K-ALGÈBRES TOPOLOGIQUES

Anastasios Mallios et Ali Oukhouya

Received August 12, 2004

Abstract. Every Hausdorff complete topological algebra *strongly of type (k)* is a strictly dense projective limit of semi-simple topological algebras with compact spectra. Moreover, every unital Hausdorff topological algebra, regular of type (k) and *strongly hereditarily complete*, having also the Gel'fand map continuous, is *local*.

Introduction En 1946, I. Gel'fand, D. Raikov et G. Shilov ont établi le théorème local pour les algèbres de Banach; la démonstration de ce théorème se base sur la *compacité* du spectre $M(E)$, qui permet d'appliquer le théorème de *partition finie de l'unité* pour un recouvrement fini convenablement choisi. En 1968, R.M. Brooks a prouvé le résultat pour les algèbres de Fréchet [4: p. 271, Theorem 2.6]. Dans ce cas le spectre est de *Lindelöf* ce qui a nécessité d'établir un théorème de partition dénombrable de l'unité. En 1993, A. Mallios [9: p. 307, Lemma 2.1] a montré le théorème local pour les algèbres topologiques à spectres compacts, en établissant un théorème de partition finie de l'unité de telles algèbres [8: p. 345, Corollary 4.5]. En 2001, ce résultat a était généralisé aux algèbres uniformes [14: p. 495, Theorem 2], dont le spectre n'est ni compact ni de Lindelöf, en général; ici la démonstration se base sur la décomposition d'Arens-Michael et sur le fait que *la limite projective (strictement dense) d'algèbres topologiques semi-simples locales est locale* (cf. [14: p. 494, Theorem 1]).
Le but de cet article consiste à étendre le théorème local à une nouvelle classe plus large d'algèbres topologiques, qui contient les différentes classes mentionnées ci-dessus, que nous introduisons et que nous appelerons *k-algèbres* (Définition 2.1). Les spectres d'une telle classe ne sont pas nécessairement compacts mais les algèbres topologiques correspondantes, quand complètes et régulières, apparaîssent, moyennant un théorème de structure - que nous établissons - comme limite projective d'algèbres topologiques à spectres compacts (Théorème 2.3 ci-dessous). De plus, nous donnons une application de ce résultat en montrant que *toute algèbre de Pták unitaire régulière semi-simple, à transformée de Gel'fand continue et presque-ouverte, est locale* (Théorème 2.6). Une telle algèbre n'est, en général, ni uniforme, ni de Fréchet et ni de spectre compact; donc les techniques utilisées dans les démonstrations classiques ci-dessus ne sont pas adéquates dans ce cas. De même, les algèbres considerées, par la suite, ne sont pas, en général, nécessairement unitaires.

1 Préliminaires E désigne une $\mathbb{C}$-algèbre topologique (multiplication *séparément continue* [8]), $\mathcal{M}(E)$ son spectre (l'ensemble des caractères continus non nuls de E) muni de la topologie faible et $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur $\mathcal{M}(E)$, munie de la topologie de la convergence uniformes sur les parties compactes de $\mathcal{M}(E)$. On note:

$$\mathcal{G} : E \longrightarrow C_c(\mathcal{M}(E))$$

la *transformée de Gel'fand* de E définie par :

$$\mathcal{G}(x) \equiv \widehat{x} : \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathbb{C}; \quad f \longmapsto \widehat{x}(f) := f(x),$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* primary: 46H05, 46H20. secondary: 46M40.
Key words and phrases. Algèbres topologigues, Transformèe de Gelfand, Spectre.

pour chaque $x \in E$. L'image de E par la transformée de Gel'fand sera notée $E^{\wedge}$. E est dite *semi-simple* si sa transformée de Gel'fand est injective.

Définition 1.1. On dit qu'une *fonction* $\alpha : \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathbb{C}$, *appartient localement* à E, si pour tout f appartenant à $\mathcal{M}(E)$, il existe un élément x de E et un voisinage U de f tels que les restrictions à U, des fonctions α et $\hat{x}$ coïncident, ça veut dire, on a, $\alpha|_U = \hat{x}|_U$.

Définition 1.2. Une algèbre topologique E est dite *locale*, si toute fonction α appartenant localement à E, "lui appartient globalement" (i.e. $\exists\ x \in E$ tel que $\alpha = \widehat{x}$). A vrai dire, si *toute fonction* α *appartenant localement à* $E^{\wedge}$ (cf. Définition 1.1), *lui appartient* aussi *globalement.*

2 k-algèbres topologiques

Définition 2.1. Soit E une algèbre topologique de spectre $\mathcal{M}(E)$. On dit que E est une *k-algèbre*, ou même une algèbre de *type (k)*, si la condition suivante est vérifiée:

> *pour tout voisinage* U *de 0 dans* E*, il existe un compact* $K \subseteq \mathcal{M}(E)$*, dont le "noyau"* [8] *est contenu dans* U*; c'est-à-dire, on a:*

(C)
$$I(K) \subseteq U.$$

De plus, si les compacts K sont, en particulier, des "*hulls*" [8], on parle alors, *des algèbres fortement de type (k).* Ici on pose,

$$I(K) := \{x \in E : f(x) \equiv \widehat{x}(f) = 0, \textit{pour tout } f \in K\} \equiv\ ker(K),$$

cf. [8: p. 330, (1.4)].

Exemples

1) $\mathcal{C}_c(X)$, X un *espace topologique complètement régulier*, est une *algèbre de type (k)*, puisque pour tout compact K de X on a $I(K) \subseteq K^{\circ}$ (: polaire de K).

2) Une *sous-algèbre topologique* F *d' une k-algèbre* E *est* aussi *une algèbre de type (k)*: En effet, pour tout voisinage V de 0 de F, il en existe un voisinage U dans E, tel que $V = U \cap F$; et comme E est une k-algèbre, il existe un compact K de $\mathcal{M}(E) \subseteq \mathcal{M}(F)$, donc de $\mathcal{M}(F)$, tel que $I(K) \subseteq U$; en prenant l'orthogonale de K dans F, $I_F(K) = \{x \in F : f(x) \equiv \widehat{x}(f) = 0,$ *pour tout* $f \in K\}$, on obtient $I_F(K) \subseteq U \bigcap F \subseteq V$.

3) *La transformée de Gel'fand* $E^{\wedge}$*, de toute algèbre topologique* E*, est une k-algèbre*; car c'est une sous-algèbre de l' algèbre $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$ qui est de type (k), d'après le premier exemple ci-dessus.

4) De même *toute algèbre uniforme est une k-algèbre*, puisque c'est une sous-algèbre de $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$ [8, p. 276, Theorem 5-1, 3)].

5) *Toute algèbre topologique régulière de type (k) est fortement de type (k)*, car, sous l'hypothèse de régularité, les compacts sont des "hulls" [8, p. 332, Theorem 2.1]. D'ailleurs, sous l'hypothèse d'un *spectre compact* pour l'algèbre topologique initiale, *les deux conditions sont,* en effet, *équivalentes,* par des définitions elles mêmes.

Définition 2.2. Une algèbre topologique E est dite *héréditairement complète*, si pour tout idéal fermé I de E, l'algèbre quotient E/I est complète. En particulier, E est dite *fortement héréditairement complète*, si chaque quotient E/I, comme ci-dessus, est aussi héréditairement complet [9].

Théorème 2.3. *Toute algèbre topologique séparée complète et fortement de type (k) est (à un isomorphisme d'algèbres topologiques près) limite projective strictement dense d'algèbres topologiques semi-simples à spectres compacts.*

Preuve. Soient E une telle algèbre et $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ une base de voisinages ouverts de 0. On a par hypothèse, pour chaque $\alpha \in I$, qu'il existe un compact $K_\alpha \subseteq \mathcal{M}(E)$ tel que $I(K_\alpha) \subseteq U_\alpha$

avec $I(K_\alpha) = \bigcap\limits_{f\,\in\,K_\alpha} \ker f$. Comme pour tout $f \in K_\alpha$, f est continue, $I(K_\alpha)$ est alors un idéal bilatéral fermé de E. Notons $N_\alpha = I(K_\alpha)$. Maintenant on considére, pour chaque $\alpha \in I$, l'algèbre quotient $E_\alpha = E\,/N_\alpha$ et

$$\rho_\alpha\ : E \longrightarrow E\,/N_\alpha = E_\alpha\ ,$$

l'application canonique associée, définie par $\rho_\alpha\,(x) = x + N_\alpha$. Ordonons I par : $\alpha \leq \beta \Longleftrightarrow U_\beta\ \subseteq U_\alpha$ (*inclusion réciproque*). Puisque $(U_\alpha\,)_{\alpha\in I}$ est une base de voisinages de 0, I est filtrant à droite, on peut donc choisir la famille $(K_\alpha)_{\alpha\in\ I}$ telle que, $\alpha \leq \beta \Longrightarrow K_\alpha\ \subseteq K_\beta$ (on peut considérer le compact K, de la condition (C) ci-dessus, union le compact $\mathcal{M}(E)\bigcap U_\alpha^\circ$); par conséquence, on a $\alpha \leq \beta \Longrightarrow N_\beta \subseteq N_\alpha$. Ceci nous permet de définir, pour $(\alpha,\beta) \in I^2$, tel que $\alpha \leq \beta$, les *applications de transition* canoniques suivantes :

$$\rho_{\alpha\beta}\ : E_\beta\ \longrightarrow E_\alpha; \quad \rho_\beta\,(x) \longmapsto \rho_\alpha\,(x),\ \forall\ x \in E$$

- Vérifions d'abord que *les applications $\rho_{\alpha\beta}$ sont bien définies*: soit $(x,y) \in E^2$ tel que $\rho_\beta\,(x) = \rho_\beta\,(y)$, donc $x - y \in N_\beta \subseteq N_\alpha$, par suite $\rho_\alpha\,(x) = \rho_\alpha\,(y)$. D'où notre assertion. On vérifie facilement que $(E_\alpha, \rho_{\alpha\beta}\,)_{\alpha\,\in\,I}$ est un système projectif d'algèbres topologiques. Montrons que *E est la limite projective des E_α*: Considérons l'application suivante:

$$\rho : E \longrightarrow \prod_{\alpha\,\in\,I} E_\alpha\ ; \quad x \longmapsto (\rho_\alpha\,(x))_{\alpha\,\in\,I}.$$

- *On a* $\rho(E) \subseteq \varprojlim E_\alpha$, en effet: Pour tout $(\alpha,\beta) \in I^2$ tel que $\alpha \leq \beta$ et $x \in E$ on a : $\rho(x) = (x_\alpha\,)_{\alpha\in\,I} = (\rho_\alpha\,(x))_{\alpha\,\in\,I}$, donc

$$\rho_{\alpha\beta}\,(x_\beta\,) = \rho_{\alpha\beta}\,(\rho_\alpha\,(x)) = \rho_\alpha\,(x) = x_\alpha;$$

  par suite, $\rho(E) \subseteq \varprojlim E_\alpha$.

- *ρ est injective*, en effet: Soit $x \in E$ tel que $\rho(x) = 0$, pour tout $\alpha \in I$, on a $\rho_\alpha\,(x) = 0$, donc $x \in N_\alpha\ = I(K_\alpha) \subseteq U_\alpha$. Puisque E est séparée, x est nul et par suite

$$\rho : E \longrightarrow \rho(E) \subseteq \varprojlim E_\alpha$$

  est un *isomorphisme d'algèbres*.

- Montrons que *ρ est un homéomorphisme de E sur $\rho(E)$*: Puisque chaque composante $\rho_\alpha\,,\alpha \in I$, est continue, il en est de même de ρ. Pour démontrer que ρ est ouverte il suffit de vérifier que, pour chaque $\alpha \in I$, $\rho(U_\alpha\,)$ est un voisinage de 0. Soit $\alpha \in I$, on considère l'ensemble

$$V = \rho(E) \cap \prod_{\beta\in I} V_\beta\ ,$$

  tel que $V_\beta\ = E_\beta$ si $\beta \neq \alpha$ et $V_\alpha = \rho_\alpha\,(U_\alpha\,)$. Comme E_α est munie de la topologie quotient, $\rho_\alpha\,(U_\alpha\,)$ est un voisinage de 0. D'autre part, la limite projective $\varprojlim E_\alpha$ est munie de la restriction de la topologie produit, donc V est un voisinage de 0. Il suffit alors de montrer que $V \subseteq \rho(U_\alpha\,)$. En effet, pour tout $y \in V$, il existe $x \in E$ tel que

$$y = \rho(x) = (\rho_\alpha\,(x))_{\alpha\,\in\,I}.$$

$\rho_\alpha(x) \in V_\alpha$ car $y \in \prod_{\beta\in I} V_\beta$, donc $\rho_\alpha(x) \in \rho_\alpha(U_\alpha)$ et par suite $x \in U_\alpha + N_\alpha$. D'autre part, $N_\alpha \subseteq U_\alpha$ et quitte à remplacer U_α par un voisinage W de 0 tel que $W + W \subseteq U_\alpha$, on a $x \in U_\alpha$. Donc, pour tout $\beta \in I$, $\rho_\beta(x) \in \rho_\beta(U_\alpha)$, par suite

$$\rho(x) \in \rho(U_\alpha) \text{ et } V \subseteq \rho(U_\alpha).$$

Donc, ρ est un *isomorphisme d'algèbres topologiques* de E sur $\rho(E) \subseteq \varprojlim E_\alpha$.

- Montrons que $\rho(E)$ *est dense dans* $\varprojlim E_\alpha$: Notons $F = \varprojlim E_\alpha$ et $p_\alpha : F \longrightarrow E_\alpha$ les projections canoniques. Pour tout $\alpha \in I$,

$$p_\alpha(\rho(E)) = \rho_\alpha(E) = E_\alpha.$$

D'après [8: p. 87, Lemma 3.2] et notre hypothèse pour E, on a,

$$\overline{\rho(E)} = \varprojlim \overline{p_\alpha(\rho(E))} = \varprojlim \overline{E_\alpha} = \varprojlim E_\alpha = F.$$

Et comme E est complet et isomorphe (isomorphisme d'algèbres topologiques) à $\rho(E)$, ce dernier est aussi complet, par suite $\rho(E) = \varprojlim E_\alpha$. D'où $E = \varprojlim E_\alpha$, à un *isomorphisme d'algèbres topologiques près.*

- La *semi-simplicité des* E_α résulte du [8: p. 340, Corollary 4.2]: puisque E est fortement de type (k) (les compacts sont des "hulls", par hypothèse), on a

$$I(h(N_\alpha)) = I(h(I(K_\alpha)) = I(K_\alpha) = N_\alpha.$$

D'autre part, pour $\alpha \in I$, le spectre de E_α est donné par (ibid., p. 339, Theorem 4.1)

$$\mathcal{M}(E_\alpha) = \mathcal{M}(E/N_\alpha) = h(N_\alpha) = h(I(K_\alpha)) = K_\alpha,$$

donc $\mathcal{M}(E_\alpha)$ *est compact.* De même, selon la définition précédente de l'algèbre $E = \varprojlim E_\alpha$ (cf. la preuve ci-dessus), *les applications de transitions* du système projectif considéré, *ainsi que celles de la projection canonique, sont surjectives*; or, *l'algèbre donnée E est* (à un isomorphisme d'algèbres topologiques près) une *limite projective "strictement dense"*, voir aussi [8: p. 174] pour la terminologie employée ici. Ce qui achève maintenant la démonstration.

Alors, on peut déjà formuler le résultat suivant.

Théorème 2.4. *Une algèbre topologique unitaire séparée régulière de type (k), ayant la transformée de Gel'fand continue, et fortement héréditairement complète est locale.*

Preuve. On considère la décomposition donnée dans le théorème précédent, $E = \varprojlim E_\alpha$ (voir aussi Exemple 5 ci-dessus). E étant fortement héréditairement complète, E_α l'est aussi, pour tout $\alpha \in I$. De même, comme E est régulière, les E_α $(\alpha \in I)$ le sont aussi ([8: p. 339, Corollary 4.1]); donc pour tout $\alpha \in I$, E_α est une algèbre topologique unitaire régulière à spectre compact et, en effet, à cause de l'hypothèse, equicontinue (: *le quotient d'une algèbre topologique, ayant la transformée de Gel'fand continue est une algèbre de même type* [A. Mallios]), donc locale [9, p. 307, Lemma 2.1]. Puisque les E_α, sont semi-simples [8: p. 340, Corollary 4.2], $E = \varprojlim E_\alpha$ est locale [14: p. 494 (e7: p. 278), Theorem 1].

Définition 2.5. Une algèbre localement convexe E est dite *algèbre de Pták* [8: p. 267, Definition 3.3], si l'espace localement convexe E sous-jacent est un espace de Pták (cf. [7: p. 299, Definition 2]).

Théorème 2.6. *Toute algèbre de Pták E unitaire semi-simple et régulière, ayant la transformée de Gel'fand continue et presque-ouverte, est locale.*

Preuve. D'après l' hypothèse sur la transformée de Gel'fand de E, $\mathcal{G} : E \longrightarrow C_c(\mathcal{M}(E))$ (cf. [15: p. 163, Theorem 8.3]), on en déduit que, pour tout voisinage U de 0 dans E, il existe un compact K de $\mathcal{M}(E)$ et $\varepsilon > 0$ tels que :

$$S_K(\varepsilon) \cap E^\wedge \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{U}),$$

avec $S_K(\varepsilon) := \{ \alpha \in C_c(\mathcal{M}(E)) : |\alpha(f)| \leq \varepsilon, \forall f \in \mathcal{M}(E) \}$. Comme $\mathcal{G}(I(K)) \subseteq S_K(\varepsilon) \cap E^\wedge$, on a $\mathcal{G}(I(K)) \subseteq \mathcal{G}(U)$; or, $\mathcal{G}$ *étant injective*, car par hypothèse E est semi-simple, on obtient $I(K) \subseteq U$, et par conséquence, *E est une k-algèbre*. D'autre part, une algèbre de Pták est fortement héréditairement complète (cf. [8: p. 309, Scholium 9.1]) ou encore [15: p. 165, Corollary 3]. Alors le Théorème 2.4 entraîne que E est locale.

De la preuve ci-dessus il en résulte aussitôt le suivant.

Corollaire 2.7. *Toute algèbre topologique semi-simple, avec la transformée de Gel'fand continue et presque-ouverte, est une k-algèbre.*

Remarque 2.8. *Une algèbre de Fréchet est une algèbre de Pták* [7: p. 299, Proposition 3]. Donc, *toute algèbre de Fréchet unitaire semi-simple et régulière (*ou encore, *toute algèbre de Fréchet-Shilov* [8] *unitaire), ayant la transformée de Gel'fand presque-ouverte, est locale.* Le précédent peut être aussi relié au résultat classique [5: p. 201, Theorem 1], ou encore à [14: p. 496, Corollary 1].

References

[1] R. Arens, *The problem of locally-A functions in a commutative Banach algebra A.* Trans. Amer. Math. Soc. 104(1962), 24-36.

[2] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles, Chap. 3.* Hermann, Paris, 1967.

[3] N. Bourbaki, *Topologie générale , Chap. 1-4.* Hermann, Paris, 1971.

[4] R.M. Brooks, *Partitions of unity in F-algebras.* Math. Ann. 77(1968), 265-272.

[5] I. Gelfand, D. Raikov and G. Silov, *Commutative Normed Rings.* Chelsey, New York, 1964.

[6] R.A. Hassani, A. Blali, A. Oukhouya, *Clôture locale des algèbres topologiques.* Scient. Math. Japon. (to appear)

[7] J. Horváth, *Topological Vector Spaces and Distributions, I.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[8] A. Mallios, *Topological algebras. Selected Topics.* North-Holland, Amsterdam, 1986.

[9] A. Mallios, *On geometric topological algebras.* J. Math. Anal. Appl. 172(1993), 301-322.

[10] A. Mallios, *The de Rham-Kähler complex of the Gel'fand sheaf of a topological algebra.* J. Math. Anal. Appl. 175(1993), 143-168.

[11] A. Mallios, *Geometry of Vector Sheaves. An Axiomatic Approach to Differential Geometry, Vols 1-2.* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[12] A. Mallios, *On localising topological algebras.* Contemporary Math. 341(2004), 79-95.

[13] E.A. Michael, *Locally multiplicatively-convex topological algebras.* Memoirs AMS no 11(1952).

[14] A. Oukhouya, *On local topological algebras.* Scient. Math. Japon. 57(2003), 493-497. [electr. version: e7, 277-281].

[15] H.H. Schaefer, *Topological Vector Spaces.* Springer-Verlag, New York, 1971.

Anastasios Mallios
Mathematical Institute, University of Athens,
Panepistimiopolis. GR-15784 Athens, Greece
e-mail: amallios@math.uoa.gr

Ali Oukhouya
Lycée Techniqque Med 5
Beni-Mellal, Maroc
e-mail: aoukhouya@hotmail.com