Scientiae Mathematicae Japonicae Online, **e-2006**, 197–214

UNE NOTE SUR "LE PROBLÈME DE CAUCHY DANS LA CLASSE DE GEVREY"

Y. Ohya et S. Tarama

Received January 18, 2006

Abstract. We consider the Cauchy problem in Gevrey class for hyperbolic equations with C^κ $(2 \geq \kappa > 1)$ coefficients in the time variable. Following the correction of the estimates of hyperbolic polynomial cited in our previous paper, we define the modified parametrix and show that, with this parametrix, the arguments of the previous paper work still well.

1 Introduction

Dans l'article " Le Problème de Cauchy à Caractéristiques Multiples dans la classe de Gevrey – coefficients hölderiens en t –" par Y. Ohya et S. Tarama [6], nous avons montré l'existence et l'unicité de solutions pour le problème de Cauchy hyperbolique que voici:

$$
\begin{cases} P(t,x,D_t,D_x)u(t,x) = f(t,x) \\ D_t^j u(0,x) = \phi_j(x), \quad j = 0,1,\dots,m \end{cases} \tag{1.1}
$$

dans une bande $\Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^l$, où $P(t,x,D_t,D_x)$ est un opérateur hyperbolique;

$$
P(t,x,D_t,D_x) = D_t^m + \sum_{j+|\nu| \leq m, j<m} a_{j,\nu}(t,x) D_t^j D_x^\nu \tag{1.2}
$$

dont la partie principale $p_m(t,x,\tau,\xi)$ donnée par;

$$
p_m(t,x,\tau,\xi) = \tau^m + \sum_{j+|\nu|=m, j<m} a_{j,\nu}(t,x)\tau^j \xi^\nu \tag{1.3}
$$

n'a que des racines caractéristiques réelles pour tout $(t,x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^l$. Soit r la multiplicité maximale de ces racines. Nous avons montré dans [6] le suivant: *Sous l'hypothèse que les coefficients $a_{j,\nu}(t,x)$ pour $j+|\nu| = m$ (respectivement $j+|\nu| < m$) appartiennent à $C^\kappa([0,T],\gamma^s_{loc}(\mathbb{R}^l)$ où $0 < \kappa \leq 2$ (resp. $C^0([0,T],\gamma^s_{loc}(\mathbb{R}^l))$) et qu'ils soient bornés dans Ω, pour tout $f(t,x) \in C^0([0,T],\gamma^s_{loc}(\mathbb{R}^l))$ et tous $\phi_j(x) \in \gamma^s_{loc}(\mathbb{R}^l)$ ($j = 0,\dots,m-1$), le problème* (1.1) *a une et une seule solution $u(t,x)$ dans $C^m([0,T],\gamma^s_{loc}(\mathbb{R}^l))$ quand $1 < s < \min\{1+\frac{\kappa}{r}, \frac{r}{r-1}\}$.*

Cet énoncé avait été montré par la construction de paramétrix. Pour le cas où $1 < \kappa \leq 2$, les majorations de paramétrix s'appuient sur un lemme, Lemme 14.1 de [6]. Trés récemment, en réctifiant ce lemme, Tarama [7] a montré le suivant: quand tous les coefficients sont indépendants des variables x quand $|x|$ est assez grand, on a

$$
\left| \frac{\partial_t \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_m(t,x,\tau - i\mu,\xi)}{p_m(t,x,\tau - i\mu,\xi)} \right| \leq C(t(T-t))^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}} \left(\frac{\mu}{|\xi|}\right)^{-\frac{r}{\kappa}} \left(\frac{\mu}{|\xi|}\right)^{-|\alpha|} \mu^{-|\beta|} \tag{1.4}
$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35L30.
Key words and phrases. partial differential equations , hyperbolic, Gevrey class.

où $0 < \mu \leq |\xi|$, $|\alpha| + |\beta| \leq r$ et $(t, \tau, x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$.

Ici nous remarquons que le terme $(t(T-t))^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}}$ @a manqué dans les énoncés de Lemme 14.1 de [6]. Ce terme est indispensable. On le voit en considérant un opérateur du type de Tricomi par exemple. Etant donné cette situation, il nous faut modifier la construction de paramétrix pour $1 < \kappa \leq 2$ à cause des singularités aux points $t = 0$ et $t = T$. Dans cette note, nous montrons que, par la modification convenable de la paramétrix définie au [6], les arguments antérieurs marchent encore bien et les énoncés ci-dessus restent valables.

Note 1.1. Si l'oprérateur hyperbolique $P(t, x, D_t, D_x)$ a le prolongement dans une certaine bande $(T_1, T_2) \times \mathbb{R}^l$ telle que $[0, T] \subset (T_1, T_2)$ ayant la même réguralité des coefficients et la multiplicité maximale des racines caractéristiques, alors la démonstration de [6] est valable sans modifier la paramétrix. De même, si nous ne considérons le problème de Cauchy que dans $(0, T) \times \mathbb{R}^l$, alors il ne faut aucune modification à faire. De plus si $r = 1$, l'opérateur est strictement hyperbolique. Donc si $\kappa > 1$, on sait que le problème est bien posé en L^2 et en γ^s avec $s \geq 1$ (voir Mizohata [5] et Leray-Ohya [4]). Donc, désormais on suppose que $r \geq 2$.

Nous rappelons l'idée de démonstration de [6]. D'abord on réduit le problème à celui avec les données nulles et le second membre $f(t, x)$ remplissant $f(0, x) = 0$. Ensuite on va chercher une solution $u(t, x)$ sous une forme $u(t, x) = Qv(t, x)$ où l'opérateur Q est défini par

$$\begin{aligned} (1.5)\quad & Qv(t,x) = \\ & \frac{1}{(2\pi)^{1+l}} \int e^{i((t-t_1)\tau - i(\Psi(t,\xi)-\Psi(t_1,\xi)+i\xi(x-y)} q(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi) v(t_1,y)\, d\tau d\xi dt_1 dy \end{aligned}$$

avec une fonction de poids $\Psi(t, \xi)$ et un symbole $q(t, x, \tau, \xi)$ qui est un symbole régularisé de $1/p_m(t, x, \tau, \xi)$ par rapport à la variable t.

En remarquant $PQ = I + R$, on voit que le problme (1.1) se met sous

$$v(t,x) + Rv(t,x) = f(t,x) \tag{1.6}$$

où le symbole de R est donné par

$$\begin{aligned} (1.7)\quad & r(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi) \\ & \qquad = e^{-it\tau+\Psi(t,\xi)} P(t,x,D_t,\xi) e^{it\tau-\Psi(t,\xi)} q(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi)) - 1. \end{aligned}$$

Par les majorations de $r(t, x, \tau - i\Psi_t(t, \xi), \xi)$ et de ses dérivées, on voit que l'opérateur R est un opérateur d'ordre zero du type de Volterra. Donc on voit que $I + R$ est inversible. Alors on voit l'existence de solutions. En ce qui concerne l'unicité de solutions et l'existence de la vitesse finie de propagation, on les montre par les majorations uniformes de Q et R pour une suite des opérateurs strictement hyperboliques qui converge à l'opérateur donné.

La modification à faire, c'est le choix de la fonction de poids $\Psi(t, \xi)$. On a posé $\Psi(t, \xi) = Ht\langle\xi\rangle^\delta$ dans [6]. Mais, compte tenu de la singularité $(t(T-t))^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}}$ des majorations (1.4), nous prenons $\Psi(t, \xi) = t + H\langle\xi\rangle^\delta(t+\rho^{-1})^{1-(\kappa-1)/r}$ près de $t = 0$ et $\Psi(t, \xi) = t - T - H\langle\xi\rangle^\delta(T - t + \rho^{-1})^{1-(\kappa-1)/r}$ près de $t = T$ où $\rho = (\mu^2 + |\xi|^2)^{\delta'/2}$. En choisissant convenablement $\delta, \delta' > 0$, nous voyons que les arguments de [6] marchent bien avec ces fonctions de poids.

Rappelons quelques notations. $D_t = -i\partial_t$. $D_{x_j} = -i\partial_{x_j}$. On désigne par $\gamma^s_{loc}(\mathbb{R}^l)$ $(s > 1)$ l'ensemble de fonctions $g(x)$ indéfiniment dérivables telles que, pour tout compact K dans $\mathbb{R}^l$, il existe deux constantes positives A et C telles que

$$\sup_{x\in K} |D_x^\alpha g(x)| \leq AC^{|\alpha|}\alpha!^s$$

pour tout muliti-indice α. De plus on désigne par $C^\kappa([0,T],\gamma^s_{loc}(\mathbb{R}^l))$ ($s>1$ et $0<\kappa\le 1$) l'ensemble de fonctions $g(t,x)$ appartenant à $\gamma^s_{loc}(\mathbb{R}^l)$ pour tout $t\in[0,T]$ telles que, pour tout compact K dans $\mathbb{R}^l$, il existe deux constantes positives A et C telles que

$$|D_x^\alpha g(t_1,x)-D_x^\alpha g(t_2,x)|\le AC^{|\alpha|}\alpha!^s|t_2-t_1|^\kappa,\quad t_1,t_2\in[0,T]\quad x\in K$$

pour tout muliti-indice α. Pour $1<\kappa\le 2$, nous entendons que $g(t,x)\in C^\kappa([0,T],\gamma^s_{loc}(\mathbb{R}^l))$ si $g(t,x)$ est une fois continûment dérivable en t et si $g(t,x)\in C^1([0,T],\gamma^s_{loc}(\mathbb{R}^l))$ et $D_tg(t,x)\in C^{\kappa-1}([0,T],\gamma^s_{loc}(\mathbb{R}^l))$.

Dans la suite nous supposons que $1<\kappa\le 2$ et $r\ge 2$. On désigne la fin d'une note ou d'une preuve par $\Box$. Employons C sans ou avec un suffixe pour désigner une constante positive qui peut être différente ligne par ligne.

2 Construction de paramétrix Compte tenu de la vitesse finie de propagation, dans la suite nous supposons que les coefficients $a_{j,\nu}(t,x)$ de l'opérateur $P(t,x,D_t,D_x)$ ne dépendent pas des variables x quand $|x|\ge K$ avec une constante positive K.

Soit $1<s<\min\{1+\frac{\kappa}{r},\frac{r}{r-1}\}$. Posons $\delta=1/s$. Alors nous voyons que $(1-\delta)r/\kappa<\delta$ et $(1-\delta)(r-1)<\delta$. On défint la fonction

$$\Psi(t,\xi)=t+H\langle\xi\rangle^\delta(t+\rho^{-1})^{1-\frac{\kappa-1}{r}} \tag{2.1}$$

avec $\rho=(\mu^2+|\xi|^2)^{\delta'/2}$. Ici $H>0$, $\mu\ge 1$ sont constantes qui seront déterminées. On se sert de la notation $\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2}$. De plus δ' est une constante vérifiant $\max\{(1-\delta)r/\kappa,(1-\delta)(r-1)\}<\delta'<\delta$.

Notons que $\partial_t\Psi(t,\xi)>1$ et

$$\left|\frac{\partial_t\Psi(t,\xi)}{|\xi|}\right|^{-1}\le CH^{-1}(t+\rho^{-1})^{\frac{\kappa-1}{r}}\langle\xi\rangle^{(1-\delta)}.$$

Soit $t_0\in(0,T/4)$. Alors, quand $|\partial_t\Psi(t,\xi))|\le|\xi|$, $t_0\ge t\ge-\frac{1}{2\rho}$ et $3(t+\frac{1}{\rho})\ge\sigma\ge t+\frac{1}{\rho}$, il résulte de (1.4) que

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial_t\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta p_m(\sigma,x,\tau-i\partial_t\Psi(t,\xi),\xi)}{p_m(\sigma,x,\tau-i\partial_t\Psi(t,\xi),\xi)}\right|\\ &\qquad\le CH^{-\frac{r}{\kappa}}\langle\xi\rangle^{(1-\delta)\frac{r}{\kappa}}\big(\frac{\partial_t\Psi(t,\xi)}{|\xi|}\big)^{-|\alpha|}\big(\partial_t\Psi(t,\xi)\big)^{-|\beta|}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Les majorations ci-dessus impliquent qu'en se servant de $\Psi(t,\xi)$ définie par (2.1) comme une fonction de poids, on peut construire une paramétrix désirée.

Avant de définir des opérateurs comme paramétrix, nous remarquons quelques propriétés de $\Psi(t,\xi)$ définie par (2.1).

Quand $0\le t\le 2t_0$, on a

$$\Psi(t,\xi)\le t+H\langle\xi\rangle^\delta(2t_0+\mu^{-\delta'})^{1-\frac{\kappa-1}{r}},$$

$$|\Psi(t,\xi+\eta)-\Psi(t,\xi)|\le\begin{cases}3H|\eta|^\delta(t_0+\mu^{-\delta'})^{1-\frac{\kappa-1}{r}}, & |\eta|\ge\frac12\langle\xi\rangle\\ CH|\eta|\langle\xi\rangle^{\delta-1}\left(t+\rho^{-1}\right)^{1-\frac{\kappa-1}{r}}, & |\eta|\le\frac12\langle\xi\rangle,\end{cases} \tag{2.3}$$

et

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_t^{l+1}\Psi(t,\xi)|\le C\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}\rho^l|\partial_t\Psi(t,\xi)|,\quad -1/(2\rho)\le t\le 2t_0 \tag{2.4}$$

avec une constante C indépendant de t, ξ, H et de μ.

Note 2.1. Il résulte de $(t+\rho^{-1})^{-(\kappa-1)/r} \leq C\rho^{(\kappa-1)/r}$ pour $t \geq -1/(2\rho)$ que $|\partial_t \Psi(t,\xi)| \leq C\langle\xi\rangle^{\delta+\delta'(\kappa-1)/r}$ pour $t \geq -1/(2\rho)$. Comme $r/(\kappa-1) > \max\{r-1, r/\kappa\}$, nous pouvons choisir δ' telle que $\delta'(\kappa-1)/r < 1-\delta$, d'où l'on a, avec $\epsilon > 0$, $|\partial_t\Psi(t,\xi)| \leq C\langle\xi\rangle^{1-\epsilon}$ pour $t \geq -1/(2\rho)$. Dans la suite on le suppose. □

Soit $\chi(\sigma) \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi(\sigma) = 0$ pour $t \notin (-2,-1)$ et

$$\int \chi(\sigma)\, d\sigma = 1.$$

On va définir les symboles q_0 et q_1 par

$$q_0(t,x,\tau,\xi) = \int \frac{\rho\chi(\rho(t-\sigma))}{p_m(\sigma,x,\tau,\xi)}\, ds \tag{2.5}$$

pour $t \geq -\frac{1}{2\rho}$ et

$$q_1(t,x,\tau,\xi) = \int \frac{\rho\chi(\rho(\sigma-t))}{p_m(\sigma,x,\tau,\xi)}\, d\sigma$$

pour $t \leq T + \frac{1}{2\rho}$ respectivement.

Note 2.2. Si $t \geq -\frac{1}{2\rho}$ et $\chi(\rho(t-\sigma)) \neq 0$, alors on a $\sigma \geq \frac{1}{2\rho}$ et $3(t+\frac{1}{\rho}) \geq \sigma \geq t+\frac{1}{\rho}$. De même, si $t \leq T + \frac{1}{2\rho}$ et $\chi(\rho(\sigma-t)) \neq 0$, alors on a $\sigma \leq T - \frac{1}{2\rho}$ et $3(T-t+\frac{1}{\rho}) \geq T-\sigma \geq T-t+\frac{1}{\rho}$. □

En employant les symboles q_0 et q_1, nous définissons les opérateurs $Q_0(t,x,D_t,D_x)$ près de $t=0$ et $Q_1(t,x,D_t,D_x)$ près de $t=T$ comme paramétrix par

$$\begin{aligned} Q_0(t,x,D_t,D_x)f \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1+\frac{l}{2}}} \int_0^t dt_1 \iint e^{i(t-t_1)\tau + \Psi(t,\xi) - \Psi(t_1,\xi)) + ix\xi} \\ &\qquad q_0(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)\hat{f}(t_1,\xi)\, d\tau d\xi, \quad 0 \leq t \leq t_0 \end{aligned}$$

où $\Psi_t(t,\xi) = \partial_t\Psi(t,\xi)$, $t_0 \in (0,\frac{T}{4})$ et $\hat{f}(t,\xi)$ étant la transformée de Fourier en x de $f(t,x) \in C([0,t_0],\gamma^s(\mathbb{R}^l))$ à support compact, telle que $f(0,x) = 0$, définie par $\hat{f}(t,\xi) = (2\pi)^{-l/2}\int e^{-i\xi x} f(t,x)\, dx$ et par

$$\begin{aligned} Q_1(t,x,D_t,D_x)f = \frac{1}{(2\pi)^{1+\frac{l}{2}}} \int_{T-t_0}^t dt_1 \iint e^{i(t-t_1)\tau + \Psi_1(t,\xi) - \Psi_1(t_1,\xi)) + ix\xi} \\ q_0(t,x,\tau - i\Psi_{1,t}(t,\xi),\xi)\hat{f}(t_1,\xi)\, d\tau d\xi, \quad T-t_0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

où

$$\Psi_1(t,\xi) = -\Psi(T-t,\xi),$$

$\Psi_{1,t}(t,\xi) = \partial_t\Psi_1(t,\xi)$, $t_0 \in (0,\frac{T}{4})$ et $f(t,x) \in C([T-t_0,T],\gamma^s(\mathbb{R}^l))$ à support compact telle que $f(T-t_0,x) = 0$.

Dans la suite nous montrons que les calculs de [6] marchent aussi bien pour les opérateurs Q_0 et Q_1. Comme le raisonnement est pareil, on se limite à considérer la paramétrix Q_0.

L'hyperbolicité de p_m implique que le symbole $q_0(t,x,\tau,\xi)$ est holomorphe en τ dans $\mathbb{C}_- = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \Im\tau < 0\ \}$ et

$$|q_0(t,x,\tau,\xi)| \le C|\tau|^{-m}$$

pour $(t,x,\tau,\xi) \in \Omega \times \mathbb{C}_- \times \mathbb{R}^l$ tel que $|\tau| \ge D|\xi|$ avec certaine $D > 0$. Donc on voit que

$$Q_0(t,x,D_t,D_x)f = \tilde{Q}_0(t,x,D_t,D_x)\tilde{f}, \quad 0 \le t \le t_0 \tag{2.6}$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_0&(t,x,D_t,D_x)\tilde{f}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1+\frac{l}{2}}} \iiint e^{i(t-t_1)\tau+\Psi(t,\xi)-\Psi(t_1,\xi))+ix\xi}\\ &\qquad \chi_0(\rho t)\chi_1(t)q_0(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)\hat{\tilde{f}}(t_1,\xi)\,dt_1 d\tau d\xi,\end{aligned}$$

où $\chi_0(t)$ et $\chi_1(t)$ étant des fonctions C^∞ telles que $\chi_0(t) = 0$ $(t \le -1/2)$, $\chi_0(t) = 1$ $(t \ge -1/4)$, $\chi_1(t) = 0$ $(t \ge 2t_0)$, $\chi_1(t) = 1$ $(t \le t_0)$ et que $\tilde{f}(t,x) \in C(\mathbb{R},\gamma^s(\mathbb{R}^l))$ est un prolongement à support compact de $f(t,x)$ tel que $\tilde{f}(t,x) = 0$ pour $t \le 0$.

En opérant P à (2.6) de gauche, nous avons

$$P(t,x,D_t,D_x)Q_0(t,x,D_t,D_x)f = P(t,x,D_t,D_x)\tilde{Q}_0(t,x,D_t,D_x)\tilde{f} \tag{2.7}$$

sur $(0,t_0)$, supposant que l'opérateur $P(t,x,D_t,D_x)$ est prolongé à $-T < t < 0$ en posant $P(t,x,D_t,D_x) = P(-t,x,D_t,D_x)$ pour $-T < t < 0$.

Note 2.3. Les coefficients $a_{j,\nu}(t,x)$ de la partie principale $p_m(t,x,\tau,\xi)$ de l'opérateur prolongé $P(t,x,D_t,D_x)$ ne satisfont que la condition de Lipschitz par rapport à t en $t = 0$. Mais on a, si $\sigma > 0$,

$$\begin{aligned}p_m(t,x,\tau,\xi) - p_m(\sigma,x,\tau,\xi) &= p_m(|t|,x,\tau,\xi) - p_m(\sigma,x,\tau,\xi)\\ &= (|t|-\sigma)\partial_t p_m(\sigma,x,\tau,\xi)\\ + (|t|-\sigma)\int_0^1 &(\partial_t p_m(\sigma+\theta(|t|-\sigma),x,\tau,\xi) - \partial_t p_m(\sigma,x,\tau,\xi))\,d\theta,\end{aligned} \tag{2.8}$$

où le dernier terme de second membre est majoré par $C|t-\sigma|^\kappa(|\tau|+|\xi|)^{m-1}|\xi|$. □

Le second membre de (2.7) est égal à

$$f(t,x) + R\tilde{f}, \quad t \in [0,t_0]$$

où l'opérateur R est défini par

$$R\tilde{f} = \frac{1}{(2\pi)^{1+\frac{l}{2}}} \iiint e^{i(t-t_1)\tau+\Psi(t,\xi)-\Psi(t_1,\xi))+ix\xi} r(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)\hat{\tilde{f}}(t_1,\xi)\,dt_1 d\tau d\xi,$$

avec le symbole $r(t,x,\tau,\xi)$ donné par

$$\begin{aligned}r&(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)\\ &= \tilde{P}(t,x,\tau,\xi,D_t,D_x)\big(\chi_0(\rho t)\chi_1(t)q_0(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)\big)\\ &\qquad - \chi_0(\rho t)\chi_1(t)\end{aligned} \tag{2.9}$$

où

$$\tilde{P}(t,x,\tau,\xi,D_t,D_x) = e^{-it\tau-\Psi(t,\xi)-ix\xi}P(t,x,D_t,D_x)e^{it\tau+\Psi(t,\xi)+ix\xi}.$$

Donc

$$\tilde{P}(t,x,\tau,\xi,D_t,D_x) = \sum_{k+|\alpha|\le m}\frac{1}{k!\alpha!}P^{(k,\alpha)}(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)\sum_{0\le j\le k}C_{j,k}(t,\xi)D_t^jD_x^\alpha$$

où $P^{(k,\alpha)}(t,x,\tau,\xi) = \partial_\tau^k\partial_\xi^\alpha P(t,x,\tau,\xi)$ et $C_{j,k}(t,\xi)$ est donné par

$$C_{j,k}(t,\xi) = \frac{k!}{(k-j)!j!}D_s^{k-j}\exp(\Psi(t+s,\xi)-\Psi(t,\xi)-s\Psi_t(t,\xi))|_{s=0}$$

(voir par exemple (6.12) de [3]). Alors, on obtient

$$C_{k,k}(t,\xi) = 1,\quad C_{k-1,k}(t,\xi) = 0 \tag{2.10}$$

et

$$\begin{aligned}|\partial_\xi^\beta C_{j,k}(t,\xi)|&\\ &\le C|\Psi_t(t,\xi)|\rho^{-1}(1+|\Psi_t(t,\xi)|\rho^{-1})^{\frac{k-j}{2}-1}\langle\xi\rangle^{-|\beta|}\rho^{k-j},\ 0\le j<k-1,\end{aligned} \tag{2.11}$$

qui découle de (2.4).

Or on peut réécrire (2.9)

$$\begin{aligned}r(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)&\\ &= \sum_{0\le j\le k\le m,\ |\alpha|\le m}\frac{1}{k!\alpha!}P^{(k,\alpha)}(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)\\ &\quad C_{j,k}(t,\xi)D_t^jD_x^\alpha\big(\chi_0(\rho t)\chi_1(t)q_0(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)\big)\\ &\qquad -\chi_0(\rho t)\chi_1(t).\end{aligned}$$

D'abord, on considère la partie principale de $r(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)$. Vu (2.8), si $2t_0\ge t\ge-\frac{1}{2\rho}$, alors on aura

$$\begin{aligned}p_m(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)q_0(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)&\\ &= \int\frac{\rho\chi(\rho(t-\sigma))p_m(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)}{p_m(\sigma,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)}\,d\sigma\\ &= 1+q_{0,1}(t,x,\tau,\xi)+q_{0,2}(t,x,\tau,\xi)\end{aligned}$$

où l'on a mis

$$q_{0,1}(t,x,\tau,\xi) = \int\rho(|t|-\sigma)\chi(\rho(t-\sigma))\frac{\partial_t p_m(\sigma,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)}{p_m(\sigma,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)}\,d\sigma$$

et

$$\begin{aligned}q_{0,2}(t,x,\tau,\xi) = \int_0^1 d\theta\int\rho(|t|-\sigma)\chi(\rho(t-\sigma))\times&\\ \frac{\partial_t p_m(\sigma+\theta(|t|-\sigma),x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)-\partial_t p_m(\sigma,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)}{p_m(\sigma,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)}&\,d\sigma.\end{aligned}$$

Comme le polynôme $p_m(t,x,\tau,\xi)$ n'a que des racines réelles dont la multiplicité est au plus r, on a

$$|p_m(t,x,\tau,\xi)| \geq C|\Im\tau|^r(|\Im\tau|+|\xi|)^{m-r}, \quad (t,x,\tau,\xi) \in \Omega\times\mathbb{C}\times\mathbb{R}^l, \tag{2.12}$$

d'où l'on obtient $|p_m(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)| \geq C\Psi_t(t,\xi)^r\langle\xi\rangle^{m-r}$ dans $\Omega\times\mathbb{R}^{l+1}$ quand $\Psi_t(t,\xi) \leq |\xi|$. D'autre part, compte tenu de la minoration:

$$|p_m(t,x,\tau,\xi)| \geq C(|\tau|+|\xi|)^m, \tag{2.13}$$

pour $(t,x,\tau,\xi) \in \Omega\times\mathbb{C}\times\mathbb{R}^l$ tel que $|\Re\tau| \geq D|\xi|$ avec $D > 0$, on a $|p_m(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)| \geq C(|\tau|+\Psi_t(t,\xi)+|\xi|)^m$ dans $\Omega\times\mathbb{R}^{l+1}$ quand $|\tau| \geq D|\xi|$ ou $\Psi_t(t,\xi) \geq |\xi|/2$. Donc, vu (2.2), on obtient

$$|q_{0,1}(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)| \leq \begin{cases} C_H\,\rho^{-1}\langle\xi\rangle^{(1-\delta)^{r/\kappa}}, & |\tau| \leq 2D|\xi| \text{ et } \Psi_t(t,\xi) \leq |\xi| \\ C\rho^{-1}\frac{|\xi|}{|\tau|+\Psi_t(t,\xi)+|\xi|}, & |\tau| \geq D|\xi| \text{ ou } \Psi_t(t,\xi) \geq |\xi|/2. \end{cases}$$

De même, vu la note 2.3 et (2.12), on a

$$|q_{0,2}(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)| \leq \begin{cases} C\rho^{-\kappa}\left(\frac{|\xi|}{\Psi_t(t,\xi)}\right)^r, & |\tau| \leq 2D|\xi| \text{ et } \Psi_t(t,\xi) \leq |\xi| \\ C\rho^{-\kappa}\frac{|\xi|}{|\tau|+\Psi_t(t,\xi)+|\xi|}, & |\tau| \geq D|\xi| \text{ ou } \Psi_t(t,\xi) \geq |\xi|/2. \end{cases}$$

Note 2.4. Notons que $\rho^{-1} \leq \langle\xi\rangle^{-\delta'}$, $|\xi|/\Psi_t(t,\xi) \leq C\langle\xi\rangle^{1-\delta}/H$ et $\delta' > (1-\delta)r/\kappa$. Donc on a $|q_{0,1}|+|q_{0,2}| \leq C\langle\xi\rangle^{-\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$. $\square$

Soit $p_r(t,x,\tau,\xi)$ le symbole d'ordre inférieur à m de P:

$$p_r(t,x,\tau,\xi) = \sum_{j+|\nu|<m} a_{j,\nu}(t,x)\tau^j\xi^\alpha.$$

Nous voyons que le symbole r défini par (2.9) est la combinaison linéaire de produits de termes suivants:
$p_m^{(k,\alpha)}(t,x,\tilde\tau,\xi)/p_m^{(k,0)}(t,x,\tilde\tau,\xi)$ ou bien $p_r^{(k,\alpha)}(t,x,\tilde\tau,\xi)/p_m^{(k,0)}(t,x,\tilde\tau,\xi)$,
$p_m^{(k,0)}(t,x,\tilde\tau,\xi)/p_m(t,x,\tilde\tau,\xi)$,
$C_{j,k}(t,\xi)D_t^{j-h}\big(\chi_0(\rho t)\chi_1(t)\big)$
et $p_m(t,x,\tilde\tau,\xi)\partial_t^h\partial_x^\alpha\Big(q_0(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)\Big)$ où $0 \leq h \leq j \leq k$ et $k+|\alpha| \leq m$. Ici on a posé $\tilde\tau = \tau - i\Psi_t(t,\xi)$. Comme

$$\partial_t^j\Big(p_m(\sigma,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)\Big) = \sum_{k=1}^{j} D_{j,k}(t,\xi)\partial_\tau^k p_m(\sigma,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)$$

où $D_{j,k}(t,\xi)$ remplit

$$|\partial_\xi^\alpha D_{j,k}(t,\xi)| \leq C\rho^j\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}\Psi_t(t,\xi)^k \tag{2.14}$$

qui résulte de (2.4), vu la définition (2.5) de q_0 et (2.8) nous voyons que, pour majorer le terme $p_m(t,x,\tilde\tau,\xi)\partial_t^h\partial_x^\alpha\Big(q_0(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)\Big)$, il suffit de considérer les termes suivants:
$\partial_t p_m(\sigma,x,\tilde\tau,\xi)/p_m(\sigma,x,\tilde\tau,\xi)$, $\tilde p_m(\sigma,t,x,\tilde\tau,\xi)/p_m(\sigma,x,\tilde\tau,\xi)$,
$\partial_\tau^k\partial_x^\alpha p_m(\sigma,x,\tilde\tau,\xi)/\partial_\tau^k p_m(\sigma,x,\tilde\tau,\xi)$ et $\partial_\tau^k p_m(\sigma,x,\tilde\tau,\xi)/p_m(\sigma,x,\tilde\tau,\xi)$. Ici $\tilde p_m(\sigma,t,x,\tilde\tau,\xi)$ est $\int_0^1\Big((\partial_t p_m)(\sigma+(|t|-\sigma)\theta,x,\tilde\tau,\xi) - (\partial_t p_m)(\sigma,x,\tilde\tau,\xi)\Big)\,d\theta$.

Les évaluations de ces termes et leur dérivées sont obtenues par les calculs analogue à ceux de [6]. Alors on se contenterait de donner les calculs dans leur grandes lignes. D'abord on remarque qu'il résulte de l'hyperbolicité de p_m et de (2.13) que

$$\left|\frac{\partial_\tau^k p_m(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)}{p_m(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)}\right| \le \begin{cases} C\Psi_t(t,\xi)^{-k}, & |\tau|\le D|\xi| \\ C(|\tau|+|\xi|+\Psi_t(t,\xi))^{-k}, & |\tau|\ge D|\xi|. \end{cases} \tag{2.15}$$

Comme pour $m > k \ge 0$, $\partial_\tau^k p_m(t,x,\tau,\xi)$ est un polynôme hyperbolique en τ qui n'a que des racines à la multiplicité au plus $\max\{r-k,1\}$, on a

$$|\partial_\tau^k p_m(t,x,\tau,\xi)| \ge C|\Im\tau|^{\max\{r-k,1\}}(|\Im\tau|+|\xi|)^{m-k-\max\{r-k,1\}}, \quad (t,x,\tau,\xi)\in\Omega\times\mathbb{C}\times\mathbb{R}^l. \tag{2.16}$$

D'autre part, si $m \ge k \ge 0$, nous avons

$$|\partial_\tau^k p_m(t,x,\tau,\xi)| \ge C(|\tau|+|\xi|)^{m-k}, \quad |\Re\tau|\ge D|\xi|, \quad (t,x,\tau,\xi)\in\Omega\times\mathbb{C}\times\mathbb{R}^l \tag{2.17}$$

avec $D > 0$.

Notons les coefficients $a_{j,\nu}(t,x) \in C^\kappa([0,T],\gamma^s_{loc}(\mathbb{R}^l))$ pour $j+|\nu| = m$ et $a_{j,\nu}(t,x) \in C^0([0,T],\gamma^s_{loc}(\mathbb{R}^l))$ pour $j+|\nu| < m$ et qu'ils ne dépendent pas de x quand $|x| > K$. Vu (2.16) et (2.17), nous avons les majorations; pour $(t,x,\tau,\xi) \in \Omega\times\mathbb{R}^{1+l}$, $j = 0,1$ et pour tous $k \ge 0$, α et β,

$$\left|\frac{\partial_x^\alpha(\partial_t^j {p_m}^{(k,\beta)})(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)}{p_m^{(k,0)}(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)}\right| \le \begin{cases} C_0C_1^{|\alpha|}\alpha!^s\left(\frac{|\xi|}{\Psi_t(t,\xi)}\right)^{\max\{r-k,1\}}|\xi|^{-|\beta|}, & |\tau|\le 2D|\xi| \text{ et } \Psi_t(t,\xi)\le|\xi| \\ C_0C_1^{|\alpha|}\alpha!^s(|\tau|+\Psi_t(t,\xi)+|\xi|)^{-|\beta|}, & |\tau|\ge D|\xi| \text{ ou } \Psi_t(t,\xi)\ge|\xi|/2. \end{cases} \tag{2.18}$$

et

$$\left|\frac{\partial_x^\alpha {p_r}^{(k,\beta)}(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)}{{p_m}^{(k,0)}(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)}\right| \le \begin{cases} C_0C_1^{|\alpha|}\alpha!^s\left(\frac{|\xi|}{\Psi_t(t,\xi)}\right)^{\max\{r-k,1\}}|\xi|^{-1-|\beta|}, & |\tau|\le 2D|\xi| \text{ et } \Psi_t(t,\xi)\le|\xi| \\ C_0C_1^{|\alpha|}\alpha!^s(|\tau|+\Psi_t(t,\xi)+|\xi|)^{-|\beta|-1}, & |\tau|\ge D|\xi| \text{ ou } \Psi_t(t,\xi)\ge|\xi|/2. \end{cases} \tag{2.19}$$

où la constante C_0 ne dépend pas de α et C_1 ne dépend que des coefficients de P. Dans la suite les constantes C_0 et C_1 ont la même dépendance. Comme $|\xi|/\Psi_t(t,\xi) \le C\langle\xi\rangle^{1-\delta}$, $\delta' > (r-1)(1-\delta)$, et $\delta > 1-1/r$, les majorations ci-dessus impliquent que, quand $|\tau| \le 2D|\xi|$ et $\Psi_t(t,\xi) \le |\xi|$, nous avons avec $\varepsilon > 0$

$$\left|\frac{\partial_x^\alpha(\partial_t p_m^{(k,\beta)})(\sigma,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)}{p_m^{(k,0)}(\sigma,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)}\right| \le C_0C_1^{|\alpha|}\alpha!^s\rho|\xi|^{-\varepsilon-|\beta|}, \quad k\ge 1 \tag{2.20}$$

et

$$\left|\frac{\partial_x^\alpha p_r^{(k,\beta)}(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)}{{p_m}^{(k,0)}(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)}\right| \le C_0C_1^{|\alpha|}\alpha!^s|\xi|^{-\varepsilon-|\beta|}, \quad k\ge 0. \tag{2.21}$$

De même, vu $(1-\delta)r < \kappa\delta'$ et (2.16), on obtient

$$\left|\frac{\partial_x^\alpha \tilde{p}_m^{(k,\beta)}(\sigma,t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)}{p_m^{(k,0)}(\sigma,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)}\right| \le C_0 C_1^{|\alpha|}\alpha!^s |t-\sigma|^{\kappa-1}\rho^\kappa|\xi|^{-\varepsilon-|\beta|} \tag{2.22}$$

où $k \ge 0$ et $\varepsilon > 0$. D'après Bronshtein [2] (voir aussi Wakabayashi [8] ou Cor. 1.2 de Tarama [7]), nous avons

$$\left|\frac{\partial_x^\alpha p_m^{(k,\beta)}(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)}{p_m^{(k,0)}(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)}\right| \le C\big(\frac{\Psi_t(t,\xi)}{|\xi|}\big)^{-|\alpha|}\Psi_t(t,\xi)^{-|\beta|} \tag{2.23}$$

quand $m \ge k \ge 0$, $0 < \Psi_t(t,\xi) \le |\xi|$, $|\alpha| + |\beta| \le r-k$ et $(t,x,\tau,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^{1+l}$. Donc vu (2.18) avec $j = 0$ et (2.23) on a

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial_x^\alpha p_m^{(k,\beta)}(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)}{p_m{}^{(k,0)}(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)}\right| \\ &\qquad \le C_0 C_1^{|\alpha|}\Psi_t(t,\xi)^{-|\beta|}|\alpha|!^s \sum_{j=0}^{\min\{r-k,|\alpha|\}} j!^{1-s}\big(\frac{\Psi_t(t,\xi)}{|\xi|}\big)^{-j}\end{aligned} \tag{2.24}$$

quand $m \ge k \ge 0$, $0 < \Psi_t(t,\xi) \le |\xi|$ et $(t,x,\tau,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^{1+l}$.

De même, vu (2.2) et (2.18) avec $j = 1$ et $k = 0$, on a

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial_x^\alpha(\partial_t p_m^{(0,\beta)})(\sigma,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)}{p_m(\sigma,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)}\right| \\ &\qquad \le C_0 C_1^{|\alpha|}\langle\xi\rangle^{(1-\delta)r/\kappa}\langle\xi\rangle^{(1-\delta)r/\kappa}\Psi_t(t,\xi)^{-|\beta|}|\alpha|!^s \sum_{j=0}^{\min\{r,|\alpha|\}} j!^{1-s}\big(\frac{\Psi_t(t,\xi)}{|\xi|}\big)^{-j}\end{aligned} \tag{2.25}$$

quand $0 < \Psi_t(t,\xi) \le |\xi|$, $\sigma > \rho^{-1}/2$, $3(t+\rho^{-1}) > \sigma > (t+\rho^{-1})$ et $(\tau,x,\xi) \in \mathbb{R}^{1+2l}$. Donc, vu (2.20),(2.21), (2.15), (2.23) et (2.14), on voit que $p_m(t,x,\tilde{\tau},\xi)D_t^h D_x^\alpha q_0(t,x,\tilde{\tau},\xi)$ est majoré par $C\rho^h\Psi_t(t,\xi)^{|\alpha|}$, d'où, vu (2.15),(2.23) (2.11) on voit que, quand $|\tau| \le 2D|\xi|$ et $\Psi_t(t,\xi) \le |\xi|$, la majoration du produit des termes:
$p_m^{(k,\alpha)}(t,x,\tilde{\tau},\xi)/p_m^{(k,0)}(t,x,\tilde{\tau},\xi)$, $p_m^{(k,0)}(t,x,\tilde{\tau},\xi)/p_m(t,x,\tilde{\tau},\xi)$, $C_{j,k}(t,\xi)D_t^{j-h}\big(\chi_0(\rho t)\chi_1(t)\big)$ et $p_m(t,x,\tilde{\tau},\xi)\partial_t^h\partial_x^\alpha\Big(q_0(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)\Big)$ où $0 \le h \le j \le k$ et $0 < k + |\alpha| \le m$ est donnée par

$$C(|\xi|/\Psi_t(t,\xi)^2)^{|\alpha|})(\rho/\Psi_t(t,\xi))^{-k+(k-j)/2}. \tag{2.26}$$

Comme $|\xi|/\Psi_t(t,\xi)^2 \le \langle\xi\rangle^{1-2\delta}$, $\rho/\Psi_t(t,\xi) \le C\langle\xi\rangle^{\delta'-\delta}$ et $k + |\alpha| > 0$, compte tenu de $\delta = 1/s > 1/2$ vu $r \ge 2$ et de $\delta > \delta'$, on voit que le dernier terme (2.26) est majoré par $C\langle\xi\rangle^{-\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$.

De même, vu (2.19), (2.15) et (2.11), le produit des termes:
$p_r^{(k,\alpha)}(t,x,\tilde{\tau},\xi)/p_m^{(k,0)}(t,x,\tilde{\tau},\xi)$, $p_m^{(k,0)}(t,x,\tilde{\tau},\xi)/p_m(t,x,\tilde{\tau},\xi)$, $C_{j,k}(t,\xi)D_t^{j-h}\big(\chi_0(\rho t)\chi_1(t)\big)$et $p_m(t,x,\tilde{\tau},\xi)\partial_t^h\partial_x^\alpha\Big(q_0(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)\Big)$ où $0 \le h \le j \le k$ et $0 \le k + |\alpha| \le m$ est majoré par $C\langle\xi\rangle^{-\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$.

Donc on obtient $|r(t,x,\tilde{\tau},\xi)| \le C\langle\xi\rangle^{-\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$.

Pour obtenir les majorations des dérivées de $r(t,x,\tilde\tau,\xi)$, notons que pour n'importe quel symbole $q(t,x,\tau,\xi)$, on a

$$\partial_\xi^\alpha\big(q(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)\big)=\sum_{\beta\le\alpha,|\beta|+k\le|\alpha|}D_{\alpha,\beta,k}(t,\xi)(\partial_\tau^k\partial_\xi^\beta q)(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi) \tag{2.27}$$

où l'on a, vu (2.4),

$$|D_{\alpha,\beta,k}(t,\xi)|\le C\Psi_t(t,\xi)^k\langle\xi\rangle^{-|\alpha|+|\beta|}. \tag{2.28}$$

D'autre part, d'après Prop. 4 de Bronshtein [1] (voir aussi la note 3.1 de l'Appendice); vu (2.18) et (2.23) on a

$$\begin{aligned}&|\partial_\tau^k p_m(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)\partial_x^\alpha\frac{1}{\partial_\tau^k p_m(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)}|\\&\quad\le\begin{cases}C_oC_1^{|\alpha|}|\alpha|!^s\sum_{j=0}^{|\alpha|}|\xi|^l\Psi_t(t,\xi)^{-j}j!^{1-s}, & |\tau|\le 2D|\xi| \text{ et } \Psi_t(t,\xi)\le|\xi|\\ C_oC_1^{|\alpha|}|\alpha|!^s, & |\tau|\ge D|\xi| \text{ ou } \Psi_t(t,\xi)\ge|\xi|/2.\end{cases}\end{aligned} \tag{2.29}$$

Donc vu les majorations ci-dessus et Lemme 3.1 donné à l'Appendice, nous avons les majorations avec $\varepsilon>0$; quand $t\in[-1/(2\rho),2t_0]$,

$$\begin{aligned}&|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta r(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)|\\&\le\begin{cases}C_0\langle\xi\rangle^{-\varepsilon-\delta|\beta|}C_1^{|\alpha|}|\alpha|!^s\sum_{j=0}^{|\alpha|}(|\xi|/|\Psi_t(t,\xi))^j j!^{1-s}, & |\tau|\le 2D|\xi| \text{ et } \Psi_t(t,\xi)\le|\xi|\\ C_0\langle\xi\rangle^{-\varepsilon-|\beta|}\frac{C_1^{|\alpha|}|\alpha|!^s\langle\xi\rangle}{|\tau|+\Psi_t(t,\xi)+|\xi|}, & |\tau|\ge D|\xi| \text{ ou } \Psi_t(t,\xi)\ge|\xi|/2.\end{cases}\end{aligned}$$

Pour obtenir les majorations de $\partial_\tau r$, nous remarquons que pour n'importe quel symbole q, on a

$$\begin{aligned}&\partial_\tau\frac{q(t,x,\tilde\tau,\xi)}{p_m^{(k,0)}(t,x,\tilde\tau,\xi)}\\&\qquad=\frac{\partial_\tau q(t,x,\tilde\tau,\xi)}{p_m^{(k+1,0)}(t,x,\tilde\tau,\xi)}\frac{p_m^{(k+1,0)}(t,x,\tilde\tau,\xi)}{p_m^{(k,0)}(t,x,\tilde\tau,\xi)}-\frac{q(t,x,\tilde\tau,\xi)}{p_m^{(k,0)}(t,x,\tilde\tau,\xi)}\frac{p_m^{(k+1,0)}(t,x,\tilde\tau,\xi)}{p_m^{(k,0)}(t,x,\tilde\tau,\xi)}\end{aligned}$$

et que, pour $t,\sigma\ge0$ tels que $|\sigma-t|\le C\rho^{-1}$, on a

$$\left|\frac{p_m^{(k+1,0)}(\sigma,x,\tilde\tau,\xi)}{p_m^{(k,0)}(\sigma,x,\tilde\tau,\xi)}\right|\le C\left|\frac{p_m^{(k+1,0)}(t,x,\tilde\tau,\xi)}{p_m^{(k,0)}(t,x,\tilde\tau,\xi)}\right|. \tag{2.30}$$

En effet l'inégalité dernière vient des majorations suivantes:
$|p_m^{(k,0)}(t_1,x,\tilde\tau,\xi)/p_m^{(k,0)}(t_2,x,\tilde\tau,\xi)|\le C$ pour $t_1,t_2\ge0$ tels que $|t_1-t_2|\le C\rho^{-1}$. On obtient ces majorations au cas de $k=0$ vu (2.8), (2.2) et (2.12) par les majorations pareilles à celles de $q_{0,1}$ et $q_{0,2}$. Au cas de $k\ge1$, elles découlent de (2.16) et (2.20).

Donc nous voyons que quand $t\in[0,t_0]$, $|\tau|\le 2D|\xi|$ et $\Psi_t(t,\xi)\le|\xi|$, on peut majorer $|\partial_\tau\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta r(t,x,\tau-i\Psi_t(t,\xi),\xi)|$ par

$$C_0\sum_{k=0}^{m-1}\frac{|p_m^{(k+1,0)}(t,x,\tilde\tau,\xi)|}{|p_m^{(k,0)}(t,x,\tilde\tau,\xi)|}\langle\xi\rangle^{-\varepsilon-\delta|\beta|}C_1^{|\alpha|}|\alpha|!^s\sum_{j=0}^{|\alpha|}(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^j j!^{1-s}. \tag{2.31}$$

Nous avons aussi

$$|\partial_\tau \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)| \le C_0\langle\xi\rangle^{-\varepsilon-|\beta|} \frac{C_1^{|\alpha|}|\alpha|!^s\langle\xi\rangle}{(|\tau| + \Psi_t(t,\xi) + |\xi|)^2} \tag{2.32}$$

quand $|\tau| \ge D|\xi|$ ou $\Psi_t(t,\xi) \ge |\xi|/2$. Vu (2.32), nous voyons que, pour $0 < \varepsilon_0 < 1$, $|\tau|^{\varepsilon_0}\partial_\tau r(t,x,\tilde{\tau},\xi)$ est intégrable en τ.

Comme

$$R\tilde{f} = \lim_{\omega\downarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{1+\frac{l}{2}}} \iiint e^{i(t-t_1)\tau + \omega(i(\tau-i))^{1/2} + \Psi(t,\xi) - \Psi(t_1,\xi)) + ix\xi} r(t,x,\tilde{\tau},\xi)\hat{\tilde{f}}(t_1,\xi)\,dt_1 d\tau d\xi$$

et on a pour $0 \le t \le t_0$

$$\begin{aligned}\iint & e^{i(t-t_1)\tau + \omega(i(\tau-i))^{1/2} + \Psi(t,\xi) - \Psi(t_1,\xi)) + ix\xi} r(t,x,\tilde{\tau},\xi)\hat{\tilde{f}}(t_1,\xi)\,dt_1 d\tau \\ &= \int_0^t dt_1 \int e^{i(t-t_1)\tau + \omega(i(\tau-i))^{1/2} + \Psi(t,\xi) - \Psi(t_1,\xi)) + ix\xi} r(t,x,\tilde{\tau},\xi)\hat{f}(t_1,\xi)\,d\tau,\end{aligned} \tag{2.33}$$

par l'intégration par parties nous avons

$$R\tilde{f} = \int_0^t R(t,t_1)f(t_1,\cdot)\,dt_1, \quad t \in [0,t_0]$$

où

$$R(t,t_1)g(\cdot) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{l}{2}}} \int e^{ix\xi + \Psi(t,\xi) - \Psi(t_1,\xi)} r_0(t,t_1,x,\xi)\hat{g}(\xi)\,d\xi$$

avec

$$r_0(t,t_1,x,\xi) = \frac{i}{2\pi(t-t_1)} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\tau(t-t_1)} - 1)\partial_\tau r(t,x,\tau - i\Psi_t(t,\xi),\xi)\,d\tau.$$

Comme l'hyperbolicité implque que $P_m^{(k+1,0)}(t,x,\tau,\xi)/P_m^{(k,0)}(t,x,\tau,\xi)$ s'écrit sous la forme: $\sum_{j=1}^{m-k} 1/(\tau - \lambda_{k,j}(t,x,\xi))$ avec $\lambda_{k,j}(t,x,\xi) \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda_{k,j}(t,x,\xi)| \le C|\xi|$, il résulte de (2.31), de (2.32) et de l'inégalité $|e^{is} - 1| \le 2|s|^{\varepsilon_0}$ pour $0 < \varepsilon_0 < 1$ que, en prenant $\varepsilon_0 \in (0,1)$ tel que $\varepsilon_0 < \varepsilon$, nous avons pour $t, t_1 \in [0,t_0]$ tels que $t > t_1$,

$$\begin{aligned}&|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r_0(t,t_1,x,\xi)| \\ &\le \begin{cases} C_0(t-t_1)^{\varepsilon_0-1}\langle\xi\rangle^{-\delta|\beta|}C_1^{|\alpha|}|\alpha|!^s \sum_{j=0}^{|\alpha|}(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^j j!^{1-s}, & \Psi_t(t,\xi) \le |\xi| \\ C_0(t-t_1)^{\varepsilon_0-1}\langle\xi\rangle^{-|\beta|}C_1^{|\alpha|}|\alpha|!^s, & \Psi_t(t,\xi) \ge |\xi|/2. \end{cases}\end{aligned} \tag{2.34}$$

Ces majorations impliquent la suivante:

Proposition 2.1. *Il existe des constantes positives h_0, c_0 μ et $t_0 \in (0,T/4]$ telles que l'on ait, pour tout $h \in (0,h_0)$, en prenant $H = c_0 h$,*

$$\|e^{h\langle D_x\rangle^\delta - \Psi(t,D_x)} R(t,t_1)g(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^l)} \le C(t-t_1)^{\varepsilon_0-1}\|e^{h\langle D_x\rangle^\delta - \Psi(t_1,D_x)} g(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^l)}, \quad 0 \le t_1 < t \le t_0.$$

Pour $h \in (0,h_0)$ et $H = c_0 h$, on a aussi $h\langle\xi\rangle^\delta - \Psi(t,\xi) \ge h\langle\xi\rangle^\delta/2$ pour $0 \le t \le t_0$.

Preuve. On n'a qu'à montrer que le symbole $r_1(t,t_1,x,\xi)$ défini par

$$r_1(t,t_1,x,\xi)=\int e^{-iy\eta+h\langle\xi+\eta\rangle^\delta-\Psi(t,\xi+\eta)-h\langle\xi\rangle^\delta+\Psi(t,\xi)}r_0(t,t_1,x+y,\xi)\,dyd\eta \tag{2.35}$$

remplit,

$$|\partial_\xi^\beta\partial_x^{\alpha_0}r_1(t,t_1,x,\xi)|\le C(t-t_1)^{\varepsilon_0-1}\langle\xi\rangle^{-\delta|\beta|+(1-\delta)|\alpha_0|}. \tag{2.36}$$

Soit $\Phi(t,\xi,\eta)=h\langle\xi+\eta\rangle^\delta-\Psi(t,\xi+\eta)-h\langle\xi\rangle^\delta+\Psi(t,\xi)$. Vu (2.3), on a

$$|\Phi(t,\xi,\eta)|\le\begin{cases}3|\eta|^\delta(h+H(t_0+\mu^{-\delta'})^{1-\frac{\kappa-1}{r}}), & |\eta|\ge\frac12\langle\xi\rangle\\ C|\eta|\langle\xi\rangle^{\delta-1}(h+H\left(t_0+\mu^{-\delta'}\right)^{1-\frac{\kappa-1}{r}}), & |\eta|\le\frac12\langle\xi\rangle,\end{cases} \tag{2.37}$$

Quand $|\beta|>0$, vu (2.1), on a

$$\left|\partial_\xi^\beta\Phi(t,\xi,\eta)\right|\le\begin{cases}C\langle\xi\rangle^{\delta-|\beta|-1}\langle\eta\rangle^{1+|\beta|-\delta}|\eta|, & |\eta|\ge\frac12\langle\xi\rangle\\ C|\eta|\langle\xi\rangle^{\delta-1-|\beta|}, & |\eta|\le\frac12\langle\xi\rangle,\end{cases} \tag{2.38}$$

et

$$|\partial_\eta^\beta\partial_\xi^{\beta'}\Phi(t,\xi,\eta)|\le C\langle\xi+\eta\rangle^{\delta-|\beta|-|\beta'|}. \tag{2.39}$$

D'abord nous allons établir les majorations au cas où $|\xi|/\Psi_t(t,\xi)\ge1$.

Note 2.5. Si $A\ge1$, $C_1^{|\alpha+\alpha_0|}|\alpha+\alpha_0|!^s\sum_{j=0}^{|\alpha+\alpha_0|}A^jj!^{1-s}$ est majoré par

$$C_0A^{|\alpha_0|}|\alpha|!^s(2^sC_1)^{|\alpha|}\sum_{j=0}^{|\alpha|}A^jj!^{1-s}$$

où la constante C_0 ne dépend pas de α. □

Note 2.6. Pour des entiers k et j tels que $k>j>0$, vu $1/j!\le2^k(k-j)!/k!$, on a, par l'inégalité de Young, $A^j/j!^{s-1}\le(2^k/k!)^{s-1}((k/j)A^k+(k/(k-j)(k-j)!^{(s-1)k/(k-j)}$ pour $A>0$. Donc vu le formule de Stiring, on a pour $A>0$

$$k!^s\sum_{j=0}^kA^j/j!^{s-1}\le C^k(k!^s+A^kk!) \tag{2.40}$$

avec une constante C qui ne dépend ni de k ni de A. Nous voyons que la somme $|\alpha|!^s(\sum_{l=0}^{|\alpha|}(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^ll!^{1-s}$ est équvalent à $|\alpha|!^s+(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^{|\alpha|}|\alpha|!$ à une constante $C^{|\alpha|}$ près. □

Quand $|\xi|/\Psi_t(t,\xi)\ge1$, d'après les notes 2.5 et 2.6 et (2.34), on a

$$\begin{aligned}&|\partial_x^{\alpha+\alpha_0}\partial_\xi^\beta r_0(t,t_1,x,\xi)|\\&\qquad\le C_0(t-t_1)^{\varepsilon_0-1}\langle\xi\rangle^{-\delta|\beta|+(1-\delta)|\alpha_0|}C_1^{|\alpha|}(|\alpha|!^s+(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^{|\alpha|}|\alpha|!).\end{aligned} \tag{2.41}$$

Soit $\chi_2(\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^l)$ remplissant $\chi_2(\xi)=1$ pour $|\xi|\le1$ et $\chi_2(\xi)=0$ pour $|\xi|\ge2$. Considérons d'abord l'intégrale I_1

$$I_1=\int e^{-iy\eta+\Phi(t,\xi,\eta)}\chi_2(4\eta/\langle\xi\rangle)r_0(t,t_1,x+y,\xi)\,dyd\eta. \tag{2.42}$$

Par l'intégration par parties, on voit que

$$I_1 = \int e^{-iy\eta+\Phi(t,\xi,\eta)}(1+(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^2|y|^2)^{-n} r_{0,1}(t,t_1,x+y,\xi,\eta)\,dyd\eta \tag{2.43}$$

où $r_{0,1}(t,t_1,x+y,\xi,\eta)$ est défini par

$$e^{-\Phi(t,\xi,\eta)}(1-(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^2\Delta_\eta)^n \Big(e^{\Phi(t,\xi,\eta)} \\ \chi_2(4\eta/\langle\xi\rangle) r_{0,1}(t,t_1,x+y,\xi,\eta)\Big)\,dyd\eta. \tag{2.44}$$

Comme $r_{0,1}=0$ si $|\eta|\geq\langle\xi\rangle/2$, vu (2.39) et (2.41), on a

$$|\partial_y^\alpha\partial_x^{\alpha_0}\partial_\xi^\beta r_{0,1}| \leq \\ C_0(t-t_1)^{\varepsilon_0-1}\langle\xi\rangle^{-\delta|\beta|+(1-\delta)|\alpha_0|}C_1^{|\alpha|}(|\alpha|!^s+(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^{|\alpha|}|\alpha|!). \tag{2.45}$$

Puisque $(1+(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^2|y|^2)^{-n}$ est analytique en y, on voit que le terme $|\partial_y^\alpha\partial_x^{\alpha_0}\partial_\xi^\beta\big((1+(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^2|y|^2)^{-n}r_{0,1}\big)|$ est majoré par

$$C_0(t-t_1)^{\varepsilon_0-1}(1+(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^2|y|^2)^{-n} \\ \langle\xi\rangle^{-\delta|\beta|+(1-\delta)|\alpha_0|}C_1^{|\alpha|}(|\alpha|!^s+(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^{|\alpha|}|\alpha|!). \tag{2.46}$$

Note 2.7. Dans la suite nous obtiendrons les majorations par l'intégration par parties. Comme pour tout $\eta\in\mathbb{R}^l$ tel que $\eta\neq 0$, il existe un élément η_j de η tel que $l|\eta_j|\geq|\eta|$, en tenant compte de $|\eta|^k\int e^{-iy\eta}f(y,\eta)\,dy=(|\eta|/\eta_j)^k\int e^{-iy\eta}(-i\partial_{y_j})^k f(y,\eta)\,dy$, on a l'inégalité: $|\int e^{-iy\eta}f(y,\eta)\,dy|\leq\int l^k|\partial_{y_j}^k f(y,\eta)|/|\eta|^k\,dy$. $\square$

Quand $|\eta|/(lC_1)\leq(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^{1/(1-\delta)}$, prenons α tel que $|\alpha|\leq e^{-1}|\eta|\Psi_t(t,\xi)/(lC_1|\xi|)\leq|\alpha|+1$. Alors, on a $|\alpha|^{1-\delta}\leq e^{-(1-\delta)}(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^\delta$ d'où l'on a $|\alpha|!^{s-1}\leq(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^{|\alpha|}$. D'autre part, par le choix de α on voit que $(lC_1)^{|\alpha|}(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^{|\alpha|}|\alpha|!/|\eta|^{|\alpha|}$ est majoré par $e^{-|\alpha|}$. Donc nous avons

$$\begin{aligned}(lC_1)^{|\alpha|}(|\alpha|!^s+(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^{|\alpha|}|\alpha|!)/|\eta|^{|\alpha|} &\leq 2e^{-|\alpha|}\\ &\leq Ce^{-c_1|\eta|\Psi_t(t,\xi)/|\xi|}\\ &\leq Ce^{-c_2H|\eta|\langle\xi\rangle^{\delta-1}-c_1|\eta|\Psi_t(t,\xi)/(2|\xi|)}.\end{aligned}$$

D'autre part, quand $\langle\xi\rangle/2\geq|\eta|\geq lC_1(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^{1/(1-\delta)}$, on prend α tel que $|\alpha|^s\leq e^{-1}|\eta|/(lC_1)\leq(|\alpha|+1)^s$. Alors on a $(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^{|\alpha|}\leq(lC_1/|\eta|)^{(\delta-1)|\alpha|}$, d'où l'on a $(lC_1/|\eta|)^{|\alpha|}(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^{|\alpha|}\leq(lC_1/|\eta|)^{\delta|\alpha|}$. Par le choix de α, on a $|\alpha|!^s(lC_1/|\eta|)^{|\alpha|}$ est majoré par $e^{-|\alpha|}$. Donc nous avons

$$\begin{aligned}(lC_1)^{|\alpha|}(|\alpha|!^s+|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^{|\alpha|}|\alpha|!)/|\eta|^{|\alpha|} &\leq e^{-|\alpha|}+e^{-\delta|\alpha|}\\ &\leq Ce^{-c_3|\eta|^\delta}\end{aligned}$$

vu $|\eta|/\langle\xi\rangle\leq 1$

$$\leq Ce^{-c_3|\eta|\langle\xi\rangle^{\delta-1}/2-c_3|\eta|^\delta/2}.$$

Donc par l'intégration par parties nous avons

$$
\begin{aligned}
(2.47)\quad & \Big|\int e^{-iy\eta}\partial_x^{\alpha_0}\partial_\xi^{\beta}\big((1+(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^2|y|^2)^{-n}r_{0,1}(t,t_1,x+y,\xi,\eta)\big)\,dy\Big| \\
&\qquad \leq C(t-t_1)^{\varepsilon_0-1}(\Psi_t(t,\xi)/|\xi|)^n\langle\xi\rangle^{-\delta|\beta|+(1-\delta)|\alpha_0|}\times \\
&\begin{cases} e^{-c_2H|\eta|\langle\xi\rangle^{\delta-1}-c_1|\eta|\Psi_t(t,\xi)/(2|\xi|)}, & |\eta|/(lC_1)\leq(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^{1/(1-\delta)} \\ e^{-c_3|\eta|\langle\xi\rangle^{\delta-1}-c_3|\eta|^\delta/2}, & \langle\xi\rangle/2\geq|\eta|\geq lC_1(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^{1/(1-\delta)}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

On a $\int e^{-c|\eta|\Psi_t(t,\xi)/|\xi|}\,d\eta\leq C(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^n$ et $\int e^{-c|\eta|^\delta}\,d\eta<\infty$. Alors si $C(h+H(t_0+\mu^{-\delta'})^{1-(\kappa-1)/r})<c_2H/2$ et $C(h+H(t_0+\mu^{-\delta'})^{1-(\kappa-1)/r})<c_3/2$, en tenant compte de (2.37), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
(2.48)\quad & \Big|\int e^{-iy\eta+\Phi(t,\xi,\eta)}\partial_x^{\alpha_0}\partial_\xi^{\beta}\big((1+(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^2|y|^2)^{-n}r_{0,1}(t,t_1,x,\xi,\eta)\big)\,dyd\eta \\
&\qquad\qquad \leq C(t-t_1)^{\varepsilon_0-1}\langle\xi\rangle^{-\delta|\beta|+(1-\delta)|\alpha_0|}.
\end{aligned}
$$

De plus, comme $|\eta|\langle\xi\rangle^{\delta-1}e^{-c|\eta|\langle\xi\rangle^{\delta-1}}$ avec $c>0$ est borné, vu (2.38) et de (2.47), on a

$$
\begin{aligned}
(2.49)\quad & |\partial_x^{\alpha_0}\partial_\xi^{\beta}\int e^{-iy\eta+\Phi(t,\xi,\eta)}\big((1+(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^2|y|^2)^{-n}r_{0,1}(t,t_1,x,\xi,\eta)\big)\,dyd\eta \\
&\qquad\qquad \leq C(t-t_1)^{\varepsilon_0-1}\langle\xi\rangle^{-\delta|\beta|+(1-\delta)|\alpha_0|}.
\end{aligned}
$$

Ensuite considérons I_2 défini par

$$
(2.50)\qquad I_2=\int e^{-iy\eta+\Phi(t,\xi,\eta)}(1-\chi_2(4\eta/\langle\xi\rangle))r_0(t,t_1,x+y,\xi)\,dyd\eta.
$$

De même, par l'intégration par parties, on voit que

$$
(2.51)\qquad I_2=\int e^{-iy\eta+\Phi(t,\xi,\eta)}(1+|y|^2)^{-n}r_{0,2}(t,t_1,x+y,\xi,\eta)\,dyd\eta
$$

où $r_{0,2}(t,t_1,x+y,\xi,\eta)$ est défini par

$$
(2.52)\qquad e^{-\Phi(t,\xi,\eta)}(1-\Delta_\eta)^n\left(e^{\Phi(t,\xi,\eta)}(1-\chi_2(4\eta/\langle\xi\rangle))r_0\right).
$$

Donc, compte tenu de (2.39) et de $\langle\eta+\xi\rangle^{-1}\leq\langle\xi\rangle^{-1}\langle\eta\rangle$, on voit que $|\partial_y^\alpha\partial_x^{\alpha_0}\partial_\xi^\beta\big((1+|y|^2)^{-n}r_{0,2}\big)|$ est majoré par

$$
\begin{aligned}
(2.53)\quad & C_0(t-t_1)^{\varepsilon_0-1}(1+|y|^2)^{-n} \\
&\qquad \langle\xi\rangle^{-\delta|\beta|+(1-\delta)|\alpha_0|}\langle\eta\rangle^{|\beta|}C_1^{|\alpha|}(|\alpha|!^s+(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^{|\alpha|}|\alpha|!).
\end{aligned}
$$

Si $|\eta|\geq\langle\xi\rangle/4$, on a $|\xi|/\Psi_t(t,\xi)\leq C_2|\eta|^{1-\delta}/H$, d'où l'on a $(|\xi|/(|\eta|\Psi_t(t,\xi)))^{|\alpha|}|\alpha|!\leq(C_2/H)^{|\alpha|}(|\alpha|!^s/|\eta|^{|\alpha|})^\delta$. Alors, en prenant $e^{-1}/(|\alpha|+1)\leq lC_1C_2/(H|\eta|^\delta)\leq e^{-1}/|\alpha|$, on voit que, en supposant $lC_1,C_2,1/H\geq 1$,

$$
\begin{aligned}
(2.54)\qquad & (lC_1)^{|\alpha|}(|\alpha|!^s+(|\xi|/\Psi_t(t,\xi))^{|\alpha|}|\alpha|!)/|\eta|^{|\alpha|} \\
&\leq e^{-s|\alpha|}+e^{-|\alpha|} \\
&\leq Ce^{-c_4H|\eta|^\delta}.
\end{aligned}
$$

Donc, si $c_4H/2 > C(h + H(t_0 + \mu^{\delta'})^{1-(\kappa-1)/r}$, on obtient de (2.37) et de (2.38) le suivant:

$$(2.55) \quad |\partial_x^{\alpha_0}\partial_\xi^\beta \int e^{-iy\eta+\Phi(t,\xi,\eta)}\partial_x^{\alpha_0}\partial_\xi^\beta\big((1+|y|^2)^{-n}r_{0,2}(t,t_1,x+y,\xi,\eta)\big)\,dyd\eta$$
$$\leq C(t-t_1)^{\varepsilon_0-1}\langle\xi\rangle^{-\delta|\beta|+(1-\delta)|\alpha_0|}.$$

Donc on a établi les majorations à montrer quand $|\xi|/\Psi_t(t,\xi) \geq 1$.

Dans le cas où $|\xi|/\Psi_t(t,\xi) < 1$, compte tenu de la note 2.1, on n'a qu'à considérer les majorations de r_1 pour $|\xi| < J$ avec une certaine constante $J > 0$. Donc on suppose $|\xi| < J$. Considérons I_3 défini par

$$(2.56) \qquad I_3 = \int e^{-iy\eta+\Phi(t,\xi,\eta)}(1+|y|^2)^{-n}r_{0,3}(t,t_1,x+y,\xi,\eta)\,dyd\eta$$

où $r_{0,3}(t,t_1,x+y,\xi,\eta)$ est défini par

$$(2.57) \qquad e^{-\Phi(t,\xi,\eta)}(1-\Delta_\eta)^n\left(e^{\Phi(t,\xi,\eta)}r_0\right).$$

Vu (2.34) et (2.39), on a $|\partial_y^\alpha\partial_x^{\alpha_0}\partial_\xi^\beta\big((1+|y|^2)^{-n}r_{0,3}\big)|$ est majoré par

$$(2.58) \quad |\partial_y^\alpha\partial_x^{\alpha_0}\partial_\xi^\beta\big((1+|y|^2)^{-n}r_{0,3}\big)| \leq$$
$$C_0(t-t_1)^{\varepsilon_0-1}(1+|y|^2)^{-n}\langle\eta\rangle^{|\beta|}C_1^{|\alpha|}|\alpha|!^s.$$

Quand on prend α tel que $|\alpha|^s \leq e^{-1}|\eta|/(lC_1) \leq (|\alpha|+1)^s$, on a $(lC_1/|\eta|)^{|\alpha|}|\alpha|!^s \leq e^{-|\alpha|}$. Donc on a $(lC_1/|\eta|)^{|\alpha|}|\alpha|!^s \leq Ce^{-c_5|\eta|^\delta}$. Alors, vu (2.38),on a

$$(2.59) \qquad |\partial_\xi^\beta\partial_x^{\alpha_0}\int e^{-iy\eta+\Phi(t,\xi,\eta)}(1+|y|^2)^{-n}r_{0,3}(t,t_1,x+y,\xi,\eta)\,dy|$$

est majoré par

$$(2.60) \qquad C_0(t-t_1)^{\varepsilon_0-1}\langle\eta\rangle^{|\beta|}e^{\Phi(t,\xi,\eta)-c_5|\eta|^\delta}.$$

Vu (2.37), si $C(h + H(t_0 + \mu^{\delta'})^{1-(\kappa-1/r)}) \leq c_5/2$, on a

$$(2.61) \qquad |\partial_\xi\partial_x^{\alpha_0}r_1(t,t_1,x,\xi)| \leq C_0(t-t_1)^{\varepsilon_0-1}$$

quand $|\xi|/\Psi_t(t,\xi) \geq 1$. Donc la preuve de l'inégalité (2.36) s'achève.

Pour le choix de t_0, μ, H et de h, on a demandé à remplir les suivants:

$$\begin{aligned}
&Ch + H(t_0+\mu^{-\delta'})^{1-(\kappa-1)/r}) < c_2H/2\\
&C(h + H(t_0+\mu^{-\delta'})^{1-(\kappa-1)/r}) < c_3/2\\
&C(h + H(t_0+\mu^{\delta'})^{1-(\kappa-1)/r}) < c_4H/2\\
&C(h + H(t_0+\mu^{\delta'})^{1-(\kappa-1/r)}) \leq c_5/2\\
&H \leq 1.
\end{aligned}$$

En prenant $(t_0 + \mu^{-\delta'}) \leq c_6$, $h \leq c_7H$ et $H \leq c_8$ avec des constantes petites et positives c_j $(j = 6, 7, 8)$, on voit que les inégalités sont remplies. Donc soit $h_0 = c_7c_8$ et $c_0 = 1/c_7$, pour tout $h \in (0, h_0)$, en posant $H = c_0h$ on voit que h et H remplissent les conditions ci-dessus. Comme $\Psi(t,\xi) \leq H\langle\xi\rangle^\delta(t_0+\mu^{-\delta'})$, si $c_6c_0 \leq 1/2$, on voit que $h\langle\xi\rangle^\delta - \Psi(t,\xi) \geq 1/2h\langle\xi\rangle^\delta$. $\square$

Proposition 2.1 implique que l'opérateur $I+R$ est inversible dans l'espace de Banach X de fonctions $f(t,x)$ telles que $e^{h\langle D_x\rangle^\delta - \Psi(t,D_x)}f(t,x) \in C([0,t_0], L^2(\mathbb{R}^l))$ avec le norme $\|f\|_X = \sup_{t\in[0,,t_0]} \|e^{h\langle D_x\rangle^\delta - \Psi(t,D_x)}f(t,\cdot)\|$ où $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2}$. Par le calcul pour l'opératuer R, on voit que, pour $j+|\alpha| \le m$, on a $\|D_t^j D_x^\alpha Q_0 v\|_X \le C\|\langle D_x\rangle^{\max\{j+|\alpha|-m+1,0\}} v\|_X$.

Donc nous voyons que les arguments de [6] marchent bien aussi près de $t=0$ avec Q_0 comme paramétrix. C'est aussi près de $t=T$ avec Q_1.

Note 2.8. L'unicité de solutions et l'existence de vitesse finie de propagation découlent des arguments de §5 de [6]. On signale ci-dessous quelques erreurs trouvées dans la section §5 de [6].
(25.2) à la page 299, *au lieu de* $\langle\xi\rangle^{\delta(m-j)}$, *lire* $\langle\xi\rangle^{m-j-1}$.
(25.3) à la page 300, *au lieu de* $\langle D_x\rangle^{-(1-\delta)m}$, *lire* $\langle D_x\rangle^{-1}$.
(26.5) à la page 301, *au lieu de* $\langle\eta\rangle^{\delta(m-j)-\delta|\beta|+\cdots}$, *lire* $\langle\eta\rangle^{m-j-1-\delta|\beta|+\cdots}$.
(26.9) à la page 302, *au lieu de* $H^{\delta(m-j)}$, *lire* H^{m-j-1}.
Page 303, ligne 3, *au lieu de* $\langle D\rangle^{-(1-\delta)m}$, *lire* $\langle D_x\rangle^{-1}$. □

3 Appendice

Lemme 3.1. *Si les fonction $f_j(x)$ $(j=1,2,\dots,N)$ sur $\mathbb{R}^l$ remplissent $|\partial_x^\alpha f_j(0)| \le K_j C_1^\alpha |\alpha|!^s \sum_{l=0}^{|\alpha|} A^l l!^{1-s}$ pour tout α, alors on a la majoration suivante du produit $f(x) = \prod_{j=1}^N f_j(x)$:*

$$|\partial_x^\alpha f(0)| \le \rho_1(\rho_2 C_1)^{|\alpha|}|\alpha|!^s \sum_{l=0}^{|\alpha|} A^l l!^{1-s} \tag{3.1}$$

avec des constantes ρ_1 et ρ_2 où ρ_2 ne dépend pas de N.

Preuve. D'abord on note que $(k-l)! \le k!/! \le 2^k(k-l)!$ pour des entiers tels que $0 \le l \le k$, d'où l'on a, pour $s \ge 1$ et $A > 0$,

$$k!\sum_{l=0}^{k}(k-l)!^{s-1}A^l \le k!^s \sum_{l=0}^{k} A^l l!^{1-s} \le 2^{(s-1)k} k! \sum_{l=0}^{k}(k-l)!^{s-1}A^l. \tag{3.2}$$

Alors on voit que chaque fonction $f_j(x)$ remplit

$$|\partial_x^\alpha f_j(0)| \le K_j(2^{s-1}C_1)^\alpha|\alpha|! \sum_{l=0}^{|\alpha|}(|\alpha|-l)!^{s-1}A^l \tag{3.3}$$

pour tout α.

Considérons des séries formelles $F_{(D,s)}$, avec $s \ge 1$ et $D \ge 0$, définies par

$$F_{(D,s)} = \sum_{j\ge 0} D^j j!^{s-1}(x_1+x_2+\cdots+x_l)^j.$$

Vu (3.3), on a

$$|\partial_x^\alpha f_j(0)| \le K_j \partial_x^\alpha (F_{(2^{s-1}C_1,s)}F_{(2^{s-1}C_1 A,1)})|_{x=0} \tag{3.4}$$

Alors on n'a qu'à montrer que

$$F_{(D,s)}^N \ll \rho_3 F_{(\rho_4 D,s)} \tag{3.5}$$

avec des constantes ρ_3 et ρ_4 telles que ρ_4 ne dépend ni de N ni de D.
Ici $\sum_\alpha C_\alpha x^\alpha \ll \sum_\alpha D_\alpha x^\alpha$ signifie $|C_\alpha| \leq D_\alpha$ pour tout α. En effet, vu (3.4) et (3.5), on obtient (3.1) avec $\rho_1 = \rho_3^2 \prod_{j=1}^k K_j$ et $\rho_2 = 2^{s-1}\rho_4$. Pour obtenir (3.5), notons d'abord que vu $\partial_x^\alpha F_{(D,s)}|_{x=0} = (\partial_x^\alpha F_{(D^{1/s},1)}|_{x=0})^s$ et $s \geq 1$, on a $\partial_x^\alpha F_{(D,s)}^N|_{x=0} \leq (\partial_x^\alpha F_{(D^{1/s},1)}^N|_{x=0})^s$. Comme $\partial_x^\alpha F_{(D^{1/s},1)}^N|_{x=0}$ est égal à $N(N+1)\cdots(N+|\alpha|-1)D^{|\alpha|/s}$ et $N(N+1)\cdots(N+|\alpha|-1)/|\alpha|! \leq (N-1)!2^{N-1+|\alpha|}$, on obtient (3.5) avec $\rho_3 = (N-1)!^s 2^{s(N-1)}$ et $\rho_4 = 2^s$. Donc la preuve du Lemme s'achève. □

Note 3.1. Par le raisonnement ci-dessus, on voit que, *si une fonction $f(x)$ remplit $f(0) = 1$ et $|f^{(\alpha)}(0)| \leq C_1^{|\alpha|}|\alpha|! \sum_{l=0}^{|\alpha|} A^{|\alpha|-j} j!^{s-1}$ pour tout α, en posant $g(x) = 1/f(x)$, alors on a, avec une constante ρ, $|g^{(\alpha)}(0)| \leq (\rho C_1)^{|\alpha|}|\alpha|! \sum_{l=0}^{|\alpha|} A^{|\alpha|-j} j!^{s-1}$ pour tout α.*

En effet. Soit $f_0 = \sum_{|\alpha|>0} f^{(\alpha)}(0)x^\alpha/\alpha!$. L'hypothèse implique $1+f_0 \ll F_{(C_1,s)}F_{(C_1A,1)}$, d'où l'on a $f_0 \ll F_1 + F_2 + F_1F_2$ où $F_1 = F_{(C_1,s)} - 1$ et $F_2 = F_{(C_1A,1)} - 1$. Comme $1/(1+f_0) = \sum_{j=0}^\infty (-f_0)^j$, on a

$$\frac{1}{1+f_0} \ll \sum_{j=0}^\infty (F_1 + F_2 + F_1F_2)^j. \tag{a.1}$$

Vu $(k+l)!/(k!l!) \leq 2^{k+l}$ et $k \leq 2^k$, on a $\sum_{j=0}^\infty (A+B)^j \ll \sum_{j=0}^\infty (2A)^j \sum_{j=0}^\infty (2B)^j$ et $(\sum_{j=0}^\infty A^j)^2 \ll \sum_{j=0}^\infty (2A)^j$ pour les séries formelles $A = \sum_{|\alpha|>0} a_\alpha x^\alpha$ et $B = \sum_{|\alpha|>0} b_\alpha x^\alpha$ avec $a_\alpha \geq 0$ et $b_\alpha \geq 0$. On a aussi $\sum_{j=0}^\infty (AB)^j \ll \sum_{j=0}^\infty A^j \sum_{j=0}^\infty B^j$. Donc le second membre de (a.1) est dominé par

$$\sum_{j=0}^\infty (8F_1)^j \sum_{j=0}^\infty (8F_2)^j.$$

Notons $8F_1 \ll F_{(8C_1,s)} - 1$ et $8F_2 \ll F_{(8C_1A,1)} - 1$.

D'autre part, en notant que $\partial_x^\alpha \sum_{j\geq 0}(F_{(D,s)} - 1)^j|_{x=0} \leq (\partial_x^\alpha \sum_{j\geq 0}(F_{(D^{1/s},1)} - 1)^j|_{x=0})^s$ et $\sum_{j\geq 0}(F_{(D_0,1)} - 1)^j = (1/(1 - 2D_0(x_1 + \cdots + x_l)) + 1)/2$, on a, si $|\alpha| > 0$,

$$\partial_x^\alpha \sum_{j\geq 0}(F_{(D,s)} - 1)^j|_{x=0} \leq 2^{-s}(2^s D)^{|\alpha|}|\alpha|!^s,$$

d'où l'on obtient $\sum_{j\geq 0}(F_{(D,s)} - 1)^j \ll F_{(2^s D,s)}$. Alors on a l'inégalité à montrer avec $\rho = 2^s 8$. □

Bibliographie

[1] M. D. Bronshtein, *The Cauchy problem for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity*, Trudy Moskow Mat. Obsc. **41** (1980), 87–103; English transl. in Trans. Moscow Math. Soc. 1982, Issue 1, 87–103.

[2] ——— *Smoothness of roots of polynomials depending on parameters*, Sibirsk. Mat. Z., **20** (1979), 493-501; English transl. in Siberian Math. J. 20 (1979) , no. 3, 347–352 (1980).

[3] L. Hörmander, *Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients*, Comm. in pur. and applied Math., **26** (1971), 671–704.

[4] J. Leray et Y. Ohya, *Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts*, Colloq. Anal. Fonct., C.B.R.M., (1964),105–144

[5] S. Mizohata *The Theory of Partial Differential Equations*, Cambridge University Press 1973

[6] Y. Ohya et S. Tarama, *Le problème de Cauchy à caractéristiques multiples dans le classe de Gevrey -coefficients hölderiens en t-*,Taniguchi Symp. HERT Katata(1984), 273–306, Academic press, 1986.

[7] S. Tarama, *Note on the Bronshtein theorem concerning hyperbolic polynomials*, à paraître à Sci. Math. Jap.

[8] S. Wakabayashi, *Remarks on hyperbolic polynomials*, Tsukuba J. Math.,**10**(1985), 17–28.

Y. Ohya Université de Kyoto, 605-8501, Kyoto, Japon
e-mail: y-ohya@math.mbox.media.kyoto-u.ac.jp
S. Tarama Lab.of Appl. Math., Fac. Eng., Osaka City University, 558-8585 Osaka, Japan
e-mail: starama@mech.eng.osaka-cu.ac.jp