OPÉRATEURS DÉTERMINANT LA TOPOLOGIE D'UNE NORME COMPLÈTE

Z. Abdelali, E. Illoussamen, L. Oubbi

Received June 2, 2003; revised March 31, 2004

Abstract. Let A be a Banach space (or algebra) and T a continuous linear operator on A. We deal with conditions under which a complete norm on A for which T is continuous must be equivalent to the initial one. Several examples and applications are provided.

1 Introduction Soient $(E, || \ ||)$ un espace de Banach de dimension infinie et $B(E, || \ ||)$ l'algèbre des opérateurs linéaires continus de $(E, || \ ||)$ dans $(E, || \ ||)$. On dit qu'un opérateur $T \in B(E, || \, ||)$ détermine la topologie de la norme de E si toute norme complète $| \ |$ sur E telle que $T \in B(E, | \ |)$ est équivalente à $|| \ ||$. Si E est une algèbre de Banach, un élément $a \in A$ est dit déterminer la topologie de la norme de E si c'est le cas pour l'opérateur $L_a : b \mapsto ab$. L'étude des éléments déterminant la topologie de la norme d'une algèbre de Banach a été initiée par A.R. Villena dans [10, 11] puis reprise par K. Jarosz dans [5]. Dans ce travail, nous poursuivons l'investigation dans ce sens. Nous étudions notamment les opérateurs déterminant la topologie d'un espace de Banach général ainsi que les multiplicateurs déterminant celle d'une algèbre de Banach.
Nous commençons par considérer les opérateurs T sur un espace de Banach $(E, || \ ||)$ vérifiant une condition d'inhibition, à savoir

$$\bigcap_{n \geq 1} (T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_n I)(E) = \{0\},$$

pour une certaine suite $(\lambda_n)_n \subset \mathbf{C}$, où I désigne l'application identité de E. Nous montrons alors qu'un tel opérateur détermine la topologie de la norme de E si et seulement si $(T - \lambda I)(E)$ est de codimension finie, quel que soit $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $T - \lambda I$ est non injectif. Cette condition d'inhibition se trouve vérifiée par une large classe d'opérateurs dont, par exemple, les shifts au sens de [10]. A ce sujet, A.R. Villena montre que si K est un compact metrisable, alors $C(K)$ admet un shift. Nous montrons que, en fait, tout espace de Banach séparable admet un shift. Dans le cadre des algèbres de Banach, on n'a considéré, jusqu'à présent, que des algèbres commutatives et, le plus souvent, semi-simples. Ici, grâce à des conditions d'inhibition appropriées, nous arrivons à nous passer aussi bien de la commutativité que de la semi-simplicité (cf. (5) et (7)). Par ailleurs, quand l'algèbre A est commutative semi-simple, nous caractérisons les multiplicateurs de A déterminant presque (voir Définition 14) la topologie de la norme de A, montrant ainsi que la réciproque du Theorem 1. ii de [11] est aussi vraie. Enfin, comme applications de nos résultats, nous examinons des opérateurs particuliers dans certaines algèbres classiques.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 46B03, 46J10, 47B38 .
Key words and phrases. Opérateur déterminant la topologie de la norme, multiplicateur.

2 Préliminaires Soient $(E, || \ ||)$ un espace de Banach et $T \in B(E, || \ ||)$. Nous écrirons $T \in \mathrm{DTN}(E)$ pour signifier que T détermine la topologie de la norme de E et, pour un élément a d'une algèbre de Banach A, on écrira $a \in \mathrm{DTN}(A)$ au lieu de $L_a \in \mathrm{DTN}(A)$. Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, l'algèbre $B(E, || \ ||)$ sera notée seulement $B(E)$. Elle sera toujours munie de la norme naturelle des opérateurs

$$||T|| := \sup\{||T(a)||, ||a|| \leq 1\}.$$

L'espace séparateur d'une application linéaire T de E dans un autre espace de Banach F est le sous-espace vectoriel de F

$$\Im(T) := \{y \in F : \exists (x_n)_n \subset E \text{ avec } x_n \to 0 \text{ et } T(x_n) \to y\}.$$

D'après le théorème du graphe fermé, T est continue si et seulement si $\Im(T) = \{0\}$.
Pour une algèbre de Banach A, $M(A)$ sera l'ensemble des caractères de A et $\mathrm{R}(A)$ son radical de Gelfand. Celui-ci est défini par :

$$\mathrm{R}(A) = \begin{cases} \bigcap\{\ker(\chi), \chi \in M(A)\} & : \quad M(A) \neq \emptyset \\ A & : \quad M(A) = \emptyset \end{cases}$$

Il est clair que le radical de Jacobson $\mathrm{Rad}(A)$ de A est toujours contenu dans $\mathrm{R}(A)$ et que les deux sont égaux si et seulement si A est presque commutative; c'est à dire commutative modulo son radical de Jacobson (cf. [1], Chap. 2. 1). La topologie de Gelfand (resp. du "hull kernel") sur $M(A)$ sera notée τ_G (resp. τ_h), $\widehat{a}$ sera la transformée de Gelfand de $a \in A$ et, pour $C \subset A$, on notera

$$h(C) := \{\chi \in M(A) : \chi(c) = 0, c \in C\}.$$

On appellera pseudo-multiplicateur sur A tout $T \in B(A)$ tel qu'il existe une fonction f_T définie sur $M(A)$ et vérifiant pour tout $\chi \in M(A)$

$$\chi(T(a)) = \chi(a) f_T(\chi). \tag{1}$$

Lorsque $M(A)$ est vide, tout $T \in B(A)$ est supposée être un pseudo-multiplicateur. On voit bien que T est un pseudo-multiplicateur si et seulement si pour tous $a, b \in A$, $aT(b) - T(a)b \in \mathrm{R}(A)$. En effet, la fonction $f_T(\chi) := \dfrac{\chi(T(a))}{\chi(a)}$, avec $\chi(a) \neq 0$, est bien définie et vérifie (1).
Rappelons aussi qu'une application linéaire de A dans elle-même est dite multiplicateur à gauche (resp. à droite) si, pour tous $a, b \in A$, $T(ab) = T(a)b$ (resp. $T(ab) = aT(b)$). Un multiplicateur à la fois à gauche et à droite est dit un multiplicateur de A. Tout multiplicateur T est évidemment un pseudo-multiplicateur et la multiplication à gauche par un élément a de A est à la fois un pseudo-multiplicateur et un multiplicateur à gauche. Il est à noter que, grâce au théorème du graphe fermé, un multiplicateur sur une algèbre de Banach sans ordre (i.e. où $aA = \{0\}$ implique que $a = 0$) est nécessairement continu.

La majorité de nos résultats sont vrais aussi bien dans le cas réel que dans le cas complexe. Cependant, dans la suite, nous nous restreindrons aux algèbres associatives sur le corps $\mathbf{C}$ des complexes. Dans le cas d'une algèbre non commutative, nous donnerons des résultats utilisant des propriétés à gauche. Les analogues de ces résultats à droite sont aussi vrais.

3 Opérateurs déterminant la topologie d'un espace de Banach Le résultat suivant est analogue à Lemma 1 de [11]. L'assertion *ii* y est légèrement améliorée.

Lemme 1 *Soient* $|\ |$ *et* $||\ ||$ *deux normes complètes sur un espace vectoriel* E *et* $\Im$ *l'espace séparateur de l'identité de* $(E, |\ |)$ *dans* $(E, ||\ ||)$.
i. Si $T_n \in B(E, ||\ ||) \cap B(E, |\ |)$ *pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *alors il existe* $N \in \mathbf{N}$ *tel que*

$$\overline{T_1 \circ T_2 \circ \ldots \circ T_N(\Im)}^{||\ ||} = \overline{T_1 \circ T_2 \circ \ldots \circ T_n(\Im)}^{||\ ||};\ \forall n \geq N.$$

ii. Si de plus $T_n \circ T_m = T_m \circ T_n$ *pour tout* n, m, *alors il existe* $N \in \mathbf{N}$ *tel que*

$$\overline{T_1 \circ T_2 \circ \ldots \circ T_N(\Im)}^{||\ ||} = \overline{\bigcap_n T_1 \circ T_2 \circ \ldots \circ T_n(\Im)}^{||\ ||}, \forall n \geq N.$$

Preuve : L'assertion *i.* découle immédiatement du lemme de stabilité ([9], Lemma 1.6). Concernant *ii.*, il existe, en vertu de *i.*, $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\overline{T_1 \circ T_2 \circ \ldots \circ T_N(\Im)}^{||\ ||} = \overline{T_1 \circ T_2 \circ \ldots \circ T_n(\Im)}^{||\ ||};\ \forall n \geq N.$$

Posons $F = \overline{T_1 \circ T_2 \circ \ldots \circ T_N(\Im)}^{||\ ||}$ et, pour tout $n \geq N$, $R_n := T_{N+1} \circ \ldots \circ T_n$. Alors F est un espace de Banach et, par *i.*, R_n transforme F en un sous-espace dence de F. Par le théorème de Mittag-Leffler ([3], Chap. 2), il existe N tel que

$$\overline{T_1 \circ T_2 \circ \ldots \circ T_N(\Im)}^{||\ ||} = \overline{\bigcap_n T_1 \circ T_2 \circ \ldots \circ T_n(\Im)}^{||\ ||}, \forall n \geq N. \quad ///$$

La proposition suivante améliore Proposition 7 de [5]. Notre preuve est plus directe et courte.

Proposition 2 *Soit* $(E, ||\ ||)$ *un espace de Banach et* $T \in B(E, ||\ ||)$. *Si* T *est non injectif et* $T(E)$ *est de codimension infinie, alors* $T \notin \mathrm{DTN}(E)$. *En particulier, si* T *n'est ni injectif ni surjectif, alors* $T \notin \mathrm{DTN}(B(E))$.

Preuve : Soient $u \in \ker T \setminus \{0\}$ et $(e_n)_n$ une suite d'éléments linéairement indépendants d'un supplémentaire de $T(E)$ telle que $||e_n|| = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Considérons une forme linéaire f sur E telle que $f(e_n) = n$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, $f(u) = 1$ si $u \notin T(E)$ et f est identiquement nulle sur $T(E)$. Alors l'application $x \mapsto 2x - f(x)u$ est une bijection de E sur E. Par conséquent, $|x| := ||2x - f(x)u||$ est une norme complète sur E non équivalente à $||\ ||$, puisque f est discontinue. De plus

$$\begin{aligned} |T(x)| &= ||2T(x) - f(T(x))u|| \\ &= ||2T(x)|| \\ &= ||T(2x - f(x)u)|| \\ &\leq ||T||||2x - f(x)u|| \\ &\leq ||T|||x|. \end{aligned}$$

Par suite $T \in B(E, |\ |)$ et donc $T \notin \mathrm{DTN}(E)$.
Maintenant si T n'est ni injectif ni surjectif, soient $0 \neq x \in \ker T$ et $u \notin T(E)$. Pour toute fonctionnelle continue f sur E et tout $y \in E$, on considère l'application $f \otimes y : e \mapsto f(e)y$. Alors $f \otimes x$ est un élément non nul du noyau de L_T. De plus $E' \otimes u := \{f \otimes u : f \in E'\}$ est un espace de dimension infinie ne rencontrant l'image de L_T qu'en zéro. Par ce qui précède, L_T ne détermine pas la topologie de $B(E)$. ///

Théorème 3 *Soit $(E, \| \|)$ un espace de Banach et $T \in B(E, \| \|)$. S'il existe $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbf{C}$ telle que*

$$\bigcap_{n\geq 1} (T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_n I)(E) = \{0\},$$

alors le spectre ponctuel $\mathrm{Sp}_p(T)$ de T est inclu dans $\{\lambda_k : \ k \geq 1\}$. De plus, $T \in \mathrm{DTN}(E)$ si et seulement si, $(T-\lambda I)(E)$ est de codimension finie pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $T-\lambda I$ est non injectif.

Preuve : Si λ est une valeur propre de T différente de tous les λ_n, alors il existe $x \in E$ non nul tel que $T(x) = \lambda x$. Mais l'égalité

$$x = (T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)\dots(T-\lambda_n I)\left(\frac{1}{(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_n)}x\right),$$

pour tout $n \geq 1$ contredit notre hypothèse. Concernant l'équivalence, la nécessité découle immédiatement de Proposition 2. Pour la suffisance, soient une norme complète $| \ |$ sur E rendant continu T et $\Im$ l'espace séparateur de l'identité $I : (E, | \ |) \to (E, \| \|)$. Pour tout $n \geq 1$, posons $T_n = T - \lambda_n I$. D'après (1) *ii.*, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned} &\overline{(T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)\dots(T-\lambda_N I)(\Im)}^{\| \|} \\ &= \overline{\bigcap_n (T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)\dots(T-\lambda_n I)(\Im)}^{\| \|} = \{0\}. \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que chaque $(T-\lambda_k I)$ est non injectif, $k = 1, \dots, N$. Soit $K = (T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)\dots(T-\lambda_N I)$. Comme $(T-\lambda_k I)(E)$ est de codimension finie pour tout k, il en est de même de $K(E)$. Ainsi, d'après un résultat classique ([9], Lemma 3.3), $K(E)$ est fermé pour les deux normes. Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} & & (K(E), | \ |) & & \\ & K \nearrow & & \searrow I_{K(E)} & \\ (E, | \ |) & & & & (K(E), \| \|) \\ & I \searrow & & \nearrow K & \\ & & (E, \| \|) & & \end{array}$$

De plus, d'après Lemma 1.3. *i.* de [9], $I_{K(E)} \circ K = K \circ I$ est continue. Comme l'application $K : (E, | \ |) \to (K(E), | \ |)$ est continue et surjective, elle est ouverte. D'où $I_{K(E)}$ est continue. Ainsi les deux normes sont équivalentes sur le sous-espace fermé $K(E)$ de codimension finie. Elles le sont donc sur tout E. ///

Le problème de savoir si un espace de Banach admet toujours un opérateur déterminant la topologie de sa norme a été soulevé dans [10]. L'auteur montre que si T est un opérateur shift sur E, alors $T \in DTN(E)$. Il montre alors que, pour tout compact métrisable K, $C(K)$ admet un shift (Theorem 4). Dans [5], K. Jarosz montre que si E est un espace de Banach séparable et $(x_n, x_n^*)_n$ est une suite fondamentale totale et biorthogonale [7], alors $R \in DTN(E)$, où

$$R(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n^*(x) x_n, x \in E.$$

Il se trouve que

$$\bigcap_{n\geq 1} (R - 2^{-k} I)(E) = \{0\}$$

et que, puisque R est compact et $2^{-k} \in \mathrm{Sp}_p(R)$, $(R - 2^{-k}I)(E)$ est de codimension finie ([4], page 217). Donc (3) permet aussi de conclure que $R \in \mathrm{DTN}(E)$. Cependant, $R - 2^{-k}I$ n'est ni injectif ni surjectif. Donc $R - 2^{-k}I \notin \mathrm{DTN}(B(E))$ d'après (2). Par conséquent $R \notin \mathrm{DTN}(B(E))$. Il en résulte que R n'est pas un shift sur E. Ici, nous obtenons

Théorème 4 *Tout espace de Banach séparable $(E, \| \ \|)$ admet un opérateur shift borné.*

Preuve : D'après [7], il existe une suite fondamentale totale et biorthogonale $(x_n, x_n^*)_{n \geq 1}$. Soit $T \in B(E)$ défini par

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|x_n^*\| \|x_{n+1}\|} x_n^*(x) x_{n+1}.$$

Pour tout $n \geq 1$,

$$T^n(E) \subset \overline{T^n(\mathrm{span}\{x_k : \ k \geq 1\})} = \overline{\mathrm{span}\{x_k : k \geq n+1\}}.$$

Donc $\{x_k^* : \ 1 \leq k \leq n\} \subseteq \ker(T^{*n})$. Ainsi $\cup_n \ker(T^{*n})$ sépare les points de E. Par ailleurs, si $T(x) = 0$, pour tout $n \geq 1$, $x_{n+1}^*(T(x)) = 0$. D'où $x_n^*(x) = 0$ et comme n est quelconque $x = 0$ et T est injectif. Donc T est un shift. ///

4 Multiplicateurs déterminant la topologie de la norme d'une algèbre de Banach

Dans [5], K. Jarosz montre qu'un élément a d'une algèbre de Banach commutative, semi-simple et unitaire A détermine la topologie de la norme de A si et seulement si $(a-\lambda)A$ est de codimension finie chaque fois que $a - \lambda$ est un diviseur de zéro. Il soulève alors le problème de donner une telle caractérisation dans le cas non commutatif (semi-simple). Dans cette section, nous donnons quelques éléments de réponse à ce problème.

Théorème 5 *Soit $(A, \| \ \|)$ une algèbre de Banach et $T \in B(E)$ un multiplicateur à gauche. S'il existe $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbf{C}$ et un idéal à gauche J tels que*
i. $\forall b \in A$, $bJ = \{0\} \Longrightarrow T(b) = 0$,
ii. $\bigcap_{n\geq 1} (T - \lambda_1 I) \ldots (T - \lambda_n I)(J) = \{0\}$,
alors $T \in \mathrm{DTN}(A)$ si, et seulement si, $(T - \lambda I)(A)$ est de codimension finie, quel que soit $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $T - \lambda I$ est non injectif.

Preuve : La nécessité découle encore de Proposition 2. Pour la suffisance, soient une norme complète $| \ |$ sur A telle que $T \in B(A, | \ |)$ et $\Im$ l'espace séparateur de l'identité $I : (A, | \ |) \to (A, \| \ \|)$. D'après (1) *ii.*, appliqué à la suite $T_n = T - \lambda_n I$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\overline{T_1 \ldots T_N(\Im)}^{\| \ \|} = \overline{\bigcap_n T_1 \ldots T_n(\Im)}^{\| \ \|}.$$

Donc, pour tout $j \in J$,

$$\begin{aligned} T_1 \ldots T_N(\Im)\, j &\subset \overline{\bigcap_n T_1 \ldots T_n(\Im) j}^{\| \ \|} \\ &\subset \overline{\bigcap_n T_1 \ldots T_n(J)}^{\| \ \|} \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

Ainsi, $(T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_N I)(\Im)J=\{0\}$ et $i.$ donne que

$$T(T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_N I)(\Im)=\{0\},$$

ou encore, en posant $\lambda_0=0$

$$(T-\lambda_0 I)(T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_N I)(\Im)=\{0\}.$$

Soit $K=(T-\lambda_0 I)\dots(T-\lambda_N I)$. Quitte à enlever les $T-\lambda_k I$ injectifs, on peut supposer que $K=(T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_n I)$ avec chaque $(T-\lambda_k I)$ non injectif. Comme $(T-\lambda_k I)(A)$ est de codimension finie pour tout k, il en est de même de $K(A)$. Ainsi, d'après Lemma 3.3 de [9], $K(A)$ est fermé pour les deux normes. Comme dans la preuve de (3), d'après Lemma 1.3 de [9], $I_{K(A)}\circ K$ est continue. Comme $K:(A,|\ |)\to(K(A),|\ |)$ est continue et surjective, elle est ouverte. D'où $I_{K(A)}$ est continue. Ainsi les deux normes sont équivalentes sur le sous-espace fermé $K(A)$ de codimension finie. Donc elles le sont aussi sur A. ///

Dans une algèbre de Banach A, un idéal ne vérifie pas en général la condition $i.$ du théorème précédent. On ne peut donc affirmer le résultat pour un idéal quelconque. Cependant, dans le cas du radical de Gelfand $\mathrm{R}(A)$, nous obtenons un analogue de (5) sans la condition $i.$ Pour le montrer, nous aurons besoin du

Lemme 6 *Soient $(A,\|\ \|)$ une algèbre de Banach, $T\in B(A)$ un pseudo-multiplicateur, $|\ |$ une norme complète sur A telle que $T\in B(A,|\ |)$ et $\Im$ l'espace séparateur de l'identité de $(A,|\ |)$ dans $(A,\|\ \|)$. Alors il existe $\lambda_1,\ \dots,\lambda_n\in\mathbf{C}$ tels que*

$$(T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_n I)(\Im)\subset\mathrm{R}(A).$$

Preuve : Si $M(A)$ est vide, le résultat est évident. Supposons maintenant que $M(A)$ est non vide et posons $h(\Im):=\{\chi\in M(A):\chi(\Im)=\{0\}\}$. Alors l'ensemble $\{f_T(\chi),\chi\in M(A)\backslash h(\Im)\}$ est fini. En effet si ce n'est pas le cas, il existera une suite $(\chi_n)_n\subset M(A)\backslash h(\Im)$ telle que $f_T(\chi_n)\neq f_T(\chi_m)$, dès que $n\neq m$. Les opérateurs $T_n: a\mapsto T(a)-f_T(\chi_n)(a)$ appartiennent à $B(E,\|\ \|)\cap B(E,|\ |)$ et commutent deux à deux. Par (1), il existe $N\in\mathbf{N}$ tel que, pour tout $n\geq N$

$$\overline{T_1\circ T_2\circ\dots\circ T_N(\Im)}^{\|\ \|}=\overline{T_1\circ T_2\circ\dots\circ T_n(\Im)}^{\|\ \|}.$$

En particulier, pour tout $s\in\Im$,

$$T_1\circ T_2\circ\dots\circ T_N(s)\in\overline{T_1\circ T_2\circ\dots\circ T_n(\Im)}^{\|\ \|}.$$

En appliquant χ_{N+1}, on obtient $\chi_{N+1}(s)=0$. Puisque s est quelconque, ceci contredit $\chi_{N+1}\notin h(\Im)$. Maintenant, soit $\chi_1\dots\chi_m\in M(A)$ tels que

$$f_T(M(A)\setminus h(\Im))=\{f_T(\chi_1),\dots,f_T(\chi_m)\}.$$

Pour tout $\chi\in M(A)$, on a

$$\begin{aligned}&\chi\left[(T-f_T(\chi_1 I))\dots(T-f_T(\chi_m)I)(\Im)\right]\\ &\quad=\ (f_T(\chi)-f_T(\chi_1))\dots(f_T(\chi)-f_T(\chi_m))\chi(\Im)=\{0\}.\end{aligned}$$

D'où

$$(T-f_T(\chi_1)I)\dots(T-f_T(\chi_m)I)(\Im)\subset\mathrm{R}(A).\quad ///$$

Théorème 7 *Soit $(A, \| \ \|)$ une algèbre de Banach et $T \in B(A)$ un pseudo-multiplicateur. S'il existe $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbf{C}$ telle que*

$$\bigcap_{n\geq 1} [(T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_n I)]\,(\mathrm{R}(A)) = \{0\},$$

alors $T \in \mathrm{DTN}(A)$ si, et seulement si, $(T-\lambda I)(A)$ est de codimension finie, quel que soit $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $T-\lambda I$ est non injectif.

Preuve : Nous devons seulement montrer la suffisance. Soient donc une norme complète $| \ |$ sur A telle que $T \in B(A, | \ |)$ et $\Im$ l'espace séparateur de l'identité $I : (A, | \ |) \to (A, || \ ||)$. D'après (6), il existe $\beta_1, \ \dots, \beta_m \in \mathbf{C}$ tels que :

$$(T-\beta_1 I)\dots(T-\beta_m I)(\Im) \subset \mathrm{R}(A).$$

Lemme 1 *ii.*, appliqué à la suite $T_n := T-\beta_n I$ pour $1 \leq n \leq m$ et $T_n = T-\lambda_{n-m} I$ pour $n \geq m+1$, entraîne qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$(T-\beta_1 I)\dots(T-\beta_m I)(T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_N I)(\Im) = \{0\}.$$

La suite de la preuve est similaire à celle de (3). ///

Une conséquence immédiate de ce théorème est la suivante:

Corollaire 8 *Soit $(A, \| \ \|)$ une algèbre de Banach commutative et semi-simple telle que $M(A)$ est sans points isolés. Un multiplicateur T sur A détermine la topologie de la norme de A si et seulement si son spectre ponctuel $\mathrm{Sp}_p(T)$ est vide.*

On voit bien que si A est comme dans (8) et $a \in DTN(A)$, alors $a \in DTN(B)$ pour toute sous-algèbre fermée B de A contenant l'élément a.

L'exemple suivant montre que la condition d'inhibition de (7) est beaucoup plus souple que celle considérée pour un élément a de A dans [11] Theorem 2, à savoir

$$\bigcap_{n\geq 1} a^n \mathrm{Rad}(A) = \{0\}.$$

Exemple 9 *Soit $(C(K), || \ ||_\infty)$ l'algèbre des fonctions continues sur un compact séparable K et $A = S_2(C(K))$ l'algèbre des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2 à termes dans $C(K)$. Munie du produit habituel des matrices et de la norme*

$$||(f_{i,j})_{i,j=1,2}|| := \sum_{i,j=1,2} ||f_{i,j}||_\infty,$$

A est une algèbre de Banach telle que

$$\mathrm{R}(A) = \mathrm{Rad}(A) = \{(f_{i,j})_{i,j} : f_{1,1} = f_{2,2} = 0\}.$$

Pour tout $f \in A$ et $n \geq 0$, soit g_n la fonction définie sur K par

$$g_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{f(k)^n}\exp(-\frac{1}{|f(k)|}) & : \quad f(k) \neq 0 \\ 0 & : \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Si $D = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$, *alors pour tout* $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & g_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D^n \begin{pmatrix} 0 & g_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} 0 & g_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \bigcap_{n\geq 1} D^n \mathrm{Rad}(A).$$

Par contre, comme nous allons le voir dans la proposition suivante, il existe $(\lambda_n)_n \subset \mathbf{C}$ *telle que*

$$\bigcap_{n\geq 1} [(f-\lambda_1)(f-\lambda_2)\dots(f-\lambda_n)C(K)] = \{0\}.$$

D'où

$$\bigcap_{n\geq 1} (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\dots(D-\lambda_n)\mathrm{Rad}(A) = \{0\}.$$

Proposition 10 *Soit* $(A, \|\ \|)$ *une algèbre de Banach telle que* $M(A)$ *est séparable (ou vide) et* $T \in B(A)$ *un pseudo-multiplicateur. Alors*
1.) Il existe $(\lambda_n)_n \subset \mathbf{C}$ *telle que*

$$\bigcap_{n\geq 1} (T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)\dots(T-\lambda_n I)(A) \subset \mathrm{R}(A).$$

2.) Les assertions suivantes sont équivalentes :
i. $\exists(\lambda_n)_n \subset \mathbf{C} : \bigcap_{n\geq 1}(T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)\dots(T-\lambda_n I)(\mathrm{R}(A)) = \{0\}$
ii. $\exists(\alpha_n)_n \subset \mathbf{C} : \bigcap_{n\geq 1}(T-\alpha_1 I)(T-\alpha_2 I)\dots(T-\alpha_n I)(A) = \{0\}$.

Preuve : 1. Soit $(\chi_n)_{n\geq 1}$ un ensemble dénombrable partout dense dans $M(A)$. Si

$$b \in \bigcap_{n\geq 1} (T - f_T(\chi_1)I)(T - f_T(\chi_2)I)\dots(T - f_T(\chi_n)I)(A),$$

alors, pour tout $n \geq 1$, il existe $b_n \in A$ tel que

$$b = (T - f_T(\chi_1)I)(T - f_T(\chi_2)I)\dots(T - f_T(\chi_n)I)(b_n).$$

Donc $\chi_n(b) = 0$. Comme n est quelconque, par densité, $\chi(b) = 0$ pour tout $\chi \in M(A)$.
2. Il est évident que *i.* découle de *ii.* Pour la réciproque, supposons que

$$\bigcap_{n\geq 1} (T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)\dots(T-\lambda_n I)(\mathrm{R}(A)) = \{0\}.$$

Pour $n \in \mathbf{N}$, posons $\alpha_n = \lambda_p$ si $n = 3p-2$ ou $n = 3p-1$ pour un certain $p \geq 1$ et $\alpha_n = f_T(\chi_p)$ si $n = 3p$. Alors

$$\bigcap_{n\geq 1} (T-\alpha_1 I)(T-\alpha_2 I)\dots(T-\alpha_n I)(A) = \{0\}.$$

En effet, si

$$b \in \bigcap_{n\geq 1} (T-\alpha_1 I)(T-\alpha_2 I)\dots(T-\alpha_n I)(A),$$

alors, pour chaque $n \in \mathbf{N}$, il existe $b_n \in A$ tel que

$$\begin{aligned} b &= (T-\alpha_1 I)(T-\alpha_2 I)\dots(T-\alpha_{3n} I)(b_n) \\ &= ((T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_n I))^2 \left((T-f_T(\chi_1)I)\dots(T-f_T(\chi_n)I)\right)(b_n). \end{aligned}$$

Donc $\chi_n(b) = 0$. Puisque n est quelconque $\chi(b) = 0$, quel que soit $\chi \in M(A)$. Ainsi

$$\chi\left((T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_n I)(T-f_T(\chi_1)I)\dots(T-f_T(\chi_n)I)(b_n)\right) = 0.$$

Par suite $b \in (T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_n I)(\mathrm{R}(A))$ et donc $b = 0$ puisque n est arbitraire. ///

L'assertion *ii.* de la proposition précédente n'est plus garantie sans la condition de séparabilité de $M(A)$ comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 11 *Soit C le cercle unité de $\mathbf{C}$, $(v_t)_{t\in C}$ une famille de symboles et u un autre symbole. On pose $u^n u^m = u^{n+m}$, $u^n v_t = v_t u^n = t^n v_t$ et $v_t v_s = v_t$ si $t = s$ et $v_t v_s = 0$ sinon. On considère alors l'algèbre*

$$A := \{a := \sum_{n=0} \alpha_n u^n + \sum_{t\in C} \beta_t v_t; ||a|| := \sum_{n=0} |\alpha_n| + \sum_{t\in C} |\beta_t| < \infty\}.$$

Alors $(A, ||\ ||)$ est une algèbre de Banach commutative semi-simple. Donc pour toute suite $(\lambda_n)_n \subset \mathbf{C}$, on a

$$\bigcap_{n\geq 1} (u-\lambda_1)(u-\lambda_2)\dots(u-\lambda_n)\mathrm{R}(A) = \{0\}.$$

Par contre, aucune suite $(\lambda_n)_n$ ne vérifie

$$\bigcap_{n\geq 1} (u-\lambda_1)(u-\lambda_2)\dots(u-\lambda_n)A = \{0\}$$

puisque $C \subset \mathrm{Sp}_p(L_u)$.

5 Cas d'une algèbre de Banach commutative semi-simple Soit $(A, ||\ ||)$ une algèbre de Banach. On dira que $Y \subset M(A)$ est total s'il sépare les points de A. Si A est commutative et semi-simple, alors toute partie maximisante de $M(A)$, en particulier la frontière de Shilov de A, est totale. Une topologie τ sur Y sera dite compatible avec A si les fibres

$$F_{(a,\alpha)} := \{\chi \in Y : \chi(a) = \alpha\}$$

sont τ-femées, $a \in A$, $\alpha \in \mathbf{C}$. La topologie de Gelfand ainsi que celle du "hull kernel" sont compatibles avec A. En outre, toute topologie compatible avec A est plus fine que τ_h et donc nécessairement T_1. Maintenant pour une topologie τ sur $Y \subset M(A)$, on dira que A est (Y,τ)-régulière si pour tout τ-ouvert D de Y il existe $0 \neq a \in A$ tel que $\chi(a) = 0$, quel que soit $\chi \in Y \setminus D$.

Lemme 12 *Soient $(A, ||\ ||)$ une algèbre de Banach, $Y \subset M(A)$ et τ une topologie T_1 sur Y telle que A est (Y,τ)-régulière. Alors pour tout τ-ouvert infini D de Y, il existe $u \in A$ tel que $\widehat{u} = 0$ sur $Y \setminus D$ et $\widehat{u}(D)$ est infini.*

Preuve : Soient D un ouvert infini de (Y,τ) et

$$I := \{a \in A : \widehat{a} = 0 \text{ sur } Y \setminus D\}.$$

Alors I est un idéal fermé de A non trivial puisque A est (Y,τ)-régulière. Supposons que, pour tout $a \in I$, $\widehat{a}(D)$ est un ensemble fini. Alors, pour chaque $a \in I$, la seule fibre infinie est $F_{(a,0)}$. En effet s'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $F_{(a,\lambda)}$ est infinie, par Lemma 12 de I. Kaplanski [6], il existera $b \in A$ tel que $\chi_n(b) \neq \chi_m(b)$ dès que $n \neq m$, où $(\chi_n)_n$ est une suite infinie d'éléments deux à deux distincts de $F_{(a,\lambda)}$. Ainsi, $u := ba \in I$ et $\widehat{u}(D)$ est infini. C'est une contradiction. Ainsi, pour tout $a \in I$, $\{\chi \in D : \chi(a) \neq 0\}$ est un ensemble fini. Suppose construits $a_1, \ldots, a_n \in I$ et $\chi_1, \ldots, \chi_n \in Y$ tels que $\chi_k(a_k) = 1$ et $\chi_k(a_p) = 0$, quel que soit $p < k \leq n$. Puisque τ est T_1, $D_{n+1} := D \setminus \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ est un ouvert de Y. Comme A est (Y,τ)-régulière, il existe $a_{n+1} \in A$ et $\chi_{n+1} \in D_{n+1}$ vérifiant $\chi_{n+1}(a_{n+1}) = 1$ et $\widehat{a_{n+1}} = 0$ sur $Y \setminus D_{n+1}$. Ainsi construit-on par induction $(\chi_n)_n \subset D$ et $(a_n)_n \subset I$ tels que $\chi_n(a_n) = 1$ et $\chi_n(a_k) = 0$ dès que $k < n$. On définit une application linéaire θ de I dans l'algèbre $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$ des suites complexes à support fini par $\theta(a) := (\chi_n(a))_n$. Alors l'image de θ est de dimension infinie puisque $\{\theta(a_n), n \in \mathbf{N}\}$ est une famille libre. De plus le noyau $\ker(\theta)$ est fermé dans I. Donc $\theta(I)$ peut être muni d'une norme d'algèbre de Banach, la transportée de celle de $I/\ker(\theta)$. Ceci est impossible d'après le théorème de Baire puisque $\theta(I)$ est de dimension dénombrable. Ceci achève la démonstration. ///

On est tenté de croire que toute topologie τ sur Y telle que A est (Y,τ)-régulière doit être moins fine que τ_h. En fait, il n'en est rien comme le montre l'exemple 1 suivant. De plus une algèbre de Banach peut être (Y,τ)-régulière pour un certain $Y \subset M(A)$ et une topologie τ sans être régulière au sens classique.

Exemple 13 *1. Soit A l'algèbre des fonctions continues f sur $[0,1]$ telles que $f(0) = f(1)$. Munie de la norme uniforme, A est une algèbre de Banach commutative et semi-simple telle que $M(A) = [0,1[$. La topologie de Gelfand sur $M(A)$ coincide avec celle du "hull kernel". C'est la topologie τ pour laquelle un voisinage de $x \in]0,1[$ est tout ensemble contenant un intervalle $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ et un voisinage de 0 est tout ensemble contenant un ensemble de la forme $[0,\epsilon[\cup]1-\epsilon,1[$, $\epsilon > 0$. Cette topologie est strictement moins fine que la topologie usuelle τ_u de $[0,1[$ et A est $(M(A),\tau_u)$-régulière.*

2. Soit $X = \{z \in \mathbf{C} : \frac{1}{2} \leq |z| < 2\}$ et A l'algèbre des fonctions continues sur X et ayant un prolongement holomorphe sur tout le disque unité ouvert D. Munie de la norme uniforme sur X, A est une algèbre de Banach dont l'ensemble des caractères est le disque ouvert de centre 0 et de rayon 2. Par le principe du maximum, $Y := \{z \in \mathbf{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$ est total. De plus A est (Y,τ)-régulière mais pas régulière au sens classique.

La définition suivante a été donnée pour les éléments d'une algèbre par A.R. Villena [11].

Définition 14 *On dit que $T \in B(A, \|\ \|)$ détermine presque la topologie de la norme de l'algèbre de Banach $(A, \|\ \|)$ si, pour toute norme complète $|\ |$ sur A telle que $T \in B(A, |\ |)$, il existe un idempotent non nul $e \in A$ tel que eA est de dimension finie et les normes quotients de $|\ |$ et de $\|\ \|$ sont équivalentes sur A/eA.*

Le résultat suivant donne des conditions sous lesquelles un multiplicateur détermine (presque) la topologie de la norme de A. Dans le cas de la multiplication par un élément de A, l'assertion 3. contient la réciproque de Theorem 1, *ii.* de [11].

Théorème 15 *Soient $(A, || \, ||)$ une algèbre de Banach commutative et semi-simple, T un multiplicateur sur A et $Y \subset M(A)$ un ensemble total.*
1. S'il existe une topologie τ sur Y compatible avec A telle que f_T n'est constante sur aucun ouvert de (Y, τ), alors $T \in \mathrm{DTN}(A)$.
2. Si Y est τ_G-ouvert dans $M(A)$ et s'il existe une topologie τ sur Y compatible avec A telle que tout τ-ouvert de Y sur lequel f_T est constante est fini, alors T détermine presque la topologie de la norme de A.
3. Si T détermine presque la topologie de A, alors f_T n'est constante sur aucun τ-ouvert infini de Y quelle que soit la T_1-topologie τ sur Y telle que A est (Y, τ)-régulière.

Preuve : 1. Supposons qu'il existe une topologie τ sur Y compatible avec A et telle que f_T n'est constante sur aucun ouvert de (Y, τ). Alors $T - \lambda I$ est injectif, quel que soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Donc $T \in \mathrm{DTN}(A)$ d'après (8).
2. Soient une norme complète $| \, |$ sur A et $\Im$ l'espace séparateur de l'identité de $(A, | \, |)$ dans $(A, || \, ||)$. Par (6), il existe $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ dans $\mathbf{C}$ tels que

$$(T - \lambda_1 I) \ldots (T - \lambda_n I)(\Im) = \{0\}.$$

Donc $D := Y \setminus h(\Im)$ est contenu dans la réunion des fibres

$$F_k := \{y \in Y : f_T(y) = \lambda_k\}, \; k = 1, ..., n.$$

D'où D est aussi contenu dans la réunion des τ-intérieurs $\mathrm{int}(F_k)$ des F_k. Comme cette dernière est finie par hypothèse, il en est de même de D. Posons $D = \{y_1, \ldots, \; y_m\}$. Puisque Y est τ_G-ouvert dans $M(A)$, il en est de même de D. Donc, par le théorème des idempotents de Shilov, il existe un idempotent $e \in A$ dont la transformée de Gelfand $\widehat{e}$ est exactement la fonction caractéristique de D. L'application

$$ea \mapsto (y_1(a), \ldots, y_n(a))$$

étant une injection de eA dans $\mathbf{C}^n$, eA est de dimension finie. De plus $(1 - e)\Im = \{0\}$, car

$$(1 - e)s := s - es \in \ker \chi, \forall \chi \in Y, s \in \Im.$$

Maintenant, l'application $\theta : a \mapsto a - ea$, définie de $(A, | \, |)$ dans $(A, || \, ||)$ peut s'écrire $\theta = R \circ I$, où $R : (A, || \, ||) \to (A, || \, ||)$, $a \mapsto a - ea$ et I est lidentité de $(A, | \, |)$ dans $(A, || \, ||)$. Par Lemma 1.3 de [9], θ est continue. Ainsi, si $(a_n)_n$ est une suite d'éléments de A telle que $a_n + eA$ tend vers 0 dans le quotient $(A/eA, | \, |)$, alors il existe $(b_n)_n \subset A$ telle que $a_n - eb_n$ converge vers 0 dans $(A, | \, |)$. D'où, $a_n - ea_n = (1 - e)(a_n - eb_n)$ converge vers 0 dans $(A, || \, ||)$. Par suite $a_n + eA$ converge vers 0 dans $(A/eA, || \, ||)$. Encore une fois par le théorème du graphe fermé, l'application identité est continue de $(A/eA, | \, |)$ dans $(A/eA, || \, ||)$. Par conséquent, les deux normes sont équivalentes sur A/eA.
3. Supposons que T détermine presque la topologie de A et que infini D de (Y, τ). D'après (12), il existe $u \in A$ tel que $\widehat{u}$ prend une infinité de valeurs sur D et $\widehat{u} = 0$ sur $Y \setminus D$. Donc les puissances entières de u sont linéairement indépendantes et $H \cap K = \{0\}$, où H est l'espace engendré par les u^n et K celui engendré par tous les $a \in A$ tels que $\widehat{a}$ est nulle sur tout D sauf, peut être, en un nombre fini de points. On considère alors $a_n := \frac{u^n}{||u^n||}$ et une forme linéaire μ sur A s'annulant sur K et assignant n à a_n. Alors $|b| := ||2b - \mu(b)u||$ définit une norme complète sur A non équivalente à $|| \, ||$ et rendant continu T. Maintenant soit $e \in A$ un idempotent tel que eA est de dimension finie. Alors e est nécessairement dans K, car sinon eA admettrait une infinité de caractères distincts. Il en résulte que $\mu(be) = 0$,

quel que soit $b \in A$. De plus

$$\begin{aligned} |a_n - eb| &= ||2a_n - 2eb - \mu(a_n - eb)u|| \\ &= ||2a_n - 2eb - \mu(a_n)u|| \\ &\geq ||2eb - \mu(a_n)u|| - ||2a_n|| \\ &\geq n||u - e(\frac{2}{n}b)|| - 2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \inf\{|a_n - eb|, b \in A\} &\geq n \inf\{||u - e(\frac{2}{n}b)||, b \in A\} - 2 \\ &\geq n \inf\{||u - eb||, b \in A\} - 2 \\ &\geq n\delta - 2 \end{aligned}$$

Comme la distance δ de u à eA est non nulle, la suite $(a_n + eA)_n$ n'est pas bornée pour la norme quotient associée à $|\ |$ sur A/eA. Donc cette norme ne peut être équivalente à la norme quotient de $||\ ||$. C'est une contradiction. ///

Théorème 15 permet d'obtenir une caractérisation des éléments de A déterminant presque la topologie de la norme de A.

Corollaire 16 *Soient A une algèbre de Banach commutative semi-simple. Un élément a de A détermine presque la topologie de la norme de A si et seulement si tout τ_h-ouvert de $M(A)$ sur lequel $\widehat{a}$ est constante est fini.*

En utilisant (16), nous donnons des exemples d'algèbres de Banach commutatives et semi-simples dont aucun élément ne détermine presque la topologie de la norme.

Exemple 17 *1. Soit X un ensemble de cardinal $|X| > 2^{\aleph_0}$ et A l'algèbre de toutes les fonctions complexes bornées sur X, munie de la norme uniforme. Alors aucun élément de A ne détermine presque la topologie de la norme de A. En effet si c'était le cas pour un certain f, d'après (12), X s'écrirait comme réunion d'une famille F_r, $r \in \mathbf{C}$, où chaque F_r est fini. Ceci contredit l'hypothèse sur la cardinalité de X.*

2. Un autre exemple est donné par l'algèbre A des fonctions continues sur l'espace $[0, \omega[$ munie de la norme uniforme, où ω est le premier ordinal non dénombrable. Comme chaque $f \in A$ est constante à partir d'un certain rang, aucun élément (multiplicateur) de A ne détermine presque la topologie de la norme de A.

6 Applications

Dans cette section, nous donnons quelques applications de nos résultats.

6.1 L'algèbre $B(A)$

Proposition 18 *Soient $(A, ||\ ||)$ une algèbre de Banach commutative semi-simple telle que $M(A)$ est séparable et sans point isolé et T un multiplicateur de A. Alors $T \in \mathrm{DTN}(B(A))$ si et seulement si $T \in \mathrm{DTN}(A)$.*

Preuve : Supposons que $T \in \mathrm{DTN}(A)$. D'après (10), il existe $(\lambda_k)_{k\geq 1} \subset \mathbf{C}$ telle que

$$\bigcap_{n\geq 1}(T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_n I)(A) = \{0\}.$$

Soit

$$S \in \bigcap_{n\geq 1}(T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_n I)B(A).$$

Pour tout $n \geq 1$, il existe $S_n \in B(A)$ tel que $T = (T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_n I)S_n$. Donc, pour tout $x \in A$, $S(x) = (T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_n I)S_n(x)$. Il en résulte que $S(x) = 0$ et par suite que $S = 0$. Maintenant si $\lambda \in \mathbf{C}$ et $S \in B(A)$ sont tels que $(T-\lambda I)S = 0$, alors $(T-\lambda I)S(x) = 0$, quel que soit $x \in A$. Donc $S(x) = 0$ d'après Corollaire (8). Ainsi $S = 0$ et (3) permet de conclure.
Supposons maintenant que $T \notin \mathrm{DTN}(A)$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $(T-\lambda I)$ est non injectif. Comme A est semi-simple, elle est sans ordre et $(T-\lambda I)$ est aussi non surjectif. On conclue alors grâce à (2).

6.2 Opérateurs de composition de $A_0(D)$ Soit $A := A_0(D)$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur le disque $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ nulles en zéro et continues sur $\overline{D}$. On munit A de la norme de la convergence uniforme. Soient $\varphi \in A$ et C_φ l'opérateur de composition associé à φ (i.e. $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$). Pour que C_φ soit un élément de $B(A_0(D))$, il faut et il suffit que φ soit dans la boule unité fermée de $A_0(D)$. On notera par $\mathrm{val}(f)$ la valuation de $f \in A$. Si $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n$, $z \in D$, alors $\mathrm{val}(f)$ est définie par

$$\mathrm{val}(f) := \begin{cases} \min\{n \geq 1, f_n \neq 0\} & : \quad f \neq 0 \\ +\infty & : \quad f = 0 \end{cases}$$

On a bien $\mathrm{val}(fg) = \mathrm{val}(f) + \mathrm{val}(g)$ et, si $||g|| \leq 1$, $\mathrm{val}(f \circ g) = \mathrm{val}(f)\mathrm{val}(g)$ avec la convention $+\infty + n = +\infty = +\infty \cdot n, n \geq 1$.

Proposition 19 *Soient* $\varphi \in A_0(D)$ *telle que* $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ *et* $z_0 \in \overline{D}$.
1. Si $\mathrm{val}(\varphi) \geq 2$, *alors* $C_\varphi \in \mathrm{DTN}(B(A))$.
2. Si $\varphi : z \mapsto z_0 z$, *alors* $C_\varphi \notin \mathrm{DTN}(B(A))$.

Preuve : 1. Soit $T \in \bigcap_{n\geq 1}(C_\varphi)^n B(A)$ et $f \in A$. Pour tout $n \geq 1$, il existe $T_n \in B(A)$ tel que $T = (C_\varphi)^n T_n$. Donc $T(f) = T_n(f) \circ \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n \text{ termes}}$. Par suite $\mathrm{val}(T(f)) \geq 2^n$. Comme n et f sont quelconques, $T = 0$. Par suite $\bigcap_{n\geq 1}(C_\varphi)^n B(A) = \{0\}$ et par (3), $T - \lambda I$ est injectif pour tout $\lambda \neq 0$. Mais si $C_\varphi(T) = 0$, alors $T(f) \circ \varphi = 0$, quelque soit $f \in A$. Comme $\varphi(D)$ est un voisinage de 0, $T(f) = 0$. Encore une fois on conclue grâce à (3).
2. Découle de (2) puisque $(C_\varphi - z_0 I)$ n'est ni surjectif ni injectif. ///

6.3 Opérateurs analytiques de Toeplitz On considère les espaces $(H_0^2(D), \|\ \|_2)$, dits de Hardy, des fonctions holomorphes sur le disque unité D, nulles en zéro et à carré absolument intégrable sur le bord de D et $(H^\infty(D), \|\ \|_\infty)$ celui des fonctions holomorphes et bornées sur le disque D. Il est bien connu que

$$H_0^2(D) = \{f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n;\ \|f\|_2 := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 < \infty\}.$$

et que c'est un espace de Hilbert séparable. Pour toute fonction $\varphi \in H^\infty(D)$, l'opérateur de multiplication M_φ associé à φ est borné sur $(H_0^2(D), \|\ \|_2)$. Il est dit opérateur analytique de Toeplitz [8].

Proposition 20 *Soit $\varphi \in H^\infty(D)$. Alors $M_\varphi \in DTN(B(H_0^2(D)))$ si et seulement si φ n'est pas constante.*

Preuve : Si φ est constante, M_φ est un multiple de l'unité et donc ne détermine pas la topologie de la norme de $B(H_0^2(D))$. Supposons maintenant que φ n'est pas constante. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, $M_\varphi - \lambda I$ est injectif. Par ailleurs

$$\bigcap_{n\geq 1}(\varphi-\varphi(1))(\varphi-\varphi(\frac{1}{2}))\dots(\varphi-\varphi(\frac{1}{n}))(H_0^2(D)) = \{0\},$$

puisque toute fonction dans cette intersection s'annule sur l'ensemble $\{\frac{1}{n},\ n \geq 1\}$, $M_\varphi \in DTN(B(H_0^2(D)))$ par (3). ///

Comme conséquence on a le

Corollaire 21 *Soient S un shift unilatéral sur un espace de Hilbert séparable H et $\{S\}'$ le commutant de S. Un opérateur $T \in \{S\}'$ détermine la topologie de la norme de $B(H)$ si et seulement si T n'est pas un multiple de l'unité.*

Preuve : Soit $\{e_n, n \in \mathbf{N}\}$ une base de H telle que $S(e_n) = e_{n+1}$, $Z : z \mapsto z$ l'application identité de D et $N : Z^n \mapsto e_n$ l'isométrie naturelle de $H_0^2(D)$ sur H. Alors $\Theta : B(H) \to B(H_0^2(D))$ définie par $\Theta(T) = N^{-1}TN$ est un isomorphisme isométrique tel que $\Theta(S) = L_Z$ et $\Theta(\{S\}') = \{M_Z\}'$. Comme tout $T \in \{M_Z\}'$ est de la forme M_φ avec $\varphi \in H^\infty(D)$ (voir [8], Theorem 3.4), le résultat découle de (20). ///

6.4 Algèbres de matrices Soit $(A, || \ ||)$ une algèbre de Banach commutative semi-simple et unitaire telle que $M(A)$ est séparable et sans point isolé. Pour $\alpha = 1, 2, \dots, +\infty$, soit $M_\alpha(A)$ l'algèbre des matrices d'ordre n sur A si $\alpha = n$ et si $\alpha = +\infty$,

$$M_\alpha(A) = \{M := (a_{i,j})_{i,j\in\mathbf{N}} : ||M|| = \sum_{i,j} ||a_{i,j}|| < +\infty\}.$$

Alors $M_\alpha(A)$ est une algèbre de Banach pour les opérations naturelles des matrices et la norme $\|(a_{i,j})_{i,j}\| = \sum_{i,j}\|a_{i,j}\|$.

Proposition 22 *Dans $M_\alpha(A)$ une matrice diagonale* $\mathrm{diag}(a_i)_i$ *détermine la topologie de la norme si est seulement si $a_i \in \mathrm{DTN}(A)$ pour tout i.*

Preuve : Soit $D = \mathrm{diag}(a_i)_i \in M_\alpha(A)$ et supposons que chaque a_i détremine la topologie de la norme de A. D'après (10), il existe $(\lambda_{i,k})_{k\geq 1} \subset \mathbf{C}$ telle que

$$\bigcap_{n\geq 1}(a_i-\lambda_{i,1})(a_i-\lambda_{i,2})\dots(a_i-\lambda_{i,n})A = \{0\}.$$

On réindexe les $\lambda_{i,k}$, i, k par $\mathbf{N}$ et l'on obtient une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que

$$\bigcap_{n\geq 1}(D-\lambda_1 I)(D-\lambda_2 I)\dots(D-\lambda_n I)M_\alpha(A) = \{0\}.$$

Par ailleurs, si $\lambda \in \mathbf{C}$ et $M \in M_\alpha(A)$ sont tels que $(D-\lambda I)M = 0$, alors, d'après Corollaire 8, $M = 0$ puisque chaque $a_i \in \mathrm{DTN}(A)$. Théorème 3 montre alors que $D \in \mathrm{DTN}(M_\alpha(A))$. Réciproquement, supposons que $D = \mathrm{diag}(a_i)_i \in \mathrm{DTN}(M_\alpha(A))$ et que $a_{i_0} \notin \mathrm{DTN}(A)$.

Alors il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ et $0 \neq b \in A$ tel que $(a_{i_0} - \lambda)b = 0$ et $(a_{i_0} - \lambda)A$ est de codimension infinie. Il en résulte que $D - \lambda I$ est un diviseur de zéro et que $(D - \lambda I)M_\alpha(A)$ est de codimension infinie. D'après (2), ceci est une contradiction. ///

Notons que le même résultat reste vrai si on remplace $M_\alpha(A)$ par une de ses sous-algèbres vérifiant certaines propriétés telles que dans la preuve. C'est en particulier le cas pour l'algèbre des matrices triangulaires supérieures $S_\alpha(A)$ ainsi que celle des matrices diagonales $D(A)$. Ajoutons que $M_\alpha(A)$ est semi-simple alors que $S_\alpha(A)$ ne l'est pas et que $D(A)$ est presque commutative.

6.5 Algèbres à poids Soit $(A, ||\ ||)$ une algèbre de Banach unitaire quelconque, $\omega = (\omega_n)_{n\geq 0}$ un poids sous-multiplicatif et x un symbôle. Posons

$$\ell^1_\omega(A) = \{a := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; \|a\| := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\omega_n < \infty\}.$$

Alors pour la multiplication $ax^n bx^m = abx^{n+m}$ et la norme

$$\|a\| := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\omega_n,$$

$\ell^1_\omega(A)$ est une algèbre de Banach unitaire telle que $\bigcap_{n\geq 1} x^n \ell^1_\omega(A) = \{0\}$. Comme pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, $x - \lambda$ n'est pas un diviseur de zéro dans $\ell^1_\omega(A)$, $x \in \mathrm{DTN}(\ell^1_\omega(A))$. Remarquons ici qu'il est possible qu'aucun élément de A n'en détermine la topologie de la norme ([5], Example 1.).

References

[1] B. Aupetit, *Proporiétés spectrales des algèbres de Banach*, Lecture Notes Math. Springer-Verlag, **735**.

[2] F.F. Bonsall, J. Duncan, *Complete normed algebras* Springer-Verlag, (1973).

[3] N. Bourbaki, *Topologie générale, Chapitre 1-4*, Masson, (1990).

[4] J.B. Conway, *A course in functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, **96**, Springer Verlag.

[5] K. Jarosz, *Linear maps determining the norm topology,* Trans. Amer. Math. soc. **353** (2) (2000), 723-731.

[6] I. Kaplansky, *Ring isomorphisms of Banach algebras*, Canadian J. Math. **6** (1954), 374-381.

[7] A. Pelczynski, *All separable Banach spaces admit for $\epsilon > 0$ fundamental total and bounded by $1 + \epsilon$ biorthogonal sequences*, Studia Math. **55** (3) (1976), 295-304.

[8] H. Radjavi, Peter Rosenthal, *Invariant subspaces.* Springer-Verlag, (1973).

[9] A.M. Sinclair, *Automatic continuity of linear opartors*, London Math. Soc. Lecture notes Series **21**, Cambridge University Press (1976).

[10] A.R. Villena, *Operators determining the complete norm topology of $C(K)$*, Studia Math. **124** (2) (1997), 155-160.

[11] A.R. Villena, *Elements in a commutative Banach algebra determining the norm topology*, Proc. Amer. Math. Soc. **29** (4) (2000), 1057-1064.

Authors' addresses :
E. Abdelali, Université Mohamed V, Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique, B.P. 1014, Rabat (Maroc).
E-mail : abdelali@fsr.ac.ma
E. Illoussamen, Département de Mathématiques, ENSET, Avenue Hassan II Mohamedia, (Maroc).
E-mail : illous@hotmail.com.
L. Oubbi, Département de Mathématiques, Ecole Normale Supérieure de Rabat, B.P. 5118, Takaddoum, 10105 Rabat (Maroc).
E-mail : l_oubbi@hotmail.com, oubbi@ens-rabat.ac.ma.