



が定まり、次の性質を持ちます。これらがあるとき「リボン構造を持つ」ともいいます。

$$\theta_{V^*}=(\theta_V)^*\qquad \theta_{V\otimes W}=(\theta_V\otimes\theta_W)\sigma_{WV}\sigma_{VW}$$  $$\theta_I=\mathrm{id}.$$

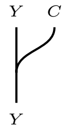
以上について、次の結果が知られています [4, Prop.8.11.2]:

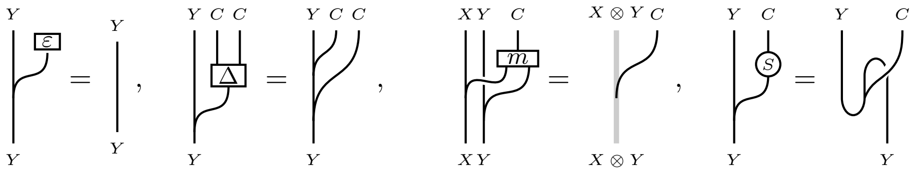
定理. リボン Hopf 代数 $(A,R,\boldsymbol{v})$ に対し、**rep**A は、$\boldsymbol{v}$ の作用で与えられる twistθ でリボン圏となる。同値類間のこの対応は全単射である。

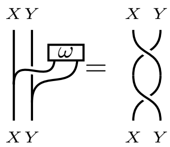
さて、量子群は準三角 Hopf 代数と（完備化によって）見れると同時に、quantum double 的な解釈も可能です。ここではもっと一般に、coend construction によって、淡中双対定理の圏論的拡張がなされていることについて触れ、話を締めくくります。

Hopf 代数 A の有限次元表現全体（有限次元 module 全体）**Rep**(A) は、核・余核・像・余像を備えているので、線型性を持ったアーベル圏 $\mathcal{C}$ ですが、そこでは（積分概念の拡張である）coend という極限概念があります：双関手 $B:\mathcal{B}^{op}\times\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ についての coend $\displaystyle\int^{X\in\mathcal{B}}B(X,X)$ で、図式 $B(X,X)\xleftarrow{B(X,f)}B(X,Y)\xrightarrow{B(f,Y)}B(Y,Y)$ の帰納極限です。

$\mathcal{B}$ を braided rigid 圏とし、$B(X,Y)=X^*\otimes Y$ として、coend $C=\int^{Y\in\mathcal{B}}Y^*\otimes Y$ が取れたとするとき、自然同型 $i_Y:\ Y^*\otimes Y\to C$ について、普遍的な余作用 δ を定めます：

$\delta_Y:\ (\mathrm{id}\otimes i_Y)(\mathrm{coev}_Y\otimes \mathrm{id}_Y):\ Y\to Y\otimes C$ . すると次の演算で、C は Hopf 代数になります：

$u=\delta_I$, 

更に、標準的な Hopf pairing ω も、 によって定めることができます。これは **self-dual** と呼ばれる $\omega\tau(S\otimes S)=\omega$ という性質を満たしています。

このような **coend construction** に関しては、Tannaka-Kreĭn duality のバリエーションとして、様々な形で論じられています。一つだけ代表的な結果をあげておきます [2]：

双対定理. Hopf 代数 A について、$G:\mathbf{Rep}(A)=\mathbf{Mod}(A)\to\mathbf{Mod}(\mathbb{C})$ を忘却関手、coend を $A'=\int^{X\in A}G(X)^*\otimes G(X)$ とするとき、$\mathbf{Mod}(A)$ と $\mathbf{Mod}(A')$ は、モノイダル圏として同型である。

参考文献

[1] A.Bruguières and A.Virelizier, On the center of fusion categories, Pacific J.Math., **264**(2013). 1–30. http://math.univ-lille1.fr/~virelizi/center-fusion.pdf

[2] TK.Bakke, Hopf algebras and monoidal categories, Doctor Thesis in Univ. Tromsø, 2007. http://munin.uit.no/bitstream/handle/10037/1084/finalthesis.pdf

[3] В.Г.Дринфельд, О почти кокоммутативных алгебрах Хопфа, алгебрах и анализ, 1989, том 1, выпуск 2, 30–46. (V.G.Drinfel'd, Almost cocommutative Hopf algebras, Algebra, i Analiz, 1989, Volume 1, Issue 2, 30–46.)

[4] P.Etingof, S.Gelaki, D.Nikshych and V.Ostrik, "Tensor Categories", Math. Surveys and Mono. **205**, 2015, Amer. Math. Soc..

[5] 藤井淳一, トポロジカル量子計算とカテゴリー, 国際数理科学会報 **No.95**(2015.7), 3–10. http://www.jams.or.jp/kaiho/kaiho-95.pdf

[6] 藤井淳一, Hopf 代数の弦表現の薦め — Sweedler 記法からの解放 —, 数学教育研究掲載予定, 大阪教育大学数学教育講座, 2017.

[7] C.Kassel, 'Quantum Groups', Graduate Texts in Mathematics **155**, Springer Verlag, 1994.

[8] A.Klimyk and K.Schmüdgen, "Quantum Groups and Their Representations", Springer, 1997.

[9] N.Yu.Reshetikhin and V.G.Turaev, Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups, Commun. math. Phys., **127**(1990), 1–26.

[10] C.Schweigert, "Hopf algebras, quantum groups and toplogical field theory", Lecture Note, 2014/15. http://www.math.uni-hamburg.de/home/schweigert/ws12/hskript.pdf