m-Convexité et Fonctions Entières à une Infinité de Variables

Z. ABDELALI

Received March 11, 2004; revised April 22, 2005

Abstract. We deal with locally convex algebras in which operate the algebra $H(\ell^\infty)$ of all entire functions with infinitely many variables. These algebras are shown to be exactly the bornological inductive limits of Fréchet locally m-convex ones. In the Mackey-complete commutative case, the operation of $H(\ell^\infty)$ is shown to be equivalent to that of the algebra $H(\mathbb{C})$ of all entire functions over $\mathbb{C}$. We finally provide an example of a commutative locally convex algebra with continuous multiplication admitting no locally m-convex algebra topology at all, but in which $H(\ell^\infty)$ operates.

1. Introduction

Dans une algèbre m-convexe complète A, on peut donner un sens à $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_{i_1,\dots,i_k} a_1^{i_1}\cdots a_k^{i_k}$, pour toute fonction entière $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_{i_1,\dots,i_k} z_1^{i_1}\cdots z_k^{i_k}$ définie sur ℓ^∞ et toute suite bornée $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A. Ceci provient de la complétude et du fait que la convergence absolue d'une telle série découle de l'inégalité $\| \sum\limits_{k,i_1,\dots,i_k\le n} f_{i_1,\dots,i_k} a_1^{i_1}\cdots a_k^{i_k}\| \le \sum\limits_{k,i_1,\dots,i_k\le n} |f_{i_1,\dots,i_k}|\|a_1\|^{i_1}\cdots\|a_k\|^{i_k}$, $n\in\mathbb{N}$, qui est vérifiée pour toute semi-norme sous-multiplicative. On dit alors que l'espace $H(\ell^\infty)$ des fonctions entières sur ℓ^∞ opère sur A. En particulier, l'espace $H(\mathbb{C}^n)$ des fonctions entières à n-variables opère sur une telle algèbre. Plusieurs auteurs se sont intéressés aux *liens entre la m-convexité et l'opération des fonctions entièrs.* Un premier résultat dans cette direction, dû à B.S. Mityagin, S. Rolewicz et W. Żelazko [Théorème 1, [19]], montre que si A est une algèbre commutative localement convexe de Fréchet, alors les fonctions entières à une seule variable opèrent sur A si et seulement si A est m-convexe. Ce résultat ne s'étend pas au cas non commutatif comme le montre un contre-exemple de W. Żelazko [32]. Dans le cas non métrisable les contre-exemples sont nombreux. Dans ce papier nous nous intéressons à la comparaison entre l'opération de $H(\mathbb{C})$, celle de $H(\ell^\infty)$ et la m-convexité. Dans un premier lieu, en Proposition 4.1, nous montrons que si A est une algèbre localement convexe métrisable, non nécessairement commutative, alors $H(\ell^\infty)$ opère sur A si et seulement si A est m-convexe complète. Ainsi, dans le cas non commutatif, l'opération des $H(\mathbb{C}^n),\ n\in\mathbb{N}$, n'entraîne pas celle de $H(\ell^\infty)$. Nous montrons, en Théorème 4.2, que dans le cas d'une algèbre commutative localement convexe Mackey-complète, il suffit que $H(\mathbb{C})$ opère pour avoir l'opération de $H(\ell^\infty)$. Le théorème 4.3 montre que les algèbres localement convexes sur lesquelles $H(\ell^\infty)$ opère sont exactement les algèbres localement convexes limites inductives bornologiques d'algèbres m-convexes de Fréchet. Cette classe a été introduite par M. Akkar dans [2] et a été étudiée par C. Nacir [21]. Il est simple de voir qu'une telle classe contient de nombreuses algèbres autres que les algèbres m-convexes Mackey-complètes. En l'occurrence, les algèbres $(L^1(G),\sigma(L^1(G),L^\infty(G))$ où G est un groupe abélien localement compact, les algèbres A-convexes Mackey-complètes, en particulier, l'algèbre $C_b(\mathbb{R})$ munie de la topologie stricte [31] qui est à produit continu, l'algèbre des opérateurs fortement

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46J40 Secondary 46H99.
Key words and phrases. Locally convex algebra, m-convex algebra, entire functions.

bornés sur un espace de Fréchet qui n'est pas de Banach [23], l'algèbre $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H(\mathbb{C}^n)$ munie de la topologie limite inductive stricte. Nous vérifierons, en Proposition 5.1, que cette dernière algèbre n'est même pas à produit continu. Mais il se trouve que pour tous les exemples d'algèbres non m-convexes sur lesquelles $H(\ell^\infty)$ opère, que nous avons rencontrés dans la littérature, ou bien qu'il existe une topologie m-convexe ayant les même bornés, ou alors il n'existe sur l'algèbre aucune topologie localement convexe à produit continu ayant les mêmes bornés. Ainsi nous nous sommes amenés à construire, en Théorème 5.2, une *algèbre $\mathcal{A}$ commutative localement convexe à produit continu complète sur laquelle $H(\ell^\infty)$ opère et qui ne possède aucune topologie m-convexe. De plus l'algèbre $\mathcal{A}$ est aussi une limite inductive bornologique de sous algèbres de Banach de dimension finie.* Ceci peut être considéré comme une réponse partielle à un problème de M. Akkar et C. Nacir [3] sur la m-convexité des algèbres commutatives localement convexes à produit continu qui sont des limites inductives d'algèbres de Banach. Des commentaires et remarques concernant nos résultats et d'autres en relation avec eux font l'objet du dernier paragraphe.

2. Préliminaires

Ici, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers $n \geq 1$ et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Les algèbres considérées sont des $\mathbb{C}$-algèbres associatives. Une *algèbre A* est dite *localement convexe*, si A est munie d'une topologie τ, de *Hausdorff*, qui peut être définie par une famille de semi-normes $(P_i)_{i\in I}$ d'espace localement convexe, où le *produit* est *séparément continu*, c'est à dire que les opérateurs de A : $b \to ab$ et $b \to ba$, $a \in A$, sont continus. On dira que l'*algèbre A* est *à produit continu* si l'application : $A \times A \to A;\ (a,b) \mapsto ab$ est continue, c'est à dire que pour tout $i \in I$, il existe $j \in I$ tel que pour tout $(a,b) \in A^2$, $P_i(ab) \leq P_j(a)P_j(b)$. Si la famille de semi-normes $(P_i)_{i\in I}$ verifie, en outre, $P_i(ab) \leq P_i(a)P_i(b)$ on dira que A est une *algèbre m-convexe* (voir par exemple, [17], [18] ou [30]).
Soit A une algèbre et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous algèbres de A. On dira que A est une *réunion filtrante croissante de* la famille $(A_i)_{i\in I}$ si $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = A$ et si pour tout $(i,j) \in I^2$ il existe $k \in I$ tel que $A_i \cup A_j \subseteq A_k$. Supposons, de plus, que A est munie d'une topologie d'algèbre localement convexe τ et que pour tout $i \in I$, A_i est munie d'une topologie d'algèbre localement convexe métrisable τ_i. On dira que $(A_i, \tau_i)_{i\in I}$ est un *système inductif* si pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $A_i \subseteq A_j$, l'injection canonique : $(A_i,\tau_i) \to (A_j,\tau_j),\ x \mapsto x$ est continue. Dans se cas on dira que (A,τ) est une *limite inductive localement convexe* du système inductif $(A_i,\tau_i)_{i\in I}$ si τ est la topologie la plus fine des topologies d'espace localement convexes sur A rendant les injections canoniques : $A_i \to A,\ x \mapsto x$ continus. D'autre part, on dira que (A,τ) est une *limite inductive bornologique* du système inductif $(A_i,\tau_i)_{i\in I}$ si les bornés de (A,τ) sont exactement les bornés des $(A_i,\tau_i),\ i \in I$. Remarquons que si (A,τ) est une algèbre localement convexe qui est une limite inductive dans la catégorie des espaces localement convexes (resp. bornologiques) d'un système inductif d'algèbres localement convexes métrisables ([2], [15], [§28, [16]]), alors (A,τ) est aussi une réunion filtrante croissante et limite inductive localement convexe (resp. bornologique) d'une famille de sous algèbres localement convexes métrisables de A.

Un espace localement convexe E est dit *Mackey-complet* si tout fermé borné $B \subseteq E$ absolument convexe est un *disque de Banach*, c'est à dire que l'espace E_B engendré par B normé par la jauge de B, qui sera noté J_B, est un espace de Banach. Il est bien connu que tout espace complet est Mackey-complet. Ces deux notions de complétudes coïncident dans le cas métrisable [Corollaire 5.1.3, [25]]. Un espace localement convexe métrisable complet sera dit *espace de Fréchet*.

Soit $\ell^\infty = \{z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C} \ : \ \sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n| < \infty\}$. Définissons :

$$H(\ell^\infty) := \{z \in \ell^\infty \overset{f}{\mapsto} f_0 + \sum_{s\in S} f_s z^s \ : \ \sigma_n(f) := |f_0| + \sum_{s\in S} |f_s| n^{|s|} < \infty \ (n \in \mathbb{N})\}$$

où $f_0, \ f_s, s \in S$, sont des éléments de $\mathbb{C}$ et S désigne l'*ensemble des suites* $s = (s_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ *telles que* $\mathrm{Supp}(s) := \{m \in \mathbb{N} \ : \ s_m \neq 0\}$ est *fini* et *non vide*. Pour un tel s, $|s| := \sum_{n\in \mathrm{Supp}(s)} s_n$. Pour $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ℓ^∞, $z^s = \prod_{m\in\mathrm{Supp}(s)} (z_m)^{s_m}$. L'espace $(H(\ell^\infty), (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est un espace de Fréchet, muni du produit ponctuel il devient une algèbre m-convexe de Fréchet. Le sous espace de $H(\ell^\infty)$ formé par les fonctions qui ne dépendent que des n-premières coordonées $(z_1, ..., z_n)$ s'identifie à l'espace $H(\mathbb{C}^n)$ des fonctions analytiques sur $\mathbb{C}^n$. La topologie naturelle sur $H(\mathbb{C}^n)$ de la convergence uniforme sur les compactes de $\mathbb{C}^n$ coïncide avec celle induite par $H(\ell^\infty)$. De plus l'algèbre complétée de $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H(\mathbb{C}^n), (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est isomorphe à $H(\ell^\infty)$. Ainsi, on voit bien que $H(\ell^\infty)$ *s'identifie à la deuxième algèbre de fonctions analytiques sur* ℓ^∞ *introduite par* D. Clayton [Définition 6, [8]], elle est *isomorphe aussi à l'algèbre définie par* J. Esterle [Définition 2.3, [12]]. Signalons que pour Clayton l'algèbre des fonction analytiques sur ℓ^∞ est plus large, c'est en fait l'algèbre complétée de $H(\ell^\infty)$ munie de la topologie de la convergence uniforme sur les parties ω^*-compacts de ℓ^∞. Ici nous considérons l'algèbre $H(\ell^\infty)$, qui sera appeler *algèbres des fonctions entières sur* ℓ^∞, car ses éléments f sont les séries sommables sur ℓ^∞ dont les coefficients f_s ne sont que ses coefficients de Fourier [Proposition 4, [8]].

3. Opération des fonctions entières

Soit A une algèbre. Pour toute suite bornée $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A et $s \in S$ (cf. Préliminaires) on note par b^s l'élément $b_{l_1}^{s_{l_1}} \cdots b_{l_n}^{s_{l_n}}$ où $\{l_1, ..., l_n\} = \mathrm{Supp}(s)$ avec $l_1 < ... < l_n$. Nous identifions toute suite finie $(b_1, ..., b_n)$ de A à la suite $(b_1, ..., b_n, 0, 0, ...)$. Notons par δ_A l'élément unité de A si A est unitaire et $\delta_A = 0$ sinon. La définition suivante généralise, d'une manière naturelle, la notion d'opération de $H(\mathbb{C})$, sur une algèbre localement convexe, considérée par plusieurs auteurs ([19], [27], [30], ...) et celle de $H(\ell^\infty)$ sur les algèbres m-convexes de Fréchet [Proposition 2.4, [12]].

Définition 3.1. On dit qu'un *élément* f *de* $H(\ell^\infty)$ *opère* (resp. *opère absolument*) *sur une algèbre localement convexe* A, si pour toute suite bornée $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, la famille

$$f(b) := f_0\delta_A + \sum_{s\in S} f_s b^s \tag{1}$$

est sommable (resp. absolument sommable) dans A.
On dit qu'un *sous-espace de* $H(\ell^\infty)$ *opère* (resp. *opère absolument*) *sur* A si tous ses éléments opèrent (resp. opèrent absolument) sur A.

Il est évident que $H(\ell^\infty)$ *opère absolument sur les algèbres m-convexes*. Par ailleurs, $H(\ell^\infty)$ *opère absolument sur toute algèbre A-convexe Mackey-complète* (ce qui entraîne que $H(\ell^\infty)$ y opère d'après la proposition 3.3), puisque les bornés d'une telle algèbre sont ceux d'une topologie m-convexe plus fine [4]. Rappelons qu'une *algèbre* $(A, (P_i)_{i\in I})$ est dite *A-convexe* si pour tout $i \in I$ et tout $(a, b) \in A^2$, $\max\{P_i(ab), \ P_i(ba)\} \leq \lambda_{i,a} P_i(b)$ où $\lambda_{i,a}$ est un nombre réel positif qui ne dépend que de i et de a (cf. [9], [17]).
Le lemme suivant donne une interprétation de l'opération de $H(\ell^\infty)$ qui sera très utile pour la suite.

Lemme 3.2. *Soit A une algèbre localement convexe. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*
(1) $H(\ell^\infty)$ opère absolument sur A;
(2) pour toute semi-norme continue P et tout borné B de A,

$$\varrho_P(B) := \sup\{(P(b_1 \cdots b_n))^{\frac{1}{n}} \ : \ n \in \mathbb{N},\ b_1, ...,\ b_n \in B\} < \infty \ ; \tag{2}$$

(3) pour toute suite bornée $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et tout élément f de $H(\ell^\infty)$, la famille $f(b)$ vérifie le critère de Cauchy.

Preuve. Les implications *(2) $\Rightarrow$ (1)* et *(1) $\Rightarrow$ (3)* sont évidentes. Pour montrer que *(3) $\Rightarrow$ (2)*, supposons qu'il existe une semi-norme continue P et un borné B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe k_n éléments $b_{n,1},\ b_{n,2},\ ...,\ b_{n,k_n}$ de B tel que $P(b_{n,1}b_{n,2}\cdots b_{n,k_n}) > (n^2)^{k_n}$. Pour tout entier $m \geq 1$, il existe un couple unique $(n,l) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq l \leq k_n$ et $m = k_0 + ... + k_{n-1} + l$, avec $k_0 := 0$. Soit alors $b = (b_m)_{m\geq 1}$ la suite définie par $b_m = b_{n,l}$. Il est clair que

$$f = \sum_{n\geq 1} (\frac{1}{n^2})^{k_n} (z_{k_0+...+k_{n-1}+1})(z_{k_0+...+k_{n-1}+2}) \cdots (z_{k_0+...+k_{n-1}+k_n}) \in H(\ell^\infty) \ .$$

Donc $f(b) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\frac{1}{n^2})^{k_n} b_{n,1}b_{n,2}\cdots b_{n,k_n}$ vérifie le critère de Cauchy. D'où :

$$P((\frac{1}{n^2})^{k_n} b_{n,1}b_{n,2}\cdots b_{n,k_n}) < 1$$

pour n assez grand. Cette contradiction achève la démonstration. $\square$

Une conséquence immédiate du lemme 3.2, et le fait que $H(\ell^\infty)$ *opère absolument sur une algèbre localement convexe (A,τ) si et seulement si pour toute suite bornée $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'application* :

$$(\mathcal{P}(\ell^\infty), (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}) \to (A,\tau);\ f \to f(b)$$

est continue. Ici, $\mathcal{P}(\ell^\infty)$ désigne l'espace des applications polynômialles sur ℓ^∞. On dira alors que b est une *suite bornée $\mathcal{P}(\ell^\infty)$-spectrale.* Cette notion généralise celle des points $\mathcal{P}(\mathbb{C})$-spectraux donnée par P. Turpin [10.2, [27]]. De même, comme on en peut déduire par exemple du [Lemme.II.2, [7]], on a $H(\mathbb{C}^n)$ *opère absolument sur (A,τ) si et seulement si* toute suite finie à n-éléments est $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$-spectrale, si et seulement si tout élément $(a_1, ..., a_n)$ de A^n vérifie la formule :

$$\sup_{m_1+...+m_n\in\mathbb{N}} \{P(a_1^{m_1}\cdots a_n^{m_n})^{\frac{1}{m_1+...+m_n}}\} < \infty \ . \tag{3}$$

Proposition 3.3. *Soit A une algèbre localement convexe. Alors, $H(\ell^\infty)$ opère sur A si et seulement si A est Mackey-complète et $H(\ell^\infty)$ y opère absolument.*

Preuve. Nécessité. Remarquons, d'abord, que l'application :

$$\ell^1 \to H(\ell^\infty);\ (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n z_n$$

permet d'identifie ℓ^1 à un sous-espace de $H(\ell^\infty)$. Donc si $H(\ell^\infty)$ opère sur A alors ℓ^1 y opère. Ceci entraîne que A est Mackey-complète [Théorème 2.1, [26]]. Par ailleurs d'après le lemme 3.2, si $H(\ell^\infty)$ opère sur A alors il y opère absolument.
Suffisance. Soit $f = \sum_{s\in S} f_s z^s \in H(\ell^\infty)$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de A. On a $\sum_{s\in S,\ |s|=n} |f_s| < \infty$ et d'après le lemme 3.2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(b^s)_{s\in S,\ |s|=n}$ est bornée. La Mackey-complétude de A, qui est équivalente à l'opération de ℓ^1, entraîne que

$f_n := \sum_{|s|=n} f_s b^s$ converge. De plus la suite $(2^n f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, car pour toute semi-norme continue P sur A,

$$P(2^n f_n) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{s\in S,\ |s|=k} |f_s| P((2b)^s) < \infty \ .$$

D'où $f(b) = \sum\limits_{s\in S} f_s b^s = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}(2^n f_n)$ converge dans A. □

4. Opération de $H(\mathbb{C})$ et $H(\ell^\infty)$ et m-convexité

Etudions d'abord le cas des algèbres localement convexes métrisables.

Proposition 4.1. *Soit (A,τ) une algèbre localement convexe métrisable. Alors on a :*
(1) $H(\ell^\infty)$ opère absolument sur A si et seulement si A est m-convexe.
(2) $H(\ell^\infty)$ opère sur A si et seulement si A est m-convexe de Fréchet.

Preuve. (1) Soit $(A,(P_n)_{n\in\mathbb{N}})$ une algèbre métrisable $(P_n \leq P_{n+1})$ sur laquelle $H(\ell^\infty)$ opère. Il est simple de voir que si A est non m-convexe, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, il existe une suite finie $a_{n,1},\ a_{n,2},\ ...,\ a_{n,k_n}$ d'éléments de $(P_n)^{-1}(\{1\})$ telle que $P_{n_0}(a_{n,1}a_{n,2}\cdots a_{n,k_n}) > n^{k_n}$ [Lemme 1.2, [19]]. Donc l'ensemble $\{a_{n,1},\ a_{n,2},\ ...,\ a_{n,k_n}\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ est borné, ce qui est absurde d'après le lemme 3.2.
(2) Découle de *(1)* et de la proposition 3.3. □

W. Żelazko à construit dans [32] un exemple d'algèbre localement convexe de Fréchet, ainsi elle est à produit continu, sur laquelle $H(\mathbb{C}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, opère et qui n'est pas m-convexe. Donc *l'opération des $H(\mathbb{C}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, n'entraîne pas en générale celle de $H(\ell^\infty)$*. Nous établissons, dans le résultat suivant, le *lien entre l'opération des $H(\mathbb{C}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, et celle de $H(\ell^\infty)$* pour les algèbres commutatives.

Théorème 4.2. *Soit (A,τ) une algèbre localement convexe commutative. Alors on a :*
(1) $H(\mathbb{C})$ opère absolument sur (A,τ) si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(\mathbb{C}^n)$ y opère absolument.
(2) $H(\mathbb{C})$ opère sur (A,τ) et (A,τ) est Mackey-complète si et seulement si $H(\ell^\infty)$ opère sur (A,τ).

Preuve. Soit B un borné absolument convexe dans A tel que (E_B, J_B) est un espase de Banach. L'application n-linéaire :

$$(E_B, J_B) \times \cdots \times (E_B, J_B) \to A;\ (b_1, ..., b_n) \to b_1 \cdots b_n$$

est séparément continue, car A est une algèbre localement convexe et B borné. Donc elle est continue d'après le théorème de Banach-Steinhaus. Par suite, les applications "puissances": $(E_B, J_B) \to A;\ b \to b^n,\ n \in \mathbb{N}$, sont continues. Soit P une semi-norme continue sur A. Supposons que $H(\mathbb{C})$ opère absolument sur A, alors d'après la formule (3), on a $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} P((\frac{1}{\varrho_P(a)}a)^n) \leq 1$. Le [Théorème 9.5, [27]], dit de Banach-Steinhaus pour les applications polynômiales, assure que notre suite d'applications $b \to b^n,\ n \in \mathbb{N}$, est équicontinue en zéro. Donc pour la semi-norme P, il existe $r > 0$ tel que $P(b^n) \leq r^n$ pour tout $b \in B$ et tout $n \geq 1$. La formule de polarisation (voir par exemple la formule [(8), [19]]) :

$$a_1 \cdots a_n = \frac{n^n}{n!} \sum_{k=1}^{n} \sum_{(1\leq i_1<...<i_k\leq n)} (-1)^{k+1} (\frac{1}{n} a_{i_1} + ... + \frac{1}{n} a_{i_k})^n$$

entraîne que $\varrho_P(B) \leq \infty$, puisque pour tout $b_1, ..., b_n \in B$,

$$P(b_1 \cdots b_n) \leq \frac{n^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (r)^n = \frac{n^n}{n!}(2r)^n \ .$$

Puisque tout ensemble fini est contenu dans un disque de Banach, la formule (3) est donc vérifie pour tout entier n. D'où $H(\mathbb{C}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, opère absolument sur A. Ceci montre *(1)*. Si de plus A est Mackey-complète, alors tout borné est contenu dans un disque de Banach. Le lemme 3.2 et la proposition 3.3 permettent alors de conclure que $H(\ell^\infty)$ opère sur A. Ainsi *(2)* est démontré. □

Le théorème, de structure, suivant montre que *la classe des algèbres localement convexes sur lesquelles $H(\ell^\infty)$ opère*, qui contient les algèbres commutatives localement convexes Mackey-complètes sur lesquelles $H(\mathbb{C})$ opère, n'*est* autre que *celle introduite par* M. Akkar dans [2].

Théorème 4.3. *Soit (A, τ) une algèbre localement convexe. Alors on a :*
(1) $H(\ell^\infty)$ opère absolument sur (A, τ) si et seulement si (A, τ) est une limite inductive bornologique d'algèbres m-convexes métrisables.
(2) $H(\ell^\infty)$ opère sur (A, τ) si et seulement si (A, τ) est une limite inductive bornologique d'algèbres m-convexes de Fréchet.

Preuve. (1) Suffisance. On peut supposer que (A, τ) est une limite inductive bornologique et réunion filtrante croissante d'algèbres m-convexes métrisables $(A_i, \tau_i)_{i \in I}$. Donc tout borné B dans (A, τ) est un borné dans une algèbre (A_i, τ_i). Soit P une semi-norme continue sur (A, τ). Puisque les bornés de (A_i, τ_i) sont bornés dans (A_i, τ), P est aussi continue sur (A_i, τ_i). Donc il découle du lemme 3.2 appliqué à (A_i, τ_i), que $\varrho_P(B) < \infty$. L'implication résulte de l'application du lemme 3.2 à (A, τ).
Nécessité. Soit $(B_i)_{i \in I}$ la famille de bornés absolument-convexes fermés de (A, τ). Pour tout $i \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $\| \ \|_{i,n}$ la jauge associée à l'enveloppe absolument convexe fermé $U_{i,n}$ de l'ensemble :

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\frac{1}{n} B_i)^k \text{ et soit } A_i = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{span}\{U_{i,n}\}; \tag{4}$$

la suite $(\| \ \|_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ définit sur A_i une topologie m-convexe métrisable τ_i plus fine que la topologie induite par τ. Car pour toute semi-norme P continue sur (A, τ), il existe $n_P \in \mathbb{N}$ tel que pour toute suite $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de B_i, $P(b_1.b_2 \cdots b_k) \leq (n_P)^k$, ainsi pour $x \in A_i$, $P(x) \leq \|x\|_{i,n_P}$. Donc les bornés dans (A_i, τ_i) sont des bornés de (A, τ) et par construction B_i est borné dans (A_i, τ_i). Définissons sur I la relation d'ordre : $i \leq j$, si $B_i \subseteq B_j$. Alors pour $i \leq j$ dans I, et tout x dans A_i, on a $\|x\|_{j,n} \leq \|x\|_{i,n}$. Ainsi l'injection : $A_i \to A_j$; $x \mapsto x$ est continue. Donc (A, τ) est une limite inductive bornologique de la famille d'algèbres m-convexes métrisables $(A_i, \tau_i)_{i \in I}$.

(2) En combinant *(1)* et la proposition 3.3, il suffit de montrer que A est Mackey-complète si et seulement si les $(A_i, \tau_i), i \in I$, sont complètes (les notations sont celles utilisées dans la démonstration de *(1)*). Supposons que les $(A_i, \tau_i), i \in I$, sont complètes. Alors tout borné absolument-convexe fermé de (A, τ) est un fermé borné dans une certaine (A_i, τ_i), ainsi il est un disque de Banach.
Supposons maintenant que (A, τ) est Mackey-complète et soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans (A_i, τ_i) et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n$ converge dans (A, τ), car $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans

(A,τ) [Théorème 2.1, [26]]. Il est évident que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n$ vérfie le critère de Cauchy dans (A_i, τ_i), ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $q_p \in \mathbb{N}$ tel que pour tous entiers $l \geq k \geq q_p$,

$$\sum_{n=1}^{l} \lambda_n b_n - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n b_n \in \frac{1}{p} U_{i,p} \ .$$

Par suite $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n b_n \in \frac{1}{p} U_{i,p}$, d'où (A_i, τ_i) est Mackey-complète, par suite elle est complète. $\square$

Rappelons que *tout espace localement convexe* (E,τ) *admet une topologie bornologique associée* notée $\tau^{\times}$. C'est la topologie localement convexe la plus fine ayant les mêmes bornés que τ [§28, [16]]. De plus *si* (A,τ) *est une algèbre localement convexe,* $(A,\tau^{\times})$ *en est aussi* une. Alors on a le

Corollaire 4.4. *Soit* (A,τ) *une algèbre localement convexe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) $H(\ell^{\infty})$ *opère absolument (resp. opère) sur* (A,τ)*;*
(2) $H(\ell^{\infty})$ *opère absolument (resp. opère) sur* $(A,\tau^{\times})$*;*
(3) $(A,\tau^{\times})$ *est une limite inductive localement convexe et bornologique d'algèbres m-convexes métrisables (resp. m-convexes de Fréchet).*

Preuve. Il suffit de vérifier que *(2)* $\Rightarrow$ *(3)*. D'après le théorème 4.3, $(A,\tau^{\times})$ est une limite inductive bornologique d'algèbres m-convexes métrisables (de Fréchet) $(A_i, \tau_i^{\times})_{i\in I}$. Soit (A,T) la limite inductive localement convexe du système inductif $(A_i, \tau_i^{\times})_{i\in I}$. Les bornés pour T sont des bornés pour $\tau^{\times}$, car T est plus fine que $\tau^{\times}$. Par ailleurs, un borné pour $\tau^{\times}$ est un borné dans une certaine algèbre $(A_i, \tau_i^{\times})$ donc il reste borné pour T, de plus (A,T) est un espace localement convexe bornologique d'où $T = \tau^{\times}$. $\square$

Il résulte du corollaire 4.4, que *l'opération et l'opération absolue de* $H(\ell^{\infty})$ *sur une algèbre localement convexe ne dépendent* en fait *que des bornés relativement à la topologie.* En d'autres termes :

Corollaire 4.5. *Soient* τ *et* τ' *deux topologies sur* A *d'algèbre localement convexe ayant les mêmes bornés. Alors,* $H(\ell^{\infty})$ *opère absolument (resp. opère) sur* (A,τ) *si et seulement si elle opère absolument (resp. opère) sur* (A,τ')*.*

5. Contre-exemple

D'après le corollaire 4.5 si (A,τ) est une algèbre m-convexe, alors $H(\ell^{\infty})$ opère absolument sur (A,τ'), pour toute topologie τ' d'algèbre localement convexe sur A ayant les mêmes bornés que τ. Ainsi, *les exemples d'algèbres commutatives localement convexes, non m-convexes, sur lesquelles* $H(\ell^{\infty})$ *opère sont nombreux.* C'est le cas pour toute algèbre de Banach commutative semi-simple involutive symétrique de dimension infinie munie de la topologie faible [Théorème 2, [29]]. On peut citer, par exemple, les algèbres $(L^1(G), \sigma(L^1(G), L^{\infty}(G))$ où G est un groupe abélien localement compact muni de la mesure de Haar ($G = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}, [0,1], ...$). Il y a aussi un *exemple* remarquable *donné par* W. Żelazko [31] d'*algèbre localement convexe complète à produit continu* mais qui *n'est pas m-convexe.* Cette *algèbre* n'est autre que celle des *fonctions continues et bornées sur* $\mathbb{R}^+$ *munie de la topologie stricte.* Il se trouve qu'*une telle algèbre est uniformément A-convexe* [24], ainsi elle a les *mêmes bornés qu'une topologie normée plus fine.* Un autre type d'exemples est celui présenté par l'algèbre commutative A engendré par les symboles $\{c,\ a_n,\ b_f\ :\ n \in \mathbb{N},\ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ dont le produit est défini par : $a_n b_f = f(n)c,\ a_n a_m = b_f b_g = ca_n = cb_f = c^2 = 0$. Cette *algèbre* a été construite dans [Théorème 1, [20]] comme exemple *où il n'existe aucune topologie à produit continu.* Alors *A munie de la topologie localement convexe maximale* est une *algèbre localement convexe complète sur laquelle $H(\ell^\infty)$ opère*, mais *qui n'admet aucune topologie m-convexe. Nous n'avons pas trouvé*, dans la littérature un *exemple d'algèbre (commutative) localement convexe à produit continu Mackey-complète*, en particulier complète, *sur laquelle $H(\ell^\infty)$ opère et ne possédant aucune topologie m-convexe ayant les mêmes bornés.* On peut tenter à croire qu'un tel exemple peut être donner par l'algèbre $\varinjlim H(\mathbb{C}^n) := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H(\mathbb{C}^n)$ munie de la topologie limite inductive localement convexe, stricte, où $H(\mathbb{C}^n)$ est munie de sa topologie naturelle. *Cette algèbre n'est pas m-convexe*, étant isomorphe à celle considérée dans [(XI), [6]]. Ici, en faisant dégager toute la force de la démonstration donnée par S. Warner dans [Exemple 6, [29]], on a :

Proposition 5.1. *L'algèbre limite induvtive $\varinjlim H(\mathbb{C}^n)$ n'est pas à produit continu.*

Preuve. Supposons le contraire. Soit V l'enveloppe convexe de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$, où $V_n = \{f \in H(\mathbb{C}^n)\ :\ \sigma_n(f) \leq 1\}$. Alors V est un voisinage de zéro dans $\varinjlim H(\mathbb{C}^n)$. Soit W un voisinage de zéro dans $\varinjlim H(\mathbb{C}^n)$ tel que $WW \subseteq V$. On peut supposer que W est l'enveloppe convexe de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$, où $W_n := \{f \in H(\mathbb{C}^n)\ :\ \sigma_{k_n}(f) \leq 1\}$, $k_n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel $\alpha_n > 0$, tel que $\alpha_n z_n \in W_n$. Donc pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(\alpha_1 z_1)^m \in W_1$. D'où pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $(\alpha_1 z_1)^m \alpha_n z_n \in V$. On a de plus $(\alpha_1 z_1)^m \alpha_n z_n \in V_n$, car il existe des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_l$ vérifiant $\sum\limits_{k=1}^{l} |\lambda_k| \leq 1$ et $f_k \in V_k,\ k = 1, ..., l$ tels que $(\alpha_1 z_1)^m \alpha_n z_n = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k f_k$. Pour $k \geq n$ on décompose $f_k = g_k + h_k$ telle que g_k est formée par tous les monômes qui dépendent seulement de $z_1, ..., z_{n-1}$. Il est simple de voir que $h_k \in V_k$ et $(\alpha_1 z_1)^m \alpha_n z_n = \sum\limits_{k=n}^{l} \lambda_k h_k$. Nous déduisons donc que $(\alpha_1 n)^m \alpha_n n = \sigma_n((\alpha_1 z_1)^m \alpha_n z_n) \leq 1$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Ceci implique que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2,\ \alpha_1 n \leq (\alpha_n n)^{-1/m}$. Ainsi $\alpha_1 n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible. $\square$

Ceci nous pousse à construire, dans ce qui suit, un *exemple d'algèbre commutative localement convexe à produit continu complète sur laquelle $H(\ell^\infty)$ opère et ne possédant aucune topologie m-convexe ayant les mêmes bornés.* On peut remarquer aussi le lien avec une question de A. Arosio [6] et un problème de M. Akkar et C. Nacir [3] sur la m-convexité des algèbres commutatives localement convexes à produit continu qui sont des limites inductives localement convexes d'algèbres de Banach. Pour plus de détails voir le dernier paragraphe.

Théorème 5.2. *Il existe une algèbre commutative $\mathcal{A}$ telle que :*
(1) $\mathcal{A}$ peut être munie d'une topologie τ d'algèbre localement convexe complète à produit continu telle que :
i. $H(\ell^\infty)$ opère sur $(\mathcal{A}, \tau)$;
ii. $(\mathcal{A}, \tau)$ est une limite inductive bornologique d'algèbres de Banach commutatives de dimension finie.
(2) $\mathcal{A}$ ne peut être munie d'une topologie m-convexe.

Preuve. Nous commençons par la *construction de l'algèbre $\mathcal{A}$*: Soient $\mathcal{K}$ un ensemble non dénombrable, $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{D} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathcal{K}}$. Pour tout $d \in \mathcal{D}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un entier noté d_n et un élément de $\mathcal{F}$ de cardinal d_n noté K_{dn} tels que

$d_{nk} = d_n$ pour tout $k \in K_{dn}$. Où d_{nk} désigne l'image de $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathcal{K}$ par d. Soit $\mathcal{A}$ l'espace vectoriel engendré par l'ensemble de symboles :

$$\{c,\ a_d,\ b_{n,J},\ c_{d,n,J'}\ :\ d \in \mathcal{D},\ n \in \mathbb{N},\ J \in \mathcal{F},\ J' \subset K_{dn}\}. \tag{5}$$

Ici, $X \subset Y$ signifie que $X \subseteq Y$ et $X \neq Y$. Donc tout élément x de $\mathcal{A}$ se représente sous la forme :

$$x = x_c c + \sum_{d \in \mathcal{D}} x_d a_d + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ J \in \mathcal{F}}} x_{n,J} b_{n,J} + \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ n \in \mathbb{N}}} \sum_{J \subset K_{dn}} x_{d,n,J} c_{d,n,J} \tag{6}$$

Où les coefficients sont nuls sauf un nombre fini. Pour tout $(d,n) \in \mathcal{D} \times \mathbb{N}$, l'élément $(d_n)^{d_n} c$ sera noté aussi $c_{d,n,K_{dn}}$. Nous munissons $\mathcal{A}$ du produit commutatif défini par :

$$b_{n,J} \cdot b_{n',J'} = \begin{cases} b_{n,J \cup J'} & \text{si } n = n'\ (n,n') \in \mathbb{N}^2,\ \text{et } J \cap J' = \emptyset \\ 0 & \text{si } n \neq n' \text{ ou } J \cap J' \neq \emptyset \end{cases} \tag{7}$$

$$a_d \cdot b_{n,J} = \begin{cases} c_{d,n,J} & \text{si } d \in \mathcal{D},\ n \in \mathbb{N} \text{ et } J \subseteq K_{dn} \\ 0 & \text{si } J \not\subseteq K_{dn} \end{cases} \tag{8}$$

et pour tous $(d,d') \in \mathcal{D}^2$, $(n,n') \in \mathbb{N}^2$ et $J, J' \subseteq K_{dn}$, on pose :

$$\begin{aligned} a_d \cdot a_{d'} &= c_{d,n,J} \cdot c_{d',n',J'} = a_d \cdot c_{d',n',J'} = 0, \\ c_{d,n,J} \cdot b_{n',J'} &= a_d \cdot (b_{n,J} \cdot b_{n',J'}) \end{aligned} \tag{9}$$

L'espace vectoriel $\mathcal{A}$ devient une algèbre associative et commutative.

Démonstration de (2). Supposons que $\mathcal{A}$ admet un sous-ensemble V absorbant ($\bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \cdot V = \mathcal{A}$), équilibré ($\lambda \cdot V \subseteq V$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$), idempotent ($V \cdot V \subseteq V$), tel que $c \notin V$. Pour tout $(n,k) \in \mathcal{D} \times \mathcal{K}$, il existe $p_{n,k} \in \mathbb{N}$ tel que $b_{n,\{k\}} \in p_{n,k} V$. Soit d l'élément de $\mathcal{D}$ définie par: $d_{nk} = n p_{n,k}$. Alors il existe $q_d \in \mathbb{N}$ tel que $a_d \in q_d V$ et on a :

$$c = (\frac{1}{d_n})^{d_n} a_d b_{n,K_{dn}} = (\frac{1}{d_n})^{d_n} a_d \prod_{k \in K_{dn}} b_{n,\{k\}} \in (\frac{1}{d_n})^{d_n} q_d (\frac{d_n}{n})^{d_n} V^{d_n+1} \tag{10}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c \in (q_d/n^{d_n})V \subseteq (q_d/n^n)V$. Ce qui est absurde.

Démonstration de (1). Nous définissons d'abord la *topologie de* $\mathcal{A}$: Soit $\mathcal{P}$ la famille de toutes les semi-normes P sur $\mathcal{A}$, telles que il existe $\mathcal{D}_P \subseteq \mathcal{D}$ et $\mathcal{F}_P \subseteq \mathcal{F}$ dénombrables et $\phi_P : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ vérifiant :

$$\{K_{dn}\ :\ n \in \mathbb{N},\ d \in \mathcal{D}_P\} \subseteq \mathcal{F}_P \text{ et } \ (J,J') \in \mathcal{F}_P^2 \iff J \cup J' \in \mathcal{F}_P\ ; \tag{11}$$

$$\sup_{d \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_P} (P(a_d)) < \infty\ ; \tag{12}$$

$$P(b_{n,J}) \leq \phi_P(n, card(J)) \ \ (n \in \mathbb{N},\ J \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_P)\ ; \tag{13}$$

$$P(c_{d,n,J}) \leq \phi_P(n, card(J)) \ \ (d \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_P,\ J \subset K_{dn}) \tag{14}$$

La topologie τ définie par $\mathcal{P}$ induit sur tout sous-espace de $\mathcal{A}$ de dimension dénombrable sa topologie localement convexe maximale. Il suffit de voir que pour toute semi-norme $\|\ \|$ sur un sous-espace engendré par un sous-ensemble dénombrable de celui donné par la formule (5), on obtient un élément de $\mathcal{P}$ en prolongeant $\|\ \|$ par zéro au sous-espace supplémentaire engendré par le reste des symboles. Pour tout $P \in \mathcal{P}$, soit $\mathcal{A}_P$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$ engendré par :

$$\{c,\ a_d,\ b_{n,J},\ c_{d,n,J'}\ :\ d \in \mathcal{D}_P,\ n \in \mathbb{N},\ J \in \mathcal{F}_P,\ J' \subset K_{dn}\}$$

Alors $\mathcal{A}_P$ est une algèbre à base de Hamel dénombrable. Donc, d'après [Théorème 2, [33]], $\mathcal{A}_P$ munie de τ est une algèbre localement convexe à produit continu. Ainsi il existe une semi-norme P' sur $\mathcal{A}_P$ telle que $P(x) \leq P'(x)$ et $P(xy) \leq P'(x)P'(y)$ pour tout $(x, y) \in (\mathcal{A}_P)^2$. Définissons une semi-norme Q sur A comme suit :

$$Q(c) = \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ n > P'(c) + \sup_{d \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_P} (P(a_d))\} \tag{15}$$

$$\phi_Q \ : \ \mathbb{N}^2 \to \ \mathbb{N}; \ (n, m) \to \ Q(c) \cdot (\max_{1 \leq k \leq 2m} \phi_P(n, k)) \cdot (2m)^{2m} \tag{16}$$

$$Q(a_d) = \begin{cases} P'(a_d) & \text{si} \quad d \in \mathcal{D}_P \\ Q(c) & \text{si} \quad d \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_P \end{cases} \tag{17}$$

$$Q(b_{n,J}) = \begin{cases} \phi_Q(n, card(J)) \cdot (P'(b_{n,J}) + 1) & \text{si} \quad J \in \mathcal{F}_P \\ \phi_Q(n, card(J)) & \text{si} \quad J \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_P \end{cases} \tag{18}$$

$$Q(c_{d,n,J}) = \begin{cases} P'(c_{d,n,J}) & \text{si} \quad d \in \mathcal{D}_P, \ J \subset \mathcal{K}_{dn} \\ \phi_Q(n, card(J)) & \text{si} \quad d \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_P, \ J \subset \mathcal{K}_{dn} \end{cases} \tag{19}$$

et maintenant pour tout $x \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} Q(x) = \quad & |x_c|Q(c) + \sum_{d \in \mathcal{D}} |x_d|Q(a_d) + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ J \in \mathcal{F}}} |x_{n,J}|Q(b_{n,J}) \\ & + \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ n \in \mathbb{N}}} \sum_{J \subset K_{dn}} |x_{d,n,J}|Q(c_{d,n,J}) \end{aligned} \tag{20}$$

Alors $Q \in \mathcal{P}$, de plus on peut poser $\mathcal{D}_Q = \mathcal{D}_P$, $\mathcal{F}_Q = \mathcal{F}_P$, et pour tout $(x, y) \in \mathcal{A}^2$, $P(x) \leq Q(x)$ et $P(xy) \leq Q(x)Q(y)$. Ainsi $(\mathcal{A}, \tau)$ est une algèbre localement convexe à produit continu. De plus la topologie τ peut être définie par une famille de semi-normes $\mathcal{Q}$ vérifiant (20) et qui induit sur tout sous-espace vectoriel de dimension dénombrable sa topologie localement convexe maximale.

Remarquons que *les sous ensembles bornés dans* $(\mathcal{A}, \tau)$ *sont de dimension finie*, c'est à dire la dimension de tout sous espace vectoriel engendré par un borné est finie. Ceci découle du fait que tout sous ensemble borné dénombrable B est de dimension finie, en effet: sinon, soit $\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ une base de Hamel de span(B), on peut définir une forme linéaire f sur span(B) par $f(x_n) = n$. La topologie induite sur span(B) par τ n'est autre que la topologie localement convexe maximale, ainsi f est continue sur span(B) et par suite $f(B)$ est borné ce qui est absurde.

Maintenant puisque $\mathcal{A}$ *est engendrée par des éléments nilpotents,* $(\mathcal{A}, \tau)$ *est la limite inductive bornologique d'algèbres de Banach commutatives de dimension finie* $(alg(G))_{G \in \mathcal{G}}$, où $\mathcal{G}$ désigne l'ensemble des parties finies de l'ensemble des symboles générateurs de $\mathcal{A}$ ordonné par inclusion et $alg(G)$ est l'algèbre engendrée par G. Ainsi, $\mathcal{A}$ *est Mackey-complète et* $H(\ell^\infty)$ *y opère.* Ceci montre i, et ii.

Montrons que $(\mathcal{A}, \tau)$ est *complète*: Puisqu'on ne s'intéresse pas, maintenant, à la multiplication et par raison de simplicité nous adoptons une nouvelle notation pour les symboles engendrant l'algèbre. Soit donc $\mathcal{R}$ l'ensemble :

$$\{c\} \cup \mathcal{D} \cup \mathbb{N} \times \mathcal{F} \cup \mathcal{D} \times \mathbb{N} \times \mathcal{F}$$

où la réunion est supposée disjointe. Ainsi on peut noter sans confusion une base, de Hamel, de $\mathcal{A}$ par $\{t_J \ : \ J \in \mathcal{R}\}$. Notons par $\{t_J^* \ : \ J \in \mathcal{R}\}$ sa base duale, c'est à dire que t_J^*, $J \in \mathcal{R}$, est la forme linéaire définie sur $\mathcal{A}$ par $t_J^*(t_J) = 1$ et $t_J^*(t_{J'}) = 0$ si $J' \neq J$. Ainsi pour tout élément a de $\mathcal{A}$ on a $a = \sum_{J \in \mathcal{R}} a_J t_J$, où $a_J = t_J^*(a)$. Pour tout $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$, $T_{\mathcal{R}'}$ désignera la projection définie sur $\mathcal{A}$ par $a \mapsto \sum_{J\in\mathcal{R}'} a_J t_J$. Il est clair que $a = T_{\mathcal{R}'}(a) + T_{\mathcal{R}\setminus\mathcal{R}'}(a)$ et pour tout $\| \ \| \in \mathcal{Q}$ on a :

$$|t_J^*(a)| \leq \|a\| = \|T_{\mathcal{R}'}(a)\| + \|T_{\mathcal{R}\setminus\mathcal{R}'}(a)\| \ .$$

Soit $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une suite généralisée de Cauchy dans $(\mathcal{A},\tau)$, pour tout élément J de $\mathcal{R}$ la suite $(t_J^*(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ est de Cauchy donc elle converge vers un scalaire a_J. L'ensemble $\{J \in \mathcal{R} \ : \ a_J \neq 0\}$ est fini, sinon il contiendra un sous-ensemble dénombrable infini $\mathcal{R}'$, la suite $(T_{\mathcal{R}'}(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ est de Cauchy dans l'espace complet $\mathcal{A}_{\mathcal{R}'}$ donc elle converge vers un élément a'. Pour tout $J \in \mathcal{R}'$, $a'_J = t_J^*(a') = \lim_{\lambda\in\Lambda} t_J^*(T_{\mathcal{R}'}(x_\lambda)) = a_J$, ainsi $\mathcal{R}'$ est fini, ce qui est absurde. D'où $a = \sum_{J\in\mathcal{R}} a_J t_J \in \mathcal{A}$, en remplaçant $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ par $(x_\lambda - a)_{\lambda\in\Lambda}$ on peut supposer que pour tout $J \in \mathcal{R}$, $\lim_{\lambda\in\Lambda} t_J^*(x_\lambda) = 0$.

La suite $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers zéro dans $(\mathcal{A},\tau)$. Sinon, il existe $\| \ \| \in \mathcal{Q}$ telle que $\lim_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\| = M > 0$. Soit $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, $\|x_\lambda - x_{\lambda_0}\| < M/2$. Notons $S = \{J \in \mathcal{R} \ : \ t_J^*(x_{\lambda_0}) \neq 0\}$ et $S' = \mathcal{R} \setminus S$. On a pour tout $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\|T_{S'}(x_\lambda)\| \leq \|T_{S'}(x_\lambda)\| + \|T_S(x_\lambda) - x_{\lambda_0}\| = \|x_\lambda - x_{\lambda_0}\| < \frac{1}{2}M$$

D'autre part l'ensemble S est fini donc $\lim_{\lambda\in T} \|T_S(x_\lambda)\| = 0$ et on a $\|x_\lambda\| = \|T_S(x_\lambda)\| + \|T_{S'}(x_\lambda)\|$. La contradiction se déduit du fait que :

$$M = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|T_{S'}(x_\lambda)\| \leq \frac{M}{2} \ . \ \square$$

6. Remarques et commentaires

6.1. *Les résultats* de ce papier *restent vrais* si on suppose seulement que *le produit est séparément borné*. Ainsi, on peut les étendre au cas d'une algèbre bornologique localement convexe dans le sens de [14], [15] et [27].

6.2. *Si $H(\mathbb{C})$ opère absolument sur une algèbre commutative localement convexe A*, alors *A est une réunion filtrante croissante d'algèbres m-convexes métrisables* avec la *continuité des injections canoniques*: En effet, d'après le théorème 4.2, pour tout entier n, $H(\mathbb{C}^n)$ opère absolument sur A. Il suffit donc de transporter sur A la structure de $(\mathcal{P}(\mathbb{C}^n), (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}})$ par le morphisme, continu, d'algèbres $f(z_1, ..., z_n) \in (\mathcal{P}(\mathbb{C}^n), (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}) \to f(b_1, ..., b_n) \in A$ et ce pour tout $(b_1, ..., b_n) \in A$. Cette technique a été utiliser dans [Théorème II.9, [7]], en prenant $H(\mathbb{C}^n)$ au lieu de $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$, pour montrer que *toute algèbre commutative localement convexe A sur laquelle $H(\mathbb{C}^n)$ opère*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est une *réunion filtrante croissante d'algèbres m-convexes de Fréchet* avec la continuité des injections canoniques. Une telle réunion n'est *pas, en général, bornologique même si A est de Banach*. C'est le cas de l'algèbre $\ell^1(I) := \{(\lambda_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{C} \ : \ \|(\lambda_i)_{i\in I}\| := \sum_{i\in I} |\lambda_i| < \infty\}$, où les lois sont définies ponctuellement et I est un ensemble de cardinal supérieur strictement à celui de $H(\ell^\infty)$, car la boule unité ne peut être contenue dans l'image de $H(\mathbb{C}^n)$ pour aucune application.

6.3. On dira qu'une algèbre localement convexe A est localement de Baire (*locally-Baire* [22]) si tout borné de A est contenu dans un borné absolument convexe B tel que (E_B, J_B) est un espace de Baire. Il est évident que *toute algèbre Mackey-complète et localement de Baire*. Les techniques utilisées dans la démonstration du théorème 4.2, permettent de conclure que *si $H(\mathbb{C})$ opère absolument sur une algèbre localement de Baire commutative A*, alors *$H(\ell^\infty)$ y opère absolument*.

En combinant ceci avec la proposition 4.1, on peut conclure que *si $H(\mathbb{C})$ opère absolument sur une algèbre A localement convexe métrisable commutative et localement de Baire*, alors *A est m-convexe*. C'est une généralisation du [Théorème 1, [19]] qui utilise l'argument de

Baire localement.
Soit maintenant A une *algèbre localement convexe de Baire à produit continu sur laquelle* $H(\mathbb{C})$ *opère absolument*. D'après le [Théorème 9.5, [27]] la suite des applications : $A \to A$; $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, est équicontinue. *Dans le cas commutatif*, la formule de polarisation entraîne que A *est m-convexe*. Une démonstration complète est présentée, aussi, dans [11].

6.4. L'algèbre $C[0,1]$ des fonctions continues sur $[0,1]$ munie de la topologie définie par les semi-normes $\|f\|_k = (\int_0^1 |f(t)|^k dt)^{1/k}$, $k \in \mathbb{N}$, est une algèbre commutative à produit continu métrisable sur laquelle $H(\mathbb{C}^n)$ opère, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais elle n'est pas m-convexe étant une sous-algèbre dense dans l'algèbre L^ω d'Arens [5]. Ainsi $H(\ell^\infty)$ n'y opère pas absolument. Donc la *Mackey-complétude dans le théorème 4.2 n'est pas superflue*.

6.5. *Si* $H(\mathbb{C}^n)$ *opère sur une algèbre localement convexe* (A,τ), alors *elle opère sur* A *munie de toute topologie localement convexe moins fine que* τ. Ceci *ne reste pas vrais pour l'opération de* $H(\ell^\infty)$: Par exemple, d'après la remarque précédante, $H(\ell^\infty)$ n'opère pas sur $C[0,1]$ munie de la topologie induite par l'algèbre L^ω d'Arens, cette topologie est moins fine que celle de la convergence uniforme sur $[0,1]$ qui rend $C[0,1]$ une algèbre de Banach. Ceci provient du fait que pour une topologie moins fine on a plus de bornés.

6.6. Soit $(X^{(i)})_{(i)\in I}$, $I = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n$, une suite de symboles. Pour $(i) \in \mathbb{N}^n$, $|(i)| = n$. Considérons l'*espace* Σ *de séries formelles* défini par :

$$\{f = f_0 + \sum_{(i)\in I} f_{(i)}X^{(i)} \ : \ \sigma'_n(f) = |f_0| + \sum_{(i)\in I} |f_{(i)}|n^{|(i)|} < \infty \ (n \in \mathbb{N})\}.$$

En munissant Σ de la *multiplication* définie par

$$X^{(i_1,\ldots,i_p)}X^{(j_1,\ldots,j_q)} = X^{(i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q)} \ .$$

Nous obtenons l'*algèbre de Fréchet non commutative* analogue à $H(\ell^\infty)$. Cette algèbre à été considérée dans [10]. En identifiant X à la suite bornée $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $X_n = X^{(n)}$, l'application : $H(\ell^\infty) \to \Sigma$; $f \mapsto f(X)$ permet d'identifie $H(\ell^\infty)$ à un sous-espace fermé de Σ. Les résultats analogues aux Définition 3.1, Lemme 3.2 et Proposition 3.3 permettent de conclure que $H(\ell^\infty)$ opère (resp. opère absolument) sur une algèbre localement convexe A si et seulement si Σ y opère (resp. opère absolument).
De plus, lorsque Σ (resp. $H(\ell^\infty)$) opère sur une algèbre (resp. algèbre commutative) localement convexe A, alors pour toute suite bornée $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A, il existe un morphisme d'algèbres continu $\Phi_{b,\Sigma} : \Sigma \to A$ (resp. $\Phi_{b,H(\ell^\infty)} : H(\ell^\infty) \to A$) défini par $\Phi_{b,\Sigma}(X_n) = b_n$ (resp. $\Phi_{b,H(\ell^\infty)}(z_n) = b_n$). Ainsi, pour tout $f \in \Sigma$ (resp. $f \in H(\ell^\infty)$) on a $\Phi_{b,\Sigma}(f) = f(b)$ (resp. $\Phi_{b,H(\ell^\infty)}(f) = f(b)$).
Pour $A = H(\ell^\infty)$, le morphisme $\Phi_{b,\Sigma}$ devient surjectif. Ainsi, $H(\ell^\infty)$ *est isomorphe à une algèbre m-convexe de Fréchet quotient de* Σ.

6.7. Plusieurs objets utilisés dans ce papier sont apparus pour approcher le *problème de Michael* [18]. En fait E.A. Michael a posé deux problèmes : un caractère (forme linéaire multiplicative) sur une algèbre m-convexe complète est-il borné? si de plus l'algèbre est de Fréchet les caratères sont-ils continus? D'après un résultat de P.G. Dixon et D.H. Fremlin les deux problèmes sont équivalents. Ce résultat est retrouvé par M. Akkar [2] en montrant que toute algèbre m-convexe complète est une limite inductive bornologique d'algèbres m-convexes de Fréchet. Par la même raison, nos résultats permettent de conclure que *dans le cas commutatif ce problème est équivalent au problème*: une algèbre (A,τ) localement convexe commutative Mackey-complète dont $H(\mathbb{C})$ opère est elle à caractères bornés? Dans *le cas non* nécessairement *commutatif, le problème de Michael est équivalent au problème*: une algèbre (A,τ) localement convexe Mackey-complète dont $H(\ell^\infty)$ opère est-elle à caractères bornés? Cette équivalence peut être obtenue, aussi, en remarquant que l'*opération de* $H(\ell^\infty)$ *est équivalente à celle de* Σ. En effet, supposons que l'algèbre (A,τ) possède un caractère non continu ξ, ainsi il existe une suite bornée $b=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(\xi(b_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\xi o\Phi_{b,\Sigma}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée. Nous avons donc $\xi o\Phi_{b,\Sigma}$ est un caractère non continu sur l'algèbre m-convexe de Fréchet $(\Sigma,(\sigma'_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Signalons que le problème de Michael est toujours ouvert, les algèbres Σ et $H(\ell^\infty)$ sont appelées *algèbres tests*. Pour savoir plus sur se problème voir par exemple ([1], [8], [12]).

6.8. La m-convexité dans la classe d'algèbres limites inductives localement convexes d'algèbres m-convexes métrisables a intéressé plusieurs auteurs. Dans [6] A. Arosio a posé la question : une algèbre limite inductive localement convexe d'algèbres normées est elle m-convexe. Un contre-exemple a été donné dans le cas non commutative par M. Oudadess [23], en considérant l'algèbre $B(E)$ des opérateurs fortement bornés sur un espace de Fréchet non normable E. Une extension au cas commutative a été donner par M. Akkar et C. Nacir [Proposition 3.6, [3]].
L'algèbre $(A,\tau^\times)$ construite dans le théorème 5.2, donne un exemple d'*algèbre localement convexe complète limite inductive localement convexe et réunion filtrante croissante d'algèbres de Banach commutatives de dimension finie*. Mais *il n'existe* sur une telle algèbre *aucune topologie m-convexe*. C'est une *extention de* [Proposition 3.6, [3]].
Un autre exemple peut être déduit de l'algèbre construite dans [13], munie de la topologie localement convexe maximale. Cette algèbre est une limite inductive localement convexe d'un système inductif, formé par des sous-algèbres de Banach commutatives de dimension finie, qui peut être indexé par un ensemble I tel que $card(I)$ est le premier cardinal non dénombrable. Ceci est optimal car toute algèbre limite inductive localement convexe, dénombrable, d'algèbres de Banach est m-convexe [Théorème 2.1, [3]].

6.9. L'algèbre bornologique $(A,\tau^\times)$ associée à l'algèbre (A,τ) construite dans le théorème 5.2 n'est pas à produit continu. En effet, $\tau^\times$ n'est autre que la topologie localement convexe maximale, puisque les bornés de $(A,\tau^\times)$ sont exactement les bornés de dimension finie. Les techniques de la démonstration du [Théorème 1, [33]], appliqués aux éléments $b_{1,J},\ J\in\mathcal{F}$, permettent de conclure. Ainsi, en combinant ceci avec ce qui précède, nous nous sommes amenés à poser le problème suivant :

Problème 6.10. *Une algèbre localement convexe bornologique à produit continu sur laquelle* $H(\ell^\infty)$ *opère est-elle m-convexe ?*

Nous ne savons pas répondre à ce problème même dans les cas particuliers suivants :

(1) Cas d'une algèbre limite inductive localement convexe dénombrable d'algèbres m-convexes de Fréchet.

(2) Cas d'une algèbre limite inductive localement convexe d'algèbres de Banach. Cette version a été soulever dans [3].

(3) Cas d'une algèbre limite inductive localement convexe d'algèbres de Banach de dimension finie.

Remerciments

L'auteur tient à remercier le professeur A. Mallios pour ses remarques pertinantes qui ont permis d'avoir la forme actuelle de ce papier, ainsi que le professeur M. Chidami pour ses conseils et son soutien permanent.

Addendum

Dans leur article [Inductive limits of locally m-convex algebras, Bull. Belg. Math. Soc. 11 (2004), pp. 149-152.], T. Heintz et J. Wengenroth ont démontré que *toute algèbre commutative limite inductive localement convexe dénombrable d'algèbres m-convexes de Fréchet qui'est à produit continu est m-convexe.* Ceci répond positivement, pour les algèbres commutatives, au cas particulier (1) du problème 6.10. Leur résultat confirme aussi la proposition 5.1.

References

[1] Z. Abdelali, M. Akkar, M. Chidami. Une classe d'algèbres de Fréchet à caractères continues. Rend. Circolo. Mate. Palermo. Serie II, Tomo L. (2001), pp. 199-208.

[2] M. Akkar, Sur la structure des algèbres topologiques localement multiplicativement-convexes, C.R.Acad.Sc. Paris, t. (279), série A (1974), pp. 941-944.

[3] M. Akkar, C. Nacir, Structure m-convexe d'une algèbre limite inductive localement convexe d'algèbres de Banach, Rend. Sem. Univ. Padova, 95 (1996), pp. 107-126.

[4] M. Akkar, L. Oubbi, M. Oudadess, Algèbres A-convexes et problème de Michael, Proc. Amer. Math. Soc. 110 (1990), pp. 97-101.

[5] R. Arens, The space L^ω and convex topological rings, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), pp. 913-935.

[6] A. Arosio, Locally convex inductive limits of normed algebras, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 51 (1974), pp. 333-359.

[7] R. Choukri, A. El Kinani, M. Oudadess, Fonctions entières et m-convexité, Bull. Belg. Math. Soc. 8 (2001), pp. 67-73.

[8] D. Clayton, A reduction of the continuous homomorphism problem for F-algebras. Rochy Mountain J. Math. 5 (1975), pp. 337-344.

[9] A.C. Cochran, R. Koewn, C.R. Williams, On a class of topological algebras, Pac. J. Math. 34 (1970), pp. 17-25.

[10] P.G. Dixon, J. Esterle, Michael problem and the Poincaré-Fatou-Bieberbach phenomenon, Bull. Amer. Math. Soc. 15(2) (1986), pp. 127-187.

[11] A. El Kinani, M. Oudadess, Entire functions and m-convex structure in commutative Baire algebras, Bull. Belg. Math. Soc. 4 (1997), pp. 685-687.

[12] J. Esterle, Picard's theorem, Mittag-Leffler methods, and continuity of characters on Fréchet algebras, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 29 (1996), pp. 539-582.

[13] R. Frankiewicz, D. Plebanek, An example of a non-topologizable algebra, Studia Math. 116 (1995), pp. 85-87.

[14] H. Hogbe-Nlend, Les fondements de la théorie spectrale des algèbres bornologiques, Separata Bolitim Soc. Brasileura Mate. 3(1) (1972).

[15] H. Hogbe-Nlend, Théorie des bornologies et applications, Springer Lectures Notes, 213 (1971).

[16] G. Köthe, Topological Vector Spaces, Springer-Verlag 139, tome I, Berlin (1969).

[17] A. Mallios, Topological Algebras. Selected Topics, North-Holland Math. Studies 124, Amsterdam (1986).

[18] E.A. Michael, Locally multiplicatively convex topological algebras, Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952).

[19] B.S. Mityagin, S. Rolewicz, W. Żelazko, Entire functions in B_0-algebras, Studia Math. 21 (1962), pp. 291-306.

[20] V. Müller, On topologizable algebras. Studia. Math 99 (1991), pp. 149-153.

[21] C. Nacir, Sur les limites inductives localement convexes ou bornologiques convexes d'algèbres de Fréchet, Thèse Sc. Math., Univ. Mohammed V, Fac. Sc. Rabat, Maroc, (1995).

[22] L. Oubbi, Pseudo-Banach structure in locally convex algebras, Rend. Circolo Mat. Palermo, Serie II, XLVI (1997), pp. 390-394.

[23] M. Oudadess, Inductive limits of normed algebras and m-convex structures, Proc. Amer. Math. Soc. 109 (1990), pp. 399-401.

[24] M. Oudadess, Théorèmes de structures et propriétés fondamentales des algèbres uniformément A-convexes, C.R.Acad.Sc. Paris, (296), série I (1983), pp. 851-853.

[25] P. Pérez Carreras, Z. Bonet, Barrelled locally convex speces, North-Holland, 131 (1987).

[26] S.A. Saxon, A.M. Sánchez Ruiz, Dual local completeness, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), pp. 1063-1070.

[27] P. Turpin, Convexités dans les espaces vectoriels topologiques généraux, Dissertationes Mathematicae, Warszawa (1976).

[28] S. Warner, Inductive limits of normed algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), pp. 190-216.
[29] S. Warner, Weakly topologized algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), pp. 314-316.
[30] W. Żelazko, Selected Topics in Topological Algebras, Lect. Notes series 31 (1971), Matematisk Institut. Aarhus Universitet.
[31] W. Żelazko, A non m-convex algebra on which operate all entire functions, Ann. Pol. Math. 46 (1985), pp. 389-394.
[32] W. Żelazko, Concerning entire functions in B_0-algebras, Studia Math. 110(3) (1994), pp. 283-290.
[33] W. Żelazko, On topologization of countably generated algebras, Studia Math. 112(1) (1994), pp. 83-88.

Université Mohammed V; Faculté des Sciences; Département de Mathématiques et Informatique; B.P 1014 Rabat, Maroc
E-mail address: abdelali@fsr.ac.ma, zinelab@hotmail.com