

CLÔTURE LOCALE DES ALGÈBRES TOPOLOGIQUES

R.A.HASSANI, A.BLALI AND A.OUKHOUYA

Received November 19, 2002; revised July 9, 2003

ABSTRACT. In this paper we introduce the notion of a locally closing algebra and give its form explicitly, along with applications.

Introduction

On sait que dans une algèbre de Banach régulière toute fonction α à valeurs complexes définie sur le spectre et ayant une représentation locale par les éléments de E^\wedge , la transformée de Gelfand de E , coïncide globalement avec un élément de E^\wedge , (i.e., $\exists x \in E$ tel que $\alpha = \widehat{x}$) [5: p. 191, Théorème 1]. Plusieurs auteurs se sont intéressés à étendre ce résultat à d'autres classes d'algèbres topologiques plus larges, notamment les algèbres de Fréchet par R.M Brooks [4: p. 271, Theorem 2.6], les algèbres topologiques à spectres compacts par A.Mallios [8: p. 307, Lemma 2.1] et les algèbres uniformes [13: p.279, Theorem 2]. Dans les différentes situations mentionnées ci-dessus la complétude de l'algèbre fait partie des conditions suffisantes pour avoir le théorème local. Cependant, l'Exemple 2.1 montre que cette condition n'est pas, en général, indispensable. Ceci nous a incité à introduire la plus grande classe d'algèbres topologiques vérifiant le théorème local que nous avons appelées algèbres **topologiques locales** [Définition 2.1]. Il est bien connu que toute algèbre topologique semi-simple E s'injecte dans l'algèbre $C_c(\mathcal{M}(E))$ des fonctions à valeurs complexes continues sur le spectre $\mathcal{M}(E)$, munie de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathcal{M}(E)$. Comme une telle algèbre est locale, on est amené, d'une manière naturelle, à étudier la plus petite algèbre topologique locale contenant E . Pour ceci nous définissons deux nouvelles notions : l'**extension locale** [Définition 2.2] et la **clôture locale** [Définition 2.3]. Nous montrons l'existence de la clôture locale [Théorème 2.1] et nous donnons sa forme explicite que nous utilisons pour déterminer la clôture locale de quelques algèbres topologiques.

1 Préliminaires E désigne une \mathcal{T} -algèbre topologique commutative, $\mathcal{M}(E)$ son spectre (L'ensemble des caractères continus non nuls de E) muni de la topologie faible et $C_c(\mathcal{M}(E))$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur $\mathcal{M}(E)$ munie de la topologie de la convergence uniformes sur les parties compactes de $\mathcal{M}(E)$. On note:

$$\mathcal{G} : E \longrightarrow C_c(\mathcal{M}(E))$$

la transformée de Gelfand de E définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x) &\equiv \widehat{x} : \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathcal{T} \\ f &\longmapsto \widehat{x}(f) = f(x), \end{aligned}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* primary: 46H05, 46H20. secondary: 46M40.
Key words and phrases. Algèbres topologiques, Transformée de Gelfand, Spectre.

pour chaque $x \in E$. L'image de E par la transformée de Gelfand sera notée E^\wedge . E est dite semi-simple si sa transformée de Gelfand est injective.

Définition 1.1. On dit qu'une fonction $\alpha : \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathcal{C}$, appartient localement à E^\wedge si pour tout f appartenant à $\mathcal{M}(E)$, il existe un élément x de E et un voisinage U de f tels que les restrictions à U , $\alpha|_U$ et $\hat{x}|_U$, coïncident.

2 Clôture locale d'une algèbre topologique Donnons d'abord la définition d'une algèbre locale (voir aussi A.Mallios[11])

Définition 2.1. Une algèbre topologique E est dite locale, si toute fonction α appartenant localement à E^\wedge , lui appartient globalement (i.e. $\exists x \in E$ tel que $\alpha = \hat{x}$; où \hat{x} est la transformée de Gelfand de x).

Introduisons maintenant la notion d'extension locale.

Définition 2.2. On appelle extension locale de E , toute algèbre topologique semi-simple F vérifiant : 1) $E \subset F$ (injection d'algèbres), 2) $\mathcal{M}(F) = \mathcal{M}(E)$ (à un homéomorphisme près) et 3) F est locale.

Exemple 2.3. Si E est semi-simple, l'algèbre semi-simple $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$ est une extension locale de E . En effet : E s'injecte dans $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$, car E est semi-simple. $\mathcal{M}(\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))) \simeq \mathcal{M}(E)$. [7: p. 223, Theorem 1.2] et comme toute fonction localement continue est continue, $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$ contient toutes les fonctions qui lui appartiennent localement, d'où $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$ est locale.

Remarque 2.4. Toute extension locale de E contient les éléments appartenant localement à E^\wedge .

Théorème 2.5. Toute intersection d'extensions locales de E est une extension locale de E .

Preuve: Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'extensions locales de E et $H = \bigcap_{i \in I} E_i$.

1) $E \subset H$ car pour tout $i \in I$, $E \subset E_i$.

2) On a $H = \bigcap_{i \in I} E_i = \varprojlim E_i$, il résulte de [7: p. 175, Lemma 7.1] que $\mathcal{M}(H) = \varinjlim \mathcal{M}(E_i)$.

Comme $\mathcal{M}(E_i) = \mathcal{M}(E)$ pour tout $i \in I$, $\mathcal{M}(H) = \mathcal{M}(E)$.

3) Il suffit de vérifier que H est locale: Soit $\alpha : \mathcal{M}(H) \longrightarrow \mathcal{C}$ une fonction appartenant localement à H . Pour tout $i \in I$, α appartient localement à E_i car $\mathcal{M}(E_i) = \mathcal{M}(H)$ et $H \subset E_i$ tel que $\alpha = \hat{x}_i$; par suite $\alpha \in \bigcap_{i \in I} E_i^\wedge$. D'autre part, la semi-simplicité des E_i

permet de les injecter dans l'algèbre $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$; on en déduit que $E_i^\wedge = \mathcal{G}(E_i)$, pour tout $i \in I$, \mathcal{G} étant la transformée de Gelfand de $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$. \mathcal{G} est injective donc

$$\bigcap_{i \in I} E_i^\wedge = \bigcap_{i \in I} \mathcal{G}(E_i) = H^\wedge.$$

D'où α appartient à H^\wedge . Par suite H est une extension locale de E . ■

Toutes les extensions locales de E s'injectent dans l'algèbre $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$; leur intersection est la plus petite extension locale de E .

Définition 2.6. Soit E une algèbre topologique. On appelle la clôture locale de E la plus petite extension locale de E munie de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathcal{M}(E)$ (c'est la restriction de la topologie de $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$).

Le théorème suivant explicite les éléments de la clôture locale (voir A.Mallios [11]).

Théorème 2.7. *Soit E une algèbre topologique semi-simple de spectre $\mathcal{M}(E)$ La clôture locale de E est la sous algèbre \tilde{E} de $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$ formée des éléments appartenant localement à E^\wedge . c'est-à-dire :*

$$\tilde{E} = \{ \alpha : \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathcal{C} , \text{ tel que } \alpha \text{ appartient localement à } E^\wedge \} \subset \mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$$

Preuve : En tenant compte de la Remarque 2.4, il suffit de vérifier que \tilde{E} est une extension locale.

Il est clair que \tilde{E} est une algèbre topologique, munie de la topologie relative de $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$ contenant E car cette dernière est semi-simple.

Vérifions que $\mathcal{M}(\tilde{E}) = \mathcal{M}(E)$ à un homéomorphisme près. On note

$I(\tilde{E})$: l'ensemble des idéaux maximaux fermés de \tilde{E} , et pour tout $A \subset \mathcal{M}(E)$

$$J_A = \{ \alpha \in \mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E)), \text{ tel que } \alpha(f) = 0 \ \forall f \in A \} \text{ et } I_A = J_A \cap \tilde{E}.$$

On considère l'application

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{M}(E) &\longrightarrow I(\tilde{E}) \\ f &\longmapsto I_f \end{aligned}$$

- θ est injective:

Soit $(f, g) \in \mathcal{M}(E)^2$ tel que $f \neq g$ et $x \in E$ tel que $f(x) \neq g(x)$. Deux cas se présentent :

- 1) $f(x) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$.
- 2) $f(x) = 0$ ou bien $g(x) = 0$.

Si le premier cas est vérifié, soient : $\lambda = f(x)$ et $y = x^2 - \lambda x$. On a

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x^2) - \lambda f(x) = f(x^2) - f(x)^2 = 0, \\ g(y) &= g(x^2) - \lambda g(x) = g(x)^2 - f(x)g(x) = g(x)(g(x) - f(x)) ; \end{aligned}$$

$g(y) \neq 0$, car $g(x) \neq 0$ et $f(x) \neq g(x)$, d'où $I_f \neq I_g$.

Pour le deuxième cas on a ou bien $\hat{x} \in I_f$ ou bien $\hat{x} \in I_g$, par suite $I_f \neq I_g$.

- θ est surjective :

soit I un idéal maximal fermé de \tilde{E} , il existe un idéal maximal fermé J de $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$ tel que $I = J \cap \tilde{E}$. On considère l'ensemble

$$A = \bigcap_{\alpha \in J} Z(\alpha) \subset \mathcal{M}(E), \text{ où } Z(\alpha) = \{ f \in \mathcal{M}(E) \text{ tel que } \alpha(f) = 0 \}.$$

J_A est l'adhérence de J [7: p. 221, Lemma 1.5], on en déduit que $J_A = J$ car J est fermé. Soit f un élément quelconque de A ; on a $J_A \subset J_f$, donc $J \subset J_f$ et il existe $x \in E$ tel que $\hat{x} \notin J_f$ (car f est non nul) d'où $J_f \neq \mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$; et comme J est un idéal maximal de $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$, $J_f = J$ et par suite $\tilde{E} \cap J_f = \tilde{E} \cap J$, d'où $I = I_f$. On en déduit que θ est bijective et $\mathcal{M}(\tilde{E}) = \mathcal{M}(E)$ à une bijection près.

La topologie de $\mathcal{M}(E)$ coïncide avec la topologie initiale des applications \hat{x} ($x \in E$), $E \subset \tilde{E} \subset \mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$ et $\mathcal{M}(\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))) = \mathcal{M}(E)$ [8: p. 223, Theorem 1.2]; donc $\mathcal{M}(\tilde{E}) = \mathcal{M}(E)$ à un homéomorphisme près.

Il reste à montrer que \tilde{E} est locale.

Soit ϕ une fonction appartenant localement à \tilde{E} . Pour $f \in \mathcal{M}(\tilde{E})$, il existe un voisinage U de f et $\alpha \in \tilde{E}$ tels que : $\phi/U = \alpha/U$. α appartient localement à E^\wedge (par définition \tilde{E}) et il existe un voisinage V de f et un élément x de E tels que $\alpha/V = \hat{x}/V$, d'où

$$\phi/U \cap V = \hat{x}/U \cap V ;$$

ainsi ϕ appartient localement à E^\wedge , il est donc un élément de \tilde{E} . Ce qui achève la preuve. ■

Proposition 2.8. *Pour une algèbre topologique semi-simple E , le complété \hat{E} de E (la plus petite algèbre topologique complète contenant E) et la clôture locale \tilde{E} de E ont le même spectre.*

Preuve: On a par définition de la clôture locale $\mathcal{M}(\tilde{E}) = \mathcal{M}(E)$, et d'après A.Mallios [8:p.146 Lemma 2.2], $\mathcal{M}(\hat{E}) = \mathcal{M}(E)$. ■ Nous remarquons ici que aucune relation d'inclusion entre \hat{E} et \tilde{E} n'est vérifiée en général, comme le montre les exemples ci-dessous.

Exemple 2.9. *L'algèbre $\mathcal{C}[X]$ des fonctions polynomiales à coefficients complexes et à variable réelle est locale, en effet : on a*

$$(i)\mathcal{M}(\mathcal{C}[X]) = \mathcal{M}(C_c(\mathbb{R})) = \mathbb{R}, \quad [7: p. 150, Theorem 2.1].$$

Soit α une fonction appartenant localement à $\mathcal{C}[X]$; d'après (i), α est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{C} et il existe un voisinage U de 0 et un polynôme $P \in \mathcal{C}[X]$ tels que $\alpha/U = P/U$. Montrons que $\alpha(t) = P(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour ceci on considère l'ensemble: $D = \{ t \in \mathbb{R}, \text{ tel que } \alpha = P \text{ sur un voisinage de } t \}$.

- D est non vide car $0 \in D$.
- Il est clair que D est un ouvert de \mathbb{R} .
- Vérifions que D est fermé, soit $(t_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite infinie d'éléments de D convergeant vers un élément $t \in \mathbb{R}$; puisque α appartient localement à $\mathcal{C}[X]$, il existe un voisinage V de t et un polynôme $Q \in \mathcal{C}[X]$ tels que $\alpha/V = Q/V$. Or $(t_n)_n \in \mathbb{N}$ converge vers t , il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$, $t_n \in V$ donc $\alpha(t_n) = Q(t_n)$ pour tout $n \geq p$. D'autre part, $t_n \in D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par suite, on a $P(t_n) = Q(t_n)$ quel que soit $n \geq p$. P et Q coïncident sur une infinité de points, donc $P = Q$ et $\alpha/V = P/V$; d'où $t \in D$ et par suite D est fermé. Comme \mathbb{R} est connexe, D égale \mathbb{R} et par suite α est identique à P , d'où $\mathcal{C}[X]$ est locale. L'algèbre $C_c(\mathbb{R})$ qui est le complété de $\mathcal{C}[X]$ (théorème de Stone-Weierstrass) contient strictement la clôture locale de ce dernier.

Exemple 2.10. *Soit X un espace topologique localement compact. $C_c(X)$ l'algèbre des fonctions continues à valeurs complexes sur X munie de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de X et $B(X)$ la sous- algèbre de $C_c(X)$ des fonctions continues et bornées. $C_c(X)$ est la clôture locale de $B(X)$ en effet : On a $\mathcal{M}(C_c(X)) = \mathcal{M}(B(X)) = X$ [7: p.223, Theorem 1.2] et puisque $C_c(X)$ est locale, c'est une extension locale de $B(X)$. D'autre part, comme X est localement compact, toute fonction de $C_c(X)$ est bornée sur un voisinage de chaque point de X , par suite elle appartient localement à $B(X)$, on en déduit, tenant compte du Théorème 2.2, que $C_1(X)$ est la clôture locale de $B(X)$ (en particulier pour $X = \mathbb{R}$). Dans cet exemple la clôture locale et le complété coïncident.*

Exemple 2.11. *La sous algèbre A de $C_c(\mathbb{R})$ des fonctions continues qui s'annulent à l'infini munie de la norme $\|f\| = \sup\{|f(x)|, x \in \mathbb{R}\}$ est une algèbre de Banach et sa clôture locale est $C_c(\mathbb{R})$; En effet: $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(C_c(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$ et comme $C_c(\mathbb{R})$ est locale, c'est une extension locale de A ; pour tout élément f de $C_c(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$, f coïncide avec un élément de A sur un voisinage de x , tenant compte du Théorème 2.7, $C_{\downarrow}(\mathbb{R})$ est la clôture locale de A . Ici la clôture locale de l'algèbre contient strictement son complété.*

Acknowledgements: The authors are indebted to the referee for his critical reading of the paper and his remarks. A.Oukhouya wishes also to express his sincere appreciation to Prof. A.Mallios for steady scientific, as well as, moral support, during his research work.

REFERENCES

- [1] R.Arens, The problem of locally- A functions in a commutative Banach algebra A.Trans.Amer.Math.Soc. 104(1962), 24-36.
- [2] N. Bourbaki. Théorie des ensembles, chap3. Hermann, Paris, 1967.
- [3] N. Bourbaki. Topologie générale , chap 1-4. Hermann, Paris 1971.
- [4] R.M.Brooks, Partitions of unity in F-algebras.Math Ann. 77(1968), 265-272
- [5] M.Gelfand,D.Raikov and G.Silov,Commutative Normed Rings. Chelsey, New York, 1964.
- [6] J.Horváth, Topological Vector Spaces and Distributions, I. Addison-Wesley, Reading, Mass.,1966.
- [7] A.Mallios. Topological algebras Selected Topics . North-Holland, Amesterdam,1986.
- [8] A.Mallios, On geometric topological algebras. J.Math. Anal. Appl. 172(1993), 301-322.
- [9] A.Mallios . The de Rham-Kähler complex of the Gel'fand sheaf of a topological algebra. J. Math. Anal. Appl. 175 (1993), 143-168.
- [10] A.Mallios, Geometry of Vector Sheaves. An Axiomatic Approach to Differential Geometry. Vols 1-2. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.
- [11] A. Mallios, On localising topological algebras (manuscript).
- [12] E.A.Michael, Locally multiplicatively-convex topological algebras, Memoirs AMS. Univer of Chicago.
- [13] A.Oukhouya. On local topological algebras. Scient.Math. Japonicae7(2002), 277-281.

Département de Mathématiques et Informatique.
 Université sidi Med ben Abdelah. B.P 1796 Atlas Fès, Maroc.
 e-mail: aoukhouya@hotmail.com