LA COMPLÉTUDE VIS-À-VIS DE LOCALISATION D' ALGÈBRES TOPOLOGIQUES

Anastasios Mallios et Ali Oukhouya

Received August 21, 2004

Abstract. In this article we examine the relation between the localization of a given topological algebra and the closedness of its corresponding Gel'fand transform algebra. Applications on previous results on *"local* (topological) *algebras"* are also considered. In particular, one proves, for instance, that any topological algebra, strictly dense projective limit of local topological algebras, having also a hemi-compact spectrum and the Gel'fand application a proper map, is still local. This has a special bearing on previous standard results, as well.

Introduction

Une algèbre topologique est dite *locale*, si elle contient tous les éléments qui lui appartiennent localement (Définition 2.1); autrement dit, si elle est "complète au sens de localisation" (:"localization-complete"). I.Gelfand, D.Raikov et I.Silov [6: p. 201, Theorem 1] ont montré, en se basant sur la partition fini de l'unité et la compacité de spectre, que *toute algèbre de Banach commutative unitaire et régulière est locale.* R.M.Brooks [5: p. 271, Theorem 2.6] a établi le résultat pour les algèbres de Fréchet, dans ce cas le spectre est de Lindelöf, ce qui a nécessité d'établir une partition dénombrable de l'unité, et A.Mallios [12: p. 307, Lemma 2.1] a étendu le résultat aux algèbres topologiques (fortement héréditairement complète) à spectre compact, à vrai dire, équicontinu. On s'est posé alors la question, s'il existe des algèbres topologiques locales dont le spectre, en géneral, n'est ni compact ni de Lindelöf; question à laquelle nous avons répondu positivement en établissant, d'un premier temps, le résultat pour les algèbres uniformes [18: p. 495, Theorem 2] et pour l'étendre en suite à une classe plus large d'algèbres topologiques que nous avons introduisé et appelé k*-algèbres topologiques* [16].
Les différentes classes d'algèbres mentionnées ci-dessus sont complètes; on s'est demandé, d'une manière naturelle, s'il existe une relation entre la complétion d'une algèbre topologique et sa localisation; or, il a été déjà montré par des exemples [9], que aucune relation n'est vérifiée, en général, entre les deux notions. Cependant, on prouve dans cet article que *la localisation d'une algèbre topologique E est en relation avec la fermeture de sa transformé de Gel'fand $E^\wedge \subseteq \mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$* (cf. Théorème 2.4 et Remarque 2.7 ci-dessous). Alors, nous montrons d'abord que si on a un système projectif $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ d'algères topologiques, *la limite projective des transformées de Gel'fand $(E_\alpha^\wedge)_{\alpha\in I}$ est la fermeture* (dans $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$) *de la transformée de Gel'fand de la limite projective E* du système projectif considéré (cf. Proposition 2.1); de plus, nous en déduisons une *condition nécessaire et suffisante pour qu'une algèbre topologique soit locale* (Théorème 2.4). Comme application, nous donnons le résultat de A.Mallios [ibid.] pour les algèbres localement m-convexe avec une condition plus faible sur le spectre (Théorème 2.8) et nous retrouvons aussi le théorème local pour les algèbres uniformes (Remarque 2.10).

2000 *Mathematics Subject Classification.* primary: 46H05, 46H15. secondary: 46M40.
Key words and phrases. Algèbres topologigues, Transformèe de Gelfand, Spectre.

1 Préliminaires E désigne une $\mathbb{C}$-algèbre topologique de spectre $\mathcal{M}(E)$ (l'ensemble des caractères continus non nuls de E), muni de la topologie faible et $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur $\mathcal{M}(E)$, munie de la topologie de la convergence uniformes sur les parties compactes de $\mathcal{M}(E)$. On note

$$\mathcal{G} : E \longrightarrow C_c(\mathcal{M}(E))$$

la *transformée de Gel'fand* de E définie par :

$$\mathcal{G}(x) \equiv \widehat{x} : \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \qquad f \longmapsto \widehat{x}(f) = f(x), \ x \in E.$$

L' image de E par la transformée de Gel'fand sera notée $E^\wedge$. E est dite *semi-simple* si sa transformée de Gel'fand est injective.

Définition 1.1. On dit qu'une *fonction* $\alpha : \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathbb{C}$, *appartient localement* à E si pour tout f appartenant à $\mathcal{M}(E)$, il existe un voisinage U de f et un élément x de E, tels que les restrictions à U, $\alpha|_U$ et $\widehat{x}|_U$, coïncident.

2 Algèbres topologiques locales **Définition 2.1.** Une algèbre topologique E est dite *locale*, si toute fonction α appartenant localement à E, lui appartient globalement (i.e. $\exists$ $x \in E$ tel que $\alpha = \widehat{x}$; où $\widehat{x}$ est la transformèe de Gel'fand de x); ça veut dire, précisément, que *toute fonction α appartenant localement à $E^\wedge$ lui appartient globalement.*

D'abord, on a le résultat suivant qui sera utile dans la suite.

Proposition 2.2. *Chaque fois qu'on a un système projectif d' algèbres topologiques $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$, leurs algèbres de Gel'fand correspondantes $E^\wedge_\alpha$, $\alpha \in I$, forment aussi un système projectif d' algèbres topologiques. En particulier, on obtient* la relation,

$$(*) \qquad \overline{E^\wedge} = \varprojlim E^\wedge_\alpha \subseteq \mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E)),$$

à un isomorphisme d' algèbres topologiques près, où $E = \varprojlim E_\alpha$.

Preuve. Pour tout $(\alpha, \beta) \in I^2$ tel que $\alpha \leq \beta$, soient

$$\pi_{\alpha\beta} : E_\beta \longrightarrow E_\alpha \quad \text{et} \quad \pi_\alpha : E \longrightarrow E_\alpha ,$$

les applications canoniques du système projectif (cf. [11: p. 82ff]), et considérons les applications

$$\phi_{\alpha\beta} : E^\wedge_\beta \longrightarrow E^\wedge_\alpha : \quad \widehat{x} \longmapsto \widehat{\pi_{\alpha\beta}(x)},$$

en posant (cf. aussi [7] avec Remarque 2.11 ci-dessous):

$$\phi_{\alpha\beta} := {}^t({}^t\pi_{\alpha\beta})|_{E^\wedge_\beta}.$$

Donc $(E^\wedge_\alpha , \phi_{\alpha\beta})$ *est un système projectif d' algèbres topologiques* et notons F sa limite projective; c' est-à-dire, on met:

$$F = \varprojlim E^\wedge_\alpha \subseteq \mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E)).$$

Alors, $E^\wedge \subseteq F$; d' autre part, pour tout $\alpha \in I$, on obtient

$$\phi_\alpha(E^\wedge) = \{\phi_\alpha(\widehat{x}) : x \in E\} = \{\widehat{\pi_\alpha(x)} : x \in E\}.$$

Comme pour tout $\alpha \in I$, $\pi_\alpha (E) = E_\alpha$, $\phi_\alpha(E^\wedge) = E^\wedge_\alpha$, tel que (cf. aussi [11: p. 87, Lemma 3.2]), on a:

$$\overline{E^\wedge} = \varprojlim \phi_\alpha(E^\wedge) = \varprojlim E_\alpha^\wedge . \ \blacksquare$$

Remarque 2.3. Par un abus de langage évident, on dit que *les foncteurs "transformée de Gel'fand" et "limite projective" commutent si, et seulement si,* $E^\wedge$ *est fermée dans* $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$.
Nous avons montré qu'*une limite projective (strictement dense) d'algèbres topologiques locales et semi-simples est locale* [18: p. 494, Theorem 1]. Autrement dit, sous la condition de la semi-simplicité, la classe des algèbres topologiques locales est fermée pour "*la limite projective (strictement dense)*". Nous généralisons ce résultat, en donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle limite projective reste locale. C'est-à-dire, on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.4. *Une algèbre topologique E, à multiplication continue, étant, en particulier, une limite projective strictement dense d' algèbres topologiques locales, soit $E = \varprojlim E_\alpha$, et tel que*

$$\text{(**)} \qquad \mathcal{M}(E) = \varinjlim \mathcal{M}(E_\alpha) \equiv \sum_\alpha \mathcal{M}(E_\alpha),$$

à un homéomorphisme près, est aussi locale, si, et seulement si, l'algèbre de Gel'fand correspondante $E^\wedge$ est fermée dans $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$.

Preuve. Supposons que $E^\wedge$ est fermée dans $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E)$; donc, d'après la Proposition 2.2, on a

$$E^\wedge = \overline{E^\wedge} = \varprojlim E_\alpha^\wedge .$$

Soient $\pi_{\alpha\beta} : E_\beta \longrightarrow E_\alpha$ et $\pi_\alpha : E \longrightarrow E_\alpha$ les applications canoniques du système projectif $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$, considérons leurs transposées;

$$\begin{aligned} \rho_\alpha &\equiv {}^t\pi_\alpha : \mathcal{M}(E_\alpha) \longrightarrow \mathcal{M}(E) \\ \rho_{\alpha\beta} &\equiv {}^t\pi_{\alpha\beta} : \mathcal{M}(E_\alpha) \longrightarrow \mathcal{M}(E_\beta). \end{aligned}$$

Soient également

$$\phi_{\alpha\beta} : E_\beta^\wedge \longrightarrow E_\alpha^\wedge \ \text{ et } \ \phi_\alpha : E^\wedge \longrightarrow E_\alpha^\wedge ,$$

les applications de transition associées au système projectif $(E_\alpha^\wedge)_{\alpha \in I}$ (elles sont définies à la Proposition 2.2). Or, pour une *fonction* $\theta : \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathbb{C}$ *appartenant localement à* $E^\wedge$, considérons les applications $\theta_\alpha = \theta \circ \rho_\alpha : \mathcal{M}(E_\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}$. Soit $\alpha \in I$, on a :

- θ_α *appartient localement à* $E_\alpha^\wedge$, en effet: Soit $f \in \mathcal{M}(E_\alpha)$, on a $\rho_\alpha(f) = f \circ \pi_\alpha \in \mathcal{M}(E)$. Puisque θ appartient localement à $E^\wedge$, il existe un voisinage U de $\rho_\alpha(f)$ et un élément x de E tels que, $\theta|_U = \widehat{x}|_U$; comme ρ_α est continue, il existe un voisinage V de $f \in \mathcal{M}(E_\alpha)$ tel que $\rho_\alpha(V) \subseteq U$. Donc,

  $$\theta|_{\rho_\alpha(V)} = \widehat{x}|_{\rho_\alpha(V)}, \ \text{ et } \ (\theta \circ \rho_\alpha)|_V = (\widehat{x} \circ \rho_\alpha)|_V .$$

  D'autre part, $\widehat{x} \circ \rho_\alpha = \widehat{\pi_\alpha(x)}$, d' où $\theta_\alpha|_V = \widehat{\pi_\alpha(x)}|_V$. Or, $\widehat{\pi_\alpha(x)} \in E_\alpha^\wedge$, alors θ_α appartient localement à $E_\alpha^\wedge$, pour tout $\alpha \in I$. Comme E_α est locale, θ_α *appartient globalement à* $E_\alpha^\wedge$ et il existe un élément $x_\alpha \in E_\alpha$ tel que $\theta_\alpha = \widehat{x}_\alpha$, par suite $\theta = (\widehat{x}_\alpha)_{\alpha \in I} \in \prod_{\alpha \in I} E_\alpha^\wedge$. $\mathcal{M}(E)$ étant la réunion disjointe des $\rho_\alpha(\mathcal{M}(E_\alpha))$, donc pour tout $\alpha \in I$, $(\theta \circ \rho_\alpha)(\mathcal{M}(E_\alpha)) = \widehat{x}_\alpha(\mathcal{M}(E_\alpha)$. D' où $\theta \circ \rho_\alpha = \widehat{x}_\alpha$, donc $\theta \in \varprojlim E_\alpha^\wedge$ si, et seulement si, pour tout couple $(\alpha, \beta) \in I^2, \alpha \leq \beta$, $\phi_{\alpha\beta}(\widehat{x}_\beta) = \widehat{x}_\alpha$. Or, $\rho_\alpha = \rho_\beta \circ \rho_{\alpha\beta}$, donc $\theta \circ \rho_\alpha = \theta \circ \rho_\beta \circ \rho_{\alpha\beta}$, et comme $\theta_\alpha = \theta \circ \rho_\alpha$ et $\theta_\beta = \theta \circ \rho_\beta$, on a $\theta_\alpha = \theta_\beta \circ \rho_{\alpha\beta}$; et par suite $\theta_\alpha = \widehat{x}_\alpha$ et $\theta_\beta = \widehat{x}_\beta$, d' où

$$\widehat{x}_\alpha = \widehat{x}_\beta \circ \rho_{\alpha\beta} = \widehat{x}_\beta \circ {}^t\pi_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\beta}(\widehat{x}_\beta).$$

On en déduit que $\theta \in \varprojlim E_\alpha^\wedge = E^\wedge$ et il existe $x \in E$ tel que $\theta = \widehat{x}$, donc E *est locale.*

- *Inversement*, soit E locale. On a $E^\wedge \subseteq \varprojlim E_\alpha^\wedge$, car $\overline{E^\wedge} = \varprojlim E_\alpha^\wedge$. Maintenant, pour $\phi = (\widehat{x}_\alpha)_\alpha \in \varprojlim E_\alpha^\wedge$, on a $\phi|_{\mathcal{M}(E_\alpha)} = \widehat{x}_\alpha$ et comme $E = \varprojlim E_\alpha$ et $\mathcal{M}(E) = \varinjlim \mathcal{M}(E_\alpha)$, alors ϕ appartient localement à E, qui est locale par hypothèse, par suite, il existe $x \in E$ tel que $\phi = \widehat{x}$; donc $\varprojlim E_\alpha^\wedge \subseteq E^\wedge$. ■

Toute algèbre topologique peut être considérée comme limite projective triviale d'elle même (cf. [3: p. 77, Exemple 2]); or, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 2.5. *La transformée de Gel'fand $E^\wedge$ de toute algèbre topologique locale E est fermée dans $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$.*

Remarque 2.6. On peut encore formuler le théorème ci-dessus comme suit: *dans la catégorie des algèbres topologiques, la sous catégorie des algèbres locales est caractérisée par la commutativité des foncteurs "transformée de Gel'fand" et "limite projective (strictement dense)".* On dit aussi que les algèbres topologiques locales forment une sous-catégorie "*complète*" de celle où les deux derniers foncteurs commutent (ou encore, la dite catégorie est *fermée* pour le foncteur "limite projective").

Remarque 2.7. Dans *le cas où l'algèbre topologique* $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$ *est complète* (par exemple, lorsque $\mathcal{M}(E)$ est un *k-espace*), alors $\overline{E^\wedge}$ est en fait, la complétion de $E^\wedge$; donc la formule (*) nous donne le caractère essentiel des élément ajoutés à $E^\wedge$ pour obtenir la *localisation* d'une algèbres topologique donnée E: i.e., *on y ajoute des limites* (de suites généralisées de Cauchy) *des fonctions de* $E^\wedge$.
Une autre application du Théorème 2.4, dans le cadre des algèbres localement m-convexes, en appuyant sur la décomposition d' Arens-Michael, est le résultat suivant, une généralisation directe et aussi extension du cas classique.

Théorème 2.8. *Soit E une algèbre localement m-convexe unitaire complète et régulière. Alors, E est locale, si, et seulement si, $E^\wedge$ est fermée dans $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$.*

Preuve. Par la décomposition d' Arens-Michael, E est limite projective (strictement dense [11: p. 176; (7.18)]) d' algèbres de Banach unitaires et régulières, $E = \varprojlim E_\alpha$, donc telles algèbres sont locales [6: p. 201, Theorem 1]. D' après le Théorème 2.4, E est locale si, et seulement si, $E^\wedge$ est fermée dans $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$. ■
Comme conséquence du théorème ci-dessus, nous retrouvons le résultat de A. Mallios [12], mais pour les algèbres localement m-convexes, en remplaçant la condition héréditairement complète seulement par complète (une hypothèse beaucoup plus faible), et en prenant aussi une transformée de Gel'fand associée convenable; à cet égard, nous rappelons d'abord (voir e.g. [4: Chap. 1; p. 72, Définition 1]) qu'une application *continue* entre deux espaces topologiques est dite *propre* si la préimage de tout ensembles compact reste aussi compact. (En conséquence, la continuité de l'application considerée ici est partie de la définition elle-même, d'une application propre donnée). Or, on a maintenant le résultat, comme suit.

Corollaire 2.9. *Toute algèbre localement m-convexe unitaire complète et régulière, ayant aussi son spectre un espace hémicompact* [1] *et la transformée de Gel'fand correspondante une application propre est locale.*

Preuve. D' après le Théorème 2.8, *il suffit de montrer que $E^\wedge$ est fermée*: En fait, selon notre hypothèse sur $\mathcal{M}(E)$ (voir aussi [19: p. 265, Theorem A]), soit $(\widehat{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E^{\wedge}$, convergeant vers un élément $\alpha \in \mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$. On pose, $B = \{(\widehat{x_n})_{n\in\mathbb{N}}; \alpha\}$, qui est un compact de $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$ [4: Chap. 1, p. 161; Ex. 2)]. Alors, en vertu de l'hypothèse, l'ensemble $\mathcal{G}^{-1}(B) \subseteq E$ est un compact, tel que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}^{-1}(B)$, donc il existe une sous-suite de ceci, convergeant vers un point $x \in E$, or, d'après la continuité de $\mathcal{G}$, $(\widehat{x_n})$ converge aussi vers $\hat{x}$ et alors $\hat{x} = \alpha$. ■

A vrai dire, en basant sur le raisonnement précédent, on prouve, en effet, un réesultat, beaucoup plus général, comme suit [A.Mallios]:

(†) *toute algèbre topologique, qui est une limite projective strictement dense d'algèbres topologiques locales, ayant aussi son spectre un espace hémicompact et sa transformée de Gel'fand (continue et) propre est également locale.*

Remarques 2.10. – 1) Du Théorème 2.8, il découle aussi le résultat établi par A. Oukhouya pour les algèbres uniformes [18: p. 495, Theorem 2], mais, pour le cas particulier, que *leurs transformées de Gel'fand soient continues*; car d' après [11: p. 276, Theorem 5.1] cette application est alors un isomorphisme (d'algèbres topologiques) de E sur $E^{\wedge}$, donc la complétude de E entraîne celle de $E^{\wedge}$, par suite cette derniére est fermée dans $\mathcal{C}_{\rfloor}(\mathcal{M}(\mathcal{E}))$, d' où E est locale.
2) Des *limites projectives d' algèbres de Gel'fand* d' un système projectif donné d' algèbres topologiques ont déjà étés considérées, indépendamment de nous, par R.I.Hadjigeorgiou dans [7], en y considérant, dans ce cas, sous de conditions convenables, les frontières classiques de Shilov, Choquet et Bishop.

Scolie 2.11. Une morale générale déduite de cet article est que la *compacité du spectre*, d' une algèbre topologique donnée appropriée, n' est pas nécessaire (cf., par exemple, Remarque 2.7 ci-dessus), pour que le "*Théorème Local*" soit valable pour une telle algèbre, en contraste, bien sûr, à ce qui concern le cas classique. D' ailleurs, l' *unité* de l' algèbre est *encore utilisée* pendant notre raisonnement ci-dessus (voir e.g. Théorème 2.8, comme avant). De même, il y en a des exemples d' algèbres topologiques (pas normées (!)), *pas unitaires* et *sans de spectres compacts, qui sont locales*; cf., par exemple, [8: Section 20].

References

[1] R. F. Arens, *A topology for spaces of transformations*. Ann. Math. 47(1946), 480-495.

[2] R. Arens, *The problem of locally-A functions in a commutative Banach algebra A*. Trans. Amer. Math. Soc. 104(1962), 24-36.

[3] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles, Chap. 3*. Hermann, Paris, 1967.

[4] N. Bourbaki, *Topologie générale , Chap. 1-4*. Hermann, Paris, 1971.

[5] R.M. Brooks, *Partitions of unity in F-algebras*. Math Ann. 77(1968), 265-272.

[6] I. Gel'fand, D. Raikov and G. Silov, *Commutative Normed Rings*. Chelsea, New York, 1964.

[7] R. I. Hadjigeorgiou, *Boundaries in projective limit topological algebras.* (manuscrit)

[8] R. I. Hadjigeorgiou, *Essential Sets in Topological Algebras.* (monographie, en préparation)

[9] R.A. Hassani, A. Blali, A. Oukhouya, *Clôture locale des algèbres topologiques*. Scient. Math. Japon. (à paraître)

[10] J. Horváth, *Topological Vector Spaces and Distributions, I.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[11] A. Mallios, *Topological algebras. Selected Topics*. North-Holland, Amsterdam, 1986.

[12] A. Mallios, *On geometric topological algebras*. J. Math. Anal. Appl. 172(1993), 301-322.

[13] A. Mallios, *The de Rham-Kähler complex of the Gel'fand sheaf of a topological algebra*. J. Math. Anal. Appl. 175(1993), 143-168.

[14] A. Mallios, *Geometry of Vector Sheaves. An Axiomatic Approach to Differential Geometry, Vols 1-2*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[15] A. Mallios, *On localising topological algebras*. Contemporary Math. 341(2004), 79-95.

[16] A. Mallios et A. Oukhouya, *k-algèbres topologiques*. Scient. Math. Japon. (à paraître)

[17] E.A. Michael, *Locally multiplicatively-convex topological algebras*. Memoirs AMS no 11(1952).

[18] A. Oukhouya, *On local topological algebras*. Scient. Math. Japon. 57(2003), 493-497. [electr. version: e7, 277-281].

[19] S. Warner, *The topology of compact convergence on continuous function spaces*. Duke Math. J. 25(1958), 265-282.

Anastasios Mallios
Mathematical Institute, University of Athens,
Panepistimiopolis. GR-15784 Athens, Greece
e-mail: amallios@cc.uoa.gr

Ali Oukhouya
Lycée Techniqque Med 5
Beni-Mellal, Maroc
e-mail: aoukhouya@hotmail.com